INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA MODERNA

ANDRÉS PÁEZ

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA MODERNA

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
BOGOTÁ, 2007

Romanas.pmd 3 13/07/07, 03:14 p.m.

Introducción a la lógica moderna / Andrés Páez. Bogotá: Universidad de los Andes, Facultad de Ciencias Sociales, Departamento de Filosofía, CESO, Ediciones Uniandes, 2007.

p. 540; 17x24cm.

ISBN: 978-958-695-272-9

1. Lógica I. Universidad de los Andes (Colombia). Facultad de Ciencias Sociales. Departamento de Filosofía II. Universidad de los Andes (Colombia). CESO III. Tít.

CDD 160 SBUA

Primera edición, mayo de 2007

© Andrés Páez

© Universidad de los Andes. Facultad de Ciencias Sociales,
Departamento de Filosofía
Teléfonos: 3394949 / 3394999. Ext. 2530/2501

Ediciones Uniandes
Carrera 1 N° 19-27. Edificio AU 6
Apartado Aéreo 4976
Bogotá, D.C., Colombia
Teléfonos: 3394949 - 3394999. Ext. 2181/ 2071 / 2099. Fax: ext. 2158
Correo electrónico: infeduni@uniandes.edu.co / libreria@uniandes.edu.co

ISBN: 978-958-695-272-9

Diagramación electrónica: Éditer Estrategias Educativas Ltda.
Bogotá, D.C., ctovarleon@yahoo.com.mx

Impresión: Corcas Editores Ltda.

Diseño de cubierta: José Miguel Vargas
En la contraportada: De izquierda a derecha, Ludwig Wittgenstein, C. I. Lewis, Alonzo Church, Leopold Löwenheim, Charles Sanders Peirce, Gottlob Frege, Bertrand Russell, Alfred North Whitehead, Saul Kripke, Kurt Gödel, Toralf Skolem y David Hilbert.

Impreso en Colombia / Printed in Colombia

Todos los derechos reservados. Esta publicación no puede ser reproducida ni en su todo ni en sus partes, ni registrada en o trasmitida por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma o por ningún otro medio, sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electroóptico, por fotocopia o por cualquier otro, sin el permiso previo por escrito de los editores.

A Friederike

Contenido

SEGUNDA PARTE
LA LÓGICA DE PRIMER ORDEN

Romanas.pmd 10 17/07/07, 10:27 a.m.

Romanas.pmd 11 22/08/2007, 8:23

Romanas.pmd 12 13/07/07, 03:15 p.m.

Prefacio

Introducción a la lógica moderna es un libro de texto dedicado al estudio de la lógica simbólica elemental. No presupone familiaridad alguna con la lógica, las matemáticas o la filosofía, y he hecho un esfuerzo deliberado por adaptarlo a los intereses de estudiantes provenientes de las más diversas disciplinas. Al mismo tiempo, no he intentado ocultar las dificultades técnicas y filosóficas que hacen de la lógica un área de estudio interesante en sí misma.

El libro está dividido en tres partes. La primera se ocupa de la lógica proposicional, la segunda de la lógica de primer orden y la tercera de la lógica modal proposicional. Los tres temas se estudian semánticamente utilizando árboles de verdad, y sintácticamente a través de sistemas de deducción natural. Al final de cada sección hay numerosos ejercicios de práctica, la mitad de los cuales son resueltos en el apéndice. El texto está diseñado para un curso de un año de duración y permite gran flexibilidad en el diseño del mismo. Las secciones y los ejercicios marcados con un asterisco (*) contienen material que no es indispensable para la comprensión del tema del capítulo correspondiente y su estudio depende de los intereses y necesidades del grupo de estudiantes.

Este libro es el resultado de más de una década dedicada a la enseñanza de la lógica formal, inicialmente en el Queens College de The City University of New York, y durante los últimos seis años en la Universidad de los Andes en Bogotá, Colombia. Los cientos de estudiantes que han utilizado los borradores de este texto han hecho innumerables correcciones y contribuciones al mismo y con ellos tengo mi mayor deuda de gratitud. Durante los últimos años he tenido la fortuna de contar con la colaboración de Manuel de Zubiría, quien ha leído y corregido varias versiones del libro durante el tiempo en que ha trabajado como mi asistente de docencia e investigación. Raúl Meléndez y Verónica Muriel leyeron gran parte de los capítulos y me salvaron de varios errores vergonzosos.

El apoyo institucional en la Universidad de los Andes ha sido fundamental durante el largo proceso de escritura. Felipe Castañeda, director del Departamento de

Filosofía, Carl Langebaek, decano de la Facultad de Ciencias Sociales, y Álvaro Camacho, director del Centro de Estudios Socioculturales e Internacionales (CESO), apoyaron este proyecto desde el comienzo y sin su respaldo estas páginas no habrían llegado a ver la luz del día.

Finalmente, quiero agradecerle a José Miguel Vargas el diseño de la portada y a César Tovar su paciencia y dedicación durante el difícil proceso de diagramación del texto.

ANDRÉS PÁEZ
Bogotá, mayo de 2007

1. Conceptos básicos de la lógica

1.1 ¿Qué es la lógica?

Históricamente, dos preocupaciones concomitantes han guiado el desarrollo de la lógica. Por una parte, desde la Antigüedad los filósofos se han esforzado por estudiar los principios y métodos que nos permiten distinguir el razonamiento correcto del incorrecto. Por otra, el desarrollo de las matemáticas y de la ciencia moderna ha hecho necesario buscar la formalización y sistematización de sus estructuras y de sus mecanismos de prueba y corroboración.

Sería incorrecto definir la lógica simplemente como el estudio del razonamiento, pues lo que le interesa al lógico no es construir una teoría acerca del *proceso* de razonamiento. Éste es, más bien, el propósito de la psicología y de la ciencia cognitiva, las cuales hacen un estudio *descriptivo* de cómo pensamos, sin detenerse a juzgar si lo hacemos correcta o incorrectamente. El lógico debe limitarse al *producto* palpable del razonamiento, el cual se expresa a través de argumentos orales o escritos, y su propósito no es descriptivo sino *normativo*, al establecer reglas y principios para evaluar estos argumentos.

El interés en determinar los cánones del razonamiento correcto encuentra su primera manifestación en la obra de Aristóteles (384-322 A.C.). El filósofo griego escribió seis tratados sobre el tema: *Categorías*, *Sobre la interpretación*, *Primeros analíticos*, *Analíticos posteriores*, *Tópicos* y *Refutaciones sofísticas*. La lógica aristotélica está basada en la noción de ***deducción*** (*sullogismus*), que Aristóteles define de la siguiente manera:

> Una deducción es un discurso (*logos*) en el cual, suponiendo ciertas cosas, resulta de necesidad otra cosa diferente de las cosas supuestas sólo por haber sido éstas supuestas (*Primeros analíticos* 24b18-20).

Cada una de las cosas supuestas es una ***premisa*** (*prótasis*) y lo que "resulta de necesidad" es la ***conclusión*** (*sumpérasma*). El carácter necesario de la conexión entre las premisas y la conclusión es el elemento más importante de la definición: si

Cap-1.pmd 1 20/06/07, 11:53 a.m.

suponemos que las premisas de una deducción son verdaderas, es imposible que la conclusión sea falsa. El concepto de deducción definido por Aristóteles corresponde hasta cierto punto al concepto moderno de validez lógica que estudiaremos en este libro. En ambos casos lo que distingue el razonamiento correcto del incorrecto es la *preservación de la verdad*.

Durante el periodo helenístico, la lógica aristotélica fue opacada por la lógica estoica, y en particular por las obras de Crisipo (280-207 A.C.), pero tras su redescubrimiento por parte de los comentaristas de finales de la Antigüedad, la lógica de Aristóteles recuperó su posición dominante. Los comentaristas agruparon los seis tratados lógicos de Aristóteles bajo el título *Organon* (instrumento), un término que Aristóteles mismo nunca utilizó, y que refleja la forma en que los peripatéticos interpretaron el papel de la lógica. A diferencia de los lógicos estoicos, que consideraban a la lógica como parte de la filosofía misma, los comentaristas de Aristóteles veían el estudio de la lógica sólo como una propedéutica, una preparación para el estudio de la filosofía.

Durante más de dos mil años la lógica aristotélica fue considerada la única lógica posible, y sólo en el siglo XIX se hicieron evidentes sus limitaciones, en particular, en sus aplicaciones en las matemáticas. Gottlob Frege (1848-1925) y Charles Sanders Peirce (1839-1914) sentaron, independientemente, las bases para el desarrollo de la lógica moderna. Sin embargo, la obra más influyente en la historia temprana de la nueva lógica fue *Principia Mathematica* (1910-1913), escrita por Bertrand Russell (1872-1970) y Alfred North Whitehead (1861-1947). El propósito de esta obra era demostrar que la aritmética puede ser reducida a la lógica, es decir, que cualquier verdad aritmética puede ser expresada y probada en términos puramente lógicos. Aunque el proyecto finalmente se enfrentó a dificultades insalvables, su legado es indiscutible. En primer lugar, introdujo una notación superior a la de Frege y Peirce que sacó a la luz el poder expresivo de la lógica moderna. En segundo lugar, estimuló el interés por el estudio de las propiedades de los sistemas formales, estudio que conduciría al descubrimiento de resultados teóricos tan importantes como el famoso Teorema de Gödel (1931). Finalmente, en la introducción al libro Russell exploró las conexiones entre la nueva lógica y los problemas tradicionales de la metafísica y la epistemología, develando sus aspectos más interesantes desde un punto de vista filosófico.

La lógica se ha desarrollado más rápidamente en los últimos cien años que durante toda su historia anterior, y la lógica aristotélica sólo constituye una parte menor de la lógica moderna. El sistema desarrollado por Whitehead y Russell se ha convertido en el sistema estándar, y es en ese sentido que se denomina ***lógica clásica***, a pesar de tener una relación muy tenue con la lógica de la Antigüedad. Durante los últimos ochenta años han aparecido múltiples sistemas lógicos que extienden la lógica clásica, o que intentan reemplazarla del todo, dando origen a ***lógicas no clási-***

cas. En este libro nos limitaremos al estudio de la lógica clásica y de una de sus extensiones, la lógica modal.

1.2 Enunciados y proposiciones

Comenzaremos nuestro estudio de la lógica introduciendo algunos de los términos más importantes del vocabulario lógico. Generalmente los seres humanos razonamos y defendemos nuestras ideas utilizando oraciones declarativas, no oraciones interrogativas, imperativas o exclamativas. Sólo a través de una oración declarativa podemos decir algo que los demás pueden juzgar como verdadero o falso. Al formular una pregunta no estamos expresando algo verdadero o falso, y una orden nos puede parecer desagradable o inoportuna, pero nunca algo verdadero o falso. A aquellas oraciones que pueden ser utilizadas para decir algo verdadero o falso las llamaremos ***enunciados***. Los siguientes son ejemplos de enunciados:

(1) Tres más cinco es igual a nueve.
(2) El Everest es la montaña más alta del mundo.
(3) Está lloviendo.
(4) Los elefantes vuelan.

Aunque generalmente hablamos de enunciados verdaderos o falsos, debemos tener presente que los enunciados no son verdaderos o falsos en sí mismos. La razón es que una y la misma oración puede ser utilizada para expresar cosas completamente diferentes dependiendo del hablante y del contexto espaciotemporal. Consideremos, por ejemplo, el enunciado:

(5) El presidente de Estados Unidos es hijo de un ex presidente.

Si alguien pronunció este enunciado en 1995, dijo algo falso, mientras que si lo pronunció en 2004, dijo algo verdadero. Del mismo modo, el enunciado:

(6) Yo soy profesor de filosofía.

es verdadero en boca de Jürgen Habermas y falso en boca de Fidel Castro.

Muchos filósofos han llamado ***proposiciones*** a aquellas verdades o falsedades que son expresadas por un enunciado. Según este punto de vista, un mismo enunciado puede expresar proposiciones diferentes, como en los ejemplos **(5)** y **(6)**, y la misma proposición puede ser expresada utilizando enunciados diferentes, como en el siguiente ejemplo:

(7) Martínez ganó las elecciones.
(8) Las elecciones fueron ganadas por Martínez.

Cap-1.pmd 3 20/06/07, 11:53 a.m.

Lo mismo ocurre con los siguientes tres enunciados:

(9) Snow is white.
(10) La nieve es blanca.
(11) Schnee ist weiss.

Los enunciados **(9)**, **(10)** y **(11)** afirman lo mismo. La verdad o falsedad de una proposición no depende del idioma al que pertenece el enunciado que la expresa.

El uso de las proposiciones ha sido cuestionado por varios filósofos que consideran que las proposiciones son entidades misteriosas de las cuales es mejor prescindir[1]. Es difícil decir qué es una proposición. No son entidades lingüísticas, pues no pertenecen a ningún lenguaje. Tampoco pueden ser entidades mentales, como ideas o pensamientos, pues muchas proposiciones seguirían siendo verdaderas o falsas así no hubiera vida inteligente en el universo. Algunos filósofos definen una proposición como un objeto abstracto con propiedades análogas a las de los objetos matemáticos. Pero esa definición presenta varios inconvenientes. Por una parte, está el problema de tratar de decir exactamente qué es un objeto abstracto, una tarea no desprovista de dificultades filosóficas que no intentaremos resolver aquí. Por otra parte, si los enunciados expresan proposiciones, debemos preguntarnos cuál es la relación entre esos objetos abstractos y los enunciados que utilizamos en la vida diaria. ¿Cómo podemos saber cuál proposición abstracta está siendo expresada por un enunciado? ¿Cómo podemos determinar que dos enunciados diferentes realmente expresan la misma proposición? Así, aun si aceptáramos que el verdadero objeto de la lógica es el estudio de las relaciones entre proposiciones, estas preguntas pondrían en duda la utilidad práctica de la lógica. Cualquier razonamiento concreto debe partir necesariamente de una serie de enunciados, y sólo a partir de los enunciados es posible considerar las proposiciones que éstos expresan. Pero si no podemos conocer con certeza la relación entre enunciados y proposiciones, nuestro análisis lógico de los enunciados no podrá aplicarse sin más a las proposiciones que éstos expresan.

En la práctica, los lógicos tienden a ignorar la distinción entre enunciados y proposiciones. Si suponemos que cada enunciado es utilizado en un contexto bien definido, es decir, por un hablante cuya identidad ha sido determinada y en circunstancias espaciotemporales plenamente conocidas, se elimina la razón principal para establecer una distinción entre enunciados y proposiciones, a saber, la variación del valor de verdad de una oración según el contexto en el que sea utilizada.

Hay dos formas de interpretar lo que sucede cuando el contexto de un enunciado se define adecuadamente. Para los que defienden la existencia de las proposicio-

1. Para una discusión de los problemas filosóficos en torno al concepto de proposición desde puntos de vista opuestos, *véase* Putnam (1971) y Quine (1973).

Cap-1.pmd 4 20/06/07, 11:53 a.m.

nes, la definición del contexto nos permite trasladar el valor de verdad de la proposición al enunciado, y sólo de ese modo es posible hablar de enunciados verdaderos o falsos. Pero si uno desea evitar el uso de las proposiciones, en vez de decir que las palabras "verdadero" y "falso" se aplican a las proposiciones o a los enunciados, se puede afirmar que lo que propiamente se puede llamar verdadero o falso es el acto de emisión de un enunciado, es decir, la conjunción de una oración afirmativa, que es una entidad lingüística, y su contexto pragmático de emisión. Quine (1973), uno de los lógicos más influyentes del siglo XX, ha propuesto que estos actos de emisión pueden ser transformados en oraciones que incluyan información acerca de su contexto pragmático. Así, en vez de decir: "Está lloviendo", un enunciado cuyo valor de verdad puede variar contextualmente, decimos: "Está lloviendo en Bogotá a la medianoche del 5 de abril de 2005" (el momento exacto en el que escribo estas líneas). A este tipo de enunciados, Quine los llama "oraciones eternas", y son ellas las que tienen la propiedad de ser verdaderas o falsas.

La preferencia por alguna de las dos interpretaciones presentadas aquí estará determinada por las convicciones filosóficas del lector. El efecto práctico para el estudio de la lógica es que podemos concentrarnos exclusivamente en el estudio de los enunciados de nuestro lenguaje, y asignarle a éstos las propiedades de verdad y falsedad, siempre y cuando asumamos que el contexto de uso de cada enunciado ha sido plenamente definido.

Dos aclaraciones finales son pertinentes. En primer lugar, cuando afirmamos que un enunciado posee cierta propiedad lógica, no le estamos asignando esa propiedad al enunciado en cuanto objeto físico particular, es decir, en cuanto colección de sonidos emitidos o manchas de tinta en un papel. Cada enunciado particular es un *ejemplar* de un *tipo* de oración que se caracteriza por estar compuesta por las mismas palabras en el mismo orden y con la misma puntuación. Por lo tanto, cuando hablamos de las propiedades lógicas de un enunciado, asumimos que esta propiedad se aplica a todos los ejemplares de ese tipo particular de enunciado. En segundo lugar, siempre debemos asumir que los enunciados que utilizamos son oraciones del español, nuestro lenguaje natural, tal y como es utilizado en el presente. Podría suceder que exactamente las mismas marcas en el papel o los mismos sonidos sean utilizados para afirmar cosas enteramente distintas en diferentes momentos y en diferentes idiomas. Por lo tanto, siempre debemos relativizar los enunciados que utilicemos a nuestra comunidad lingüística.

Siguiendo el uso tradicional, llamaremos al estudio lógico de las relaciones entre enunciados, ***lógica proposicional***, sin que ello implique un compromiso del autor con la existencia de proposiciones.

Cap-1.pmd 5 20/06/07, 11:53 a.m.

Ejercicio 1.1

Indique cuáles de las siguientes oraciones son enunciados.

1. ¿Dónde queda Samarcanda?
2. ¡No me vuelvas a llamar!
3. Beijing es una ciudad enorme.
4. Por favor cierra la puerta cuando salgas.
5. La autosuficiencia petrolera del país sólo durará cinco años más.
6. ¿Quién va primero?
7. 4 + 6 = 10.
8. Este ejercicio es corto.

1.3 Argumentos

En el uso cotidiano, la palabra "argumento" se refiere a un razonamiento utilizado para defender una tesis o para convencer a otros de la verdad de un enunciado. Generalmente decimos que la conclusión de un argumento se sigue de las premisas. En este texto partiremos de una definición un poco más amplia de la palabra:

> Un ***argumento*** es una secuencia finita de enunciados. El último enunciado de la secuencia es la ***conclusión***, mientras que los demás enunciados son las ***premisas*** del argumento.

La definición anterior no requiere que las premisas del argumento sean verdaderas, ni siquiera plausibles. Tampoco se requiere que haya relación alguna entre las premisas y la conclusión, ni tampoco que el argumento pueda ser utilizado en la práctica. Por ejemplo, los siguientes enunciados forman un argumento:

(12)	**Premisas**:	Mi dolor de cabeza es peor que mi dolor de muelas.
		La estructura atómica del agua no es muy compleja.
	Conclusión:	En Tailandia los autos transitan por la izquierda.

El argumento anterior es un muy mal argumento, uno que nadie podría utilizar, pero es un argumento según nuestra definición. En gran medida, el estudio de la lógica consiste en establecer qué es lo que distingue un buen argumento de uno que no lo es. Los siguientes argumentos son más cercanos a los utilizados en la vida diaria:

(13)	**Premisas**:	Todos los mamíferos son vertebrados.
		Algunas criaturas marinas son mamíferos.
	Conclusión:	Algunas criaturas marinas son vertebradas.

Cap-1.pmd 6 20/06/07, 11:53 a.m.

(14) **Premisas**: Si Juan no llega antes de las diez, perderemos el tren.
Juan no llegó antes de las diez.
Conclusión: Perdimos el tren.

(15) **Premisas**: El 95% de las personas que comieron en el restaurante de la esquina anoche se enfermó.
Claudia comió anoche en el restaurante de la esquina.
Conclusión: Claudia se enfermó.

En cada uno de estos casos, las premisas apoyan la conclusión, nos dan bases para creer que ésta es verdadera. Sin embargo, hay una gran diferencia entre los dos primeros ejemplos y el argumento **(15)**. En los dos primeros casos, la verdad de las premisas garantiza necesariamente la verdad de la conclusión. En el argumento **(15)**, por el contrario, la verdad de las premisas sólo hace que la conclusión sea altamente probable, pero no puede garantizar que ésta sea verdadera. Al fin y al cabo, Claudia puede estar entre el 5 por ciento de las personas que no se enfermó tras comer en el restaurante de la esquina. Los argumentos de este tipo se denominan *argumentos inductivos* y serán el tema de la siguiente sección.

Cuando la verdad de las premisas de un argumento garantiza la verdad de la conclusión, diremos que el argumento es deductivamente válido, y diremos que es deductivamente inválido en caso contrario. Más precisamente:

> Un argumento es ***deductivamente válido*** si y sólo si es imposible que sus premisas sean verdaderas y su conclusión falsa. Es ***deductivamente inválido*** en caso contrario.

La forma más corriente de representar un argumento deductivo es separando las premisas de la conclusión con una línea horizontal. Así, podemos reescribir el argumento **(13)** de la siguiente manera:

(13a) Todos los mamíferos son vertebrados.
Algunas criaturas marinas son mamíferos.
____
Algunas criaturas marinas son vertebradas.

La virtud de un argumento deductivamente válido reside en que la conclusión siempre preserva la verdad de las premisas. Pero esta propiedad de los argumentos deductivamente válidos no obedece a su contenido, a lo que se afirma en ellos, sino más bien a su ***forma lógica***. El anterior argumento tiene la siguiente forma lógica:

Todos los A son B.
Algunos C son A.
____
Algunos C son B.

Este esquema siempre produce un razonamiento que preserva la verdad cuando las letras "*A*", "*B*" y "*C*" son reemplazadas por términos generales que denotan conjuntos o clases de cosas, como en el siguiente ejemplo:

(16) Todos los cirujanos plásticos son ricos.
Algunos médicos son cirujanos plásticos.
———
Algunos médicos son ricos.

A diferencia del argumento **(13)**, en el que las premisas son de hecho verdaderas, en este caso la primera premisa es cuestionable: no es cierto que absolutamente todos los cirujanos plásticos en el mundo sean ricos. Pero desde un punto de vista lógico, es irrelevante si la premisa es de hecho verdadera. La pregunta que debemos hacernos es: ¿si las premisas fueran verdaderas, sería posible que la conclusión fuera falsa? Tanto en el argumento **(13)** como en el **(16)** la respuesta es negativa. Por esa razón podemos afirmar que el argumento **(16)** también es deductivamente válido.

Consideremos otros dos argumentos que poseen esta misma forma lógica.

(17) Todos los peces son mamíferos.
Algunos animales terrestres son peces.
———
Algunos animales terrestres son mamíferos.

(18) Todos los búhos son sabios.
Algunos pájaros son búhos.
———
Algunos pájaros son sabios.

En el argumento **(17)**, las dos premisas son falsas y la conclusión es verdadera. En el **(18)**, una de las premisas y la conclusión son falsas. Pero aun así, los argumentos son deductivamente válidos porque, si asumimos contrafáctica o hipotéticamente que sus premisas son verdaderas, sería imposible que la conclusión fuera falsa.

Consideremos ahora un argumento con una forma lógica diferente:

(19) Todos los mamíferos son vertebrados.
Algunas criaturas marinas son vertebradas.
———
Algunas criaturas marinas son mamíferos.

El argumento es deductivamente inválido porque si asumimos la verdad de las premisas, no se garantiza la verdad de la conclusión. Supongamos que debido al calentamiento global, todos los mamíferos del mar desaparecen. En tal caso, la conclusión del argumento sería falsa, pero seguiría siendo cierto que todos los mamíferos son vertebrados y que algunas criaturas marinas, como los peces, son vertebrados. Es decir, existe la posibilidad de que las premisas sean ciertas y la conclusión falsa. Por eso es un argumento deductivamente inválido. El argumento tiene la siguiente forma lógica:

Cap-1.pmd 8 20/06/07, 11:53 a.m.

Todos los *A* son *B*.
Algunos *C* son *B*.

Algunos *C* son *A*.

Reemplazando las letras "*A*", "*B*" y "*C*" por términos generales diferentes, obtenemos el siguiente argumento, el cual es claramente inválido.

(20) Todos los pájaros tienen alas.
Algunos mamíferos tienen alas.

Algunos mamíferos son pájaros.

Por otra parte, el hecho de que toda la información contenida en un argumento sea de hecho cierta no afecta la validez o invalidez del mismo. Por ejemplo, el siguiente argumento es deductivamente inválido según nuestra definición a pesar de que tanto las premisas como la conclusión son de hecho verdaderas:

(21) Todos los quiteños viven en la capital de Ecuador.
Todos los bogotanos viven en la capital de Colombia.
Todos los caraqueños viven en la capital de Venezuela.

Todos los limeños viven en la capital de Perú.

El problema reside en que es posible que los peruanos decidan cambiar de capital, así Quito siga siendo la capital de Ecuador, Bogotá la de Colombia y Caracas la de Venezuela. Es decir, es posible que las premisas sean ciertas y la conclusión falsa.

La validez deductiva de un argumento generalmente no es suficiente para que éste sea aceptado. Para poder defender adecuadamente una conclusión se necesita no sólo que el argumento sea deductivamente válido, sino también que las premisas o razones aducidas en su defensa sean *de hecho* verdaderas. Cuando esto ocurre, decimos que el argumento es deductivamente consistente:

> Un argumento es ***deductivamente consistente*** si y sólo si es deductivamente válido y todas sus premisas son verdaderas. Es ***deductivamente inconsistente*** en caso contrario.

Puede ocurrir que un argumento deductivamente válido tenga una o más premisas falsas que pueden ser eliminadas sin afectar la validez del mismo. Por eso, antes de desechar un argumento válido pero deductivamente inconsistente, se debe examinar si las premisas falsas son necesarias para su validez.

Cap-1.pmd 9 20/06/07, 11:53 a.m.

1.4 Argumentos inductivos

Aunque sería deseable que todos los argumentos que utilizamos fueran deductivamente válidos, en la mayoría de los casos no contamos con evidencia suficiente o adecuada para garantizar la verdad de las afirmaciones que hacemos. Tan sólo en las ciencias formales, y quizás en la filosofía, es posible utilizar argumentos deductivamente válidos como base de las conclusiones obtenidas, pero en todas las ciencias naturales y sociales debemos admitir siempre la posibilidad de que las conclusiones basadas en la evidencia reunida a través de la experiencia resulten ser equivocadas. A pesar de eso, no se puede decir tampoco que la evidencia con la que contamos carezca de valor. Un buen argumento puede aumentar en un alto grado la probabilidad de que la conclusión sea verdadera. En tales casos decimos que el argumento es inductivamente fuerte:

> Un argumento es ***inductivamente fuerte*** si y sólo si su conclusión es altamente probable dada la verdad de las premisas.

La fuerza de un argumento inductivo es una cuestión de grado. Al añadirle o quitarle premisas a un argumento inductivo podemos alterar la probabilidad de que su conclusión sea verdadera. Esto no ocurre en el caso de los argumentos deductivos, en los cuales la validez del argumento no se ve afectada por la adición de más premisas. Por ejemplo, el siguiente argumento es deductivamente válido:

(22) Todos los hombres son mortales.
Los griegos son hombres.
____
Los griegos son mortales.

Su validez no se ve afectada si agregamos una premisa adicional:

(23) La cabra saltó sobre la luna.
Todos los hombres son mortales.
Los griegos son hombres.
____
Los griegos son mortales.

El argumento sigue siendo deductivamente válido incluso si le agregamos premisas que contradigan las premisas originales:

(24) Ningún hombre es mortal.
Todos los hombres son mortales.
Los griegos son hombres.
____
Los griegos son mortales.

Cap-1.pmd 10 20/06/07, 11:53 a.m.

Como veremos más adelante, de una contradicción lógica es posible deducir cualquier cosa. Por lo tanto, un argumento deductivo cuyas premisas sean contradictorias siempre será válido, pero carecerá de cualquier utilidad.

En resumen, un argumento deductivo sigue siendo válido sin importar qué más está sucediendo en el mundo. No sucede lo mismo con un argumento inductivo. Consideremos el siguiente ejemplo:

(25) La mayoría de los jardineros carece de estudios universitarios.
Ludwig es un jardinero.
═══════════════════════ [0.9]
Ludwig carece de estudios universitarios.

Las dos líneas que separan a las premisas de la conclusión indican que se trata de un argumento inductivo y el número entre corchetes indica el grado de probabilidad que las premisas le confieren a la conclusión, que puede ser cualquier número entre 0 y 1 inclusive[2]. Observemos ahora lo que sucede cuando añadimos más información:

(26) La mayoría de los jardineros carece de estudios universitarios.
Ludwig es un jardinero.
Ludwig escribió uno de los libros más influyentes en la historia de la filosofía.
Ludwig pertenece a una de las familias más ricas de Viena.
═══════════════════════ [0.1]
Ludwig carece de estudios universitarios.

El grado de probabilidad que el nuevo conjunto de premisas le confiere a la conclusión es muy bajo. Si añadiéramos más información, el grado de probabilidad podría bajar aún más, o quizás subir un poco. El punto fundamental es que la fortaleza de un argumento inductivo siempre dependerá de la información de la que dispongamos, o por decirlo en términos filosóficos, de nuestra situación epistémica.

Los ***argumentos por analogía*** y los ***argumentos causales*** nos proporcionan los ejemplos más claros de razonamientos inductivos[3]. En un argumento por analogía, hacemos una afirmación acerca de un evento o de un objeto a partir de su similitud con otros eventos u objetos que hemos experimentado en el pasado. Los siguientes son ejemplos informales de argumentos por analogía:

(27) En todas las clases que he tomado con el profesor Vargas, los exámenes han sido de escogencia múltiple. Por lo tanto, en la próxima clase que tome con el profesor Vargas los exámenes serán de escogencia múltiple.

2. Estas convenciones fueron propuestas por Hempel (1965).

3. En *Un sistema de lógica*, John Stuart Mill (1806-1873) propuso los métodos de inferencia inductiva más conocidos, los cuales combinan argumentos analógicos y causales.

(28) Un médico concluye que el mejor tratamiento para los síntomas de la señora Chávez es la droga X porque esta droga ha tenido un efecto benéfico en todos los pacientes con los mismos síntomas.

En ninguno de los dos argumentos las premisas garantizan que la conclusión sea verdadera: el profesor Vargas puede decidir cambiar el formato de sus exámenes, y la droga X puede no ser efectiva en el caso de la señora Chávez. Sin embargo, la información proporcionada en las premisas nos da pie para pensar que la conclusión es cierta. En términos generales, un argumento analógico tiene la siguiente estructura. Partimos de cierta información conocida:

Un objeto o evento *x* tiene las características *ABCD*
Un objeto o evento *y* tiene las características *ABCD*

Ahora consideramos una característica *E* que *x* posee, pero que no sabemos si *y* también posee. Dadas las similitudes iniciales entre *x* y *y*, concluimos que *y* probablemente también posee la característica *E*.

En los argumentos causales, la causa es inferida a partir de su efecto, o el efecto es inferido a partir de su causa. Pero en cada uno de estos casos la palabra "causa" es usada de manera diferente. Una causa puede ser entendida como un factor necesario para la ocurrencia de un fenómeno, un factor sin el cual el fenómeno no habría ocurrido. El oxígeno es una ***causa necesaria*** del fuego, pues no ocurre en su ausencia. Pero una causa también puede ser entendida como un factor que es suficiente por sí solo para que ocurra un fenómeno. La ingestión de un kilo de plutonio es ***causa suficiente*** de una muerte desagradable, pero no es una causa necesaria porque existen muchas otras cosas que podrían causar una muerte desagradable.

Para poder inferir una causa a partir de su efecto, la causa debe ser una causa necesaria, como en el siguiente ejemplo:

(29) Un profesor descubre que el ensayo de diez páginas entregado por uno de sus estudiantes es idéntico a un texto famoso de un autor argentino. El profesor concluye que el estudiante copió su ensayo porque ésa es la única causa posible de tamaña coincidencia.

Y para poder inferir un efecto a partir de su causa, la causa debe ser una causa suficiente, como en el siguiente ejemplo:

(30) Un biólogo sella herméticamente un recipiente que contiene bacterias aeróbicas. Después de una semana, y antes de abrir el recipiente, el biólogo concluye que todas las bacterias aeróbicas están muertas.

Cap-1.pmd 12 20/06/07, 11:53 a.m.

El efecto, la muerte de todas las bacterias aeróbicas, es inferido a partir de una de las causas suficientes de su muerte.

Aunque sea común caracterizar la relación causal en términos de suficiencia y necesidad, no existe ninguna forma de probar que las leyes causales implícitas en este tipo de argumentos sean verdaderas. La razón es que la relación de causa y efecto no es una relación lógica que pueda ser descubierta *a priori*. Las leyes causales son descubiertas a través de la experiencia, a partir de un número limitado de observaciones, y no existe ninguna garantía de que lo que se ha observado en esos casos se repita en aquellos casos análogos que no han sido observados[4].

Al igual que en el caso de los argumentos deductivos, en los cuales la validez del argumento debe ser complementada con la verdad de las premisas, en el caso de los argumentos inductivos no basta con mostrar que un argumento es inductivamente fuerte. Para que sea aceptable, un argumento inductivo fuerte debe tener premisas verdaderas:

> Un argumento es un ***argumento inductivo consistente*** si y sólo si es un argumento inductivo fuerte y sus premisas son verdaderas.

1.5 Silogismos categóricos

Un ***silogismo*** es un argumento deductivo en el que la conclusión se infiere de dos premisas. Un ***silogismo categórico*** es aquél en el que las premisas y la conclusión son enunciados categóricos. Y un ***enunciado categórico*** es aquél que afirma o niega que una clase, conjunto o categoría de cosas está incluida en otra clase, conjunto o categoría, total o parcialmente. Por ejemplo, el enunciado: “Todos los pintores fuman” afirma la inclusión total de la clase de los pintores en la clase de los fumadores.

En general, existen cuatro formas en que una clase puede o no estar incluida en otra:

1. Si todos los miembros de una clase son también miembros de la segunda, decimos que la primera está incluida en la segunda.
   Ejemplo: Todos los toreros son vegetarianos.

2. Si al menos un miembro de la primera clase es también miembro de la segunda, decimos que la primera está parcialmente incluida en la segunda.
   Ejemplo: Algunos toreros son vegetarianos.

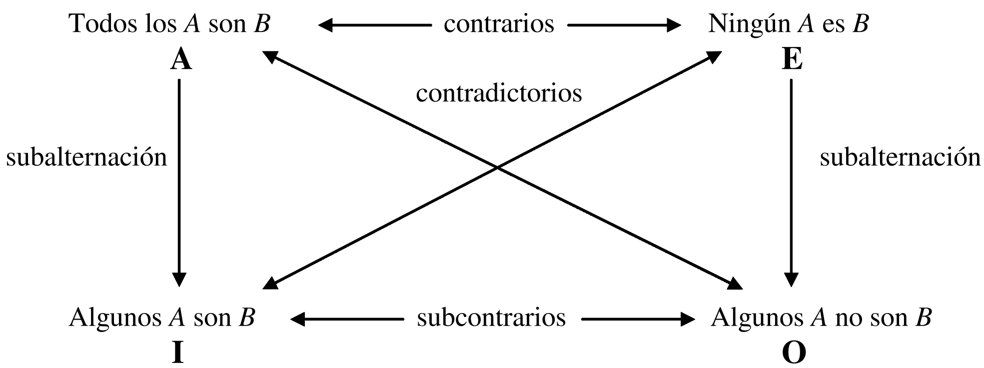
4. El filósofo escocés David Hume (1711-1776) fue el primer filósofo moderno en formular claramente este problema en el *Tratado de la naturaleza humana* (1739).

Cap-1.pmd 13 20/06/07, 11:53 a.m.

3. Si las dos clases no tienen ningún miembro en común, las dos clases se excluyen mutuamente.
   Ejemplo: Ningún torero es vegetariano.
4. Si al menos un miembro de la primera clase no es miembro de la segunda, decimos que la primera está parcialmente excluida de la segunda.
   Ejemplo: Algunos toreros no son vegetarianos.

El enunciado que expresa el primer tipo de relación es ***universal afirmativo***, mientras que el segundo es ***particular afirmativo***. El enunciado: "Algunos toreros son vegetarianos" expresa la inclusión parcial de la clase de los toreros en la clase de los vegetarianos, pero el enunciado ni afirma ni niega su inclusión total. En algunos contextos el enunciado tiene la connotación de que no todos los toreros son vegetarianos, sólo algunos. Pero estrictamente hablando, lo único que el segundo enunciado afirma es que las dos clases tienen al menos un miembro en común. Esa interpretación estricta es la que adoptaremos. El tercer enunciado es ***universal negativo***. Finalmente, el cuarto enunciado es ***particular negativo***. Al igual que en el caso anterior, el enunciado ni niega ni afirma la exclusión total de las dos clases. Se limita tan sólo a afirmar que al menos un miembro de la primera clase no está incluido en la segunda.

Dentro de la tradición aristotélica, los cuatro tipos de enunciados se organizaron en un "cuadro de oposiciones" de la siguiente manera:



Las letras **A** e **I** se le asignan a los enunciados afirmativos, mientras **E** y **O** a los negativos. Las letras corresponden a las primeras dos vocales en las palabras latinas *affirmo* y *nego*. Los enunciados tipo **A** y **O**, al igual que las de tipo **I** y **E** son ***contradictorios*** entre sí porque es imposible que tengan el mismo valor de verdad. Por ejemplo, si es cierto que "Todos los toreros son vegetarianos", debe ser falso necesariamente que "Algunos toreros no son vegetarianos". Y si es falso que "Todos los toreros son vegetarianos", debe ser cierto que "Algunos toreros no son vegetarianos". Los dos enunciados siempre tendrán valores de verdad opuestos. Lo mismo

Cap-1.pmd 14 20/06/07, 11:53 a.m.

ocurre en el caso de los enunciados “Ningún torero es vegetariano” y “Algunos toreros son vegetarianos”.

Los enunciados tipo **A** y **E** son ***contrarios*** porque no es posible que los dos sean verdaderos al mismo tiempo, aunque ambos pueden ser falsos[5]. Retomando el ejemplo de los toreros, es imposible que los enunciados “Todos los toreros son vegetarianos” y Ningún torero es vegetariano” sean ambos ciertos, pero es perfectamente posible que ambos sean falsos. Algunos toreros comen carne y otros no.

Por otra parte, los enunciados tipo **I** y **O** son ***subcontrarios*** porque no es posible que los dos sean falsos al mismo tiempo, aunque ambos pueden ser verdaderos[6]. Los enunciados “Algunos toreros son vegetarianos” y “Algunos toreros no son vegetarianos” pueden ser ambos verdaderos, pero es imposible que ambos sean falsos.

Finalmente, en la tradición aristotélica la relación entre los enunciados tipo **A** e **I,** y entre los enunciados tipo **E** y **O**, era denominada ***subalternación***. Los enunciados universales eran llamados ***superalternos*** y los enunciados particulares ***subalternos***. Un enunciado superalterno implica su respectivo enunciado subalterno, pero no al contrario. Es decir, si la afirmación o la negación universal es verdadera, la respectiva afirmación o negación particular también debe serlo; pero si el enunciado particular es verdadero, no es permisible universalizarlo[7].

Los enunciados categóricos eran utilizados en la lógica aristotélica para la construcción de silogismos. Un silogismo categórico relaciona exactamente tres clases o términos, y cada término aparece exactamente en dos de los tres enunciados. Consideremos el siguiente ejemplo:

(31) Ningún español es protestante.
Algunos toreros son protestantes.
____
Algunos toreros no son españoles.

El término “españoles” que aparece como predicado de la conclusión se denomina ***término mayor***. El término “toreros” que aparece como el sujeto de la conclusión se denomina ***término menor***. Y el término “protestante”, que no aparece en la conclusión, es el ***término medio***. La premisa que contiene el término mayor se denomina

5. Esta afirmación no es correcta cuando alguno de los dos enunciados es una verdad necesaria, es decir, un enunciado que no puede ser falso, tal como “Todos los triángulos son polígonos”. Los enunciados de este tipo no tienen enunciados contrarios. En lo que sigue asumiremos que ninguno de los enunciados es una verdad necesaria.

6. Esta afirmación no es correcta cuando uno de los enunciados es una falsedad necesaria, es decir, un enunciado que no puede ser verdadero, tal como “Algunos círculos son cuadrados”. Los enunciados de este tipo no tienen enunciados subcontrarios. En lo que sigue asumiremos que ninguno de los enunciados es una falsedad necesaria.

7. En el capítulo 6 veremos que las relaciones de contrariedad, subcontrariedad y subalternación sólo se cumplen en la lógica aristotélica, mas no en la lógica moderna.

Cap-1.pmd 15 20/06/07, 11:53 a.m.

premisa mayor, y la que contiene el término menor, ***premisa menor***. Los términos mayor y menor no pueden aparecer en la misma premisa. La premisa mayor siempre se escribe primero. Cuando un silogismo categórico cumple las condiciones anteriores decimos que está escrito en ***forma estándar***.

Estas condiciones no determinan completamente cómo debemos organizar el silogismo porque existen cuatro formas de organizar el término medio. Un silogismo puede tener cuatro ***figuras*** diferentes:

Figura 1	**Figura 2**	**Figura 3**	**Figura 4**
M P	P **M**	**M** P	P **M**
$\underline{\text{S }\mathbf{M}}$	$\underline{\text{S }\mathbf{M}}$	$\underline{\mathbf{M}\text{ S}}$	$\underline{\mathbf{M}\text{ S}}$
S P	S P	S P	S P

"**M**" denota el término medio del silogismo, y "**S**" y "**P**" al sujeto y predicado de la conclusión, respectivamente.

Utilizando las letras asignadas a cada tipo de enunciado categórico, podemos identificar fácilmente la estructura de un silogismo con una secuencia de tres letras. Por ejemplo, en el silogismo **(31)**, la premisa mayor es de forma **E**, la premisa menor es de forma **I**, y la conclusión es un enunciado de tipo **O**. Por lo tanto su estructura se puede representar como **EIO**. A esta secuencia se le denomina el ***modo*** del silogismo. En total, existen 64 modos posibles. Si tenemos en cuenta las cuatro figuras del silogismo, tenemos que hay 256 formas diferentes de silogismos categóricos. Naturalmente, sólo algunos de ellos son lógicamente válidos. Su validez depende tanto de su forma como de su figura.

La siguiente lista nos indica cuáles son los silogismos lógicamente válidos dentro de la lógica aristotélica:

Figura 1	**Figura 2**	**Figura 3**	**Figura 4**
AAA	EAE	IAI	AEE
EAE	AEE	AII	IAI
AII	EIO	OAO	EIO
EIO	AOO	EIO	AEO
AAI	AEO	AAI	EAO
EAO	EAO	EAO	AAI

Durante la Edad Media, los lógicos asociaron palabras en latín con las secuencias de letras que designan el modo del silogismo para que les fuera más fácil recordar cuáles eran lógicamente válidos. Por ejemplo, el silogismo que consiste de tres enunciados tipo **A** se asoció con la palabra b**A**rb**A**r**A**, y el que consiste de enunciados tipos **E**, **A** y **E** con la palabra c**E**l**A**r**E**nt. Y para recordar bajo cuál figuras eran válidos, los organizaron en forma de poema, de la siguiente manera:

Cap-1.pmd 16 20/06/07, 11:53 a.m.

Barbara, Celarent, Darii, Ferioque prioris;
Cesare, Camestres, Festino, Baroco secundae;
Tertia, Darapti, Disamis, Datisi, Felapton,
Bocardo, Ferison, habet; quarta insuper addit
Bramantip, Camenes, Dimaris, Fesapo, Fresison.

Al poema le faltan cinco de las formas listadas anteriormente. La razón es que los lógicos medievales las consideraban formas débiles, es decir, formas en las que se obtiene una conclusión a partir de premisas que permitirían obtener una conclusión más fuerte. Por ejemplo, en la figura 1 se excluye a AAI a favor de AAA.

1.6 Sorites

En muchas ocasiones, la información de la que disponemos no nos permite obtener la conclusión deseada utilizando un solo silogismo categórico, y se requiere dividir el razonamiento en dos o más pasos. Consideremos, por ejemplo, los siguientes enunciados:

Todos los cantantes de rock tienen el pelo largo.
Algunos evangélicos son cantantes de rock.
Todos los evangélicos creen en Dios.

No es posible deducir de estos enunciados, por medio de un solo silogismo, que:

Algunas personas que creen en Dios tienen el pelo largo.

Se requiere dividir la deducción en los siguientes dos silogismos:

(32) Todos los cantantes de rock tienen el pelo largo.
Algunos evangélicos son cantantes de rock.
―――――――――――――――――
Algunos evangélicos tienen el pelo largo.

(33) Algunos evangélicos tienen el pelo largo.
Todos los evangélicos creen en Dios.
―――――――――――――――――
Algunas personas que creen en Dios tienen el pelo largo.

La conclusión del silogismo **(32)** se convierte en una de las premisas del silogismo **(33)**. De este modo tenemos dos silogismos válidos, que tomados en conjunto arrojan la conclusión deseada.

Cuando en un argumento deductivo sólo se incluyen las premisas y la conclusión sin hacer explícitos los eslabones de la cadena silogística, el argumento resultante se denomina un **sorites**. Un sorites puede tener cualquier número de premisas, y en un argumento extenso los silogismos que forman la cadena pueden ser numerosos. El siguiente ejemplo de un sorites es tomado de libro *Lógica simbólica* de Lewis Carroll, el autor de *Alicia en el país de las maravillas*[8].

Los bebés son ilógicos.
Nadie que pueda dominar un cocodrilo es despreciado.
Las personas ilógicas son despreciadas.
Por lo tanto, los bebés no pueden dominar cocodrilos.

(34) Las personas ilógicas son despreciadas.
Los bebés son ilógicos.
―――――――――――
Los bebés son despreciados.

(35) Nadie que pueda dominar un cocodrilo es despreciado.
Los bebés son despreciados.
―――――――――――
Los bebés no pueden dominar cocodrilos.

Ejercicio 1.2

En las siguientes listas de enunciados, los tres primeros son las premisas de un sorites, y el cuarto la conclusión. El propósito del ejercicio es encontrar los dos silogismos de que consiste el sorites. Una vez construidos los silogismos, se debe indicar su modo y figura. Todos los ejemplos, con ligeras variaciones, son tomados de *Lógica simbólica* de Lewis Carroll (1977: 160-162).

1. Todos los oficiales bailan el vals.
   Ningún pato baila el vals.
   Todas mis aves son patos.
   Ninguna de mis aves es un oficial.

2. Todos los que leen el *Times* son educados.
   Ningún topo puede leer.
   Todos los que son educados pueden leer.
   Ningún topo lee el *Times*.

8. Lewis Carroll (1832-1898) fue profesor de matemáticas en Oxford. Su tratado de lógica fue escrito dentro de la tradición aristotélica y no constituye una contribución importante a la historia de la lógica moderna. Sin embargo, sus extraños silogismos, y los enigmas lógicos y filosóficos presentes en sus historias, han sido utilizados en la enseñanza de la lógica y la filosofía desde el siglo XIX.

Cap-1.pmd 18 20/06/07, 11:53 a.m.

3. Todos los picaflores son multicolores.
Ningún pájaro grande vive del néctar.
Todos los pájaros multicolores viven del néctar.
Ningún picaflor es grande.

4. Ninguna de las cosas rotas en esta repisa puede contener agua.
Todos los objetos antiguos en esta repisa están rotos.
Todos los jarros en esta repisa son objetos antiguos.
Ningún jarro en la repisa puede contener agua.

5. Todas las frutas saludables están maduras.
Todas estas manzanas son saludables.
Ninguna fruta que haya crecido en la sombra está madura.
Estas manzanas no crecieron en la sombra.

6. Las flores de colores siempre tienen aroma.
Todas las flores que me placen crecen al aire libre.
Todas las flores que crecen al aire libre tienen color.
Todas las flores que me placen tienen aroma.

1.7 Silogismos hipotéticos y disyuntivos

Además de los silogismos categóricos que hemos estudiado en las dos secciones anteriores, existen silogismos cuyas premisas contienen ***enunciados compuestos***, es decir, enunciados que contienen más de una afirmación o negación. En los capítulos siguientes nos ocuparemos en más detalle de este tipo de enunciados; aquí sólo los explicaré brevemente para mostrar cómo pueden ser utilizados en la construcción de silogismos no aristotélicos.

Existen varias formas de combinar enunciados para formar enunciados compuestos. La más sencilla de ellas es afirmar simultáneamente dos enunciados:

(36) Mariana toca el violín y Pedro toca el piano.

Este enunciado compuesto está constituido por la ***conjunción*** de dos enunciados: “Mariana toca el violín” y “Pedro toca el piano”. El enunciado compuesto afirma la verdad de los dos enunciados, y por ello la falsedad de uno de ellos entraña la falsedad de la conjunción. En términos generales, el valor de verdad de un enunciado compuesto siempre depende de los valores de verdad asignados a los enunciados que lo componen.

Existen otros enunciados compuestos en los que no se afirma la verdad de ninguno de los enunciados incluidos, como en el siguiente ejemplo:

Cap-1.pmd 19 20/06/07, 11:53 a.m.

(37) Mariana va al mercado los martes o los miércoles.

En este enunciado compuesto ninguno de los dos enunciados incluidos –"Mariana va al mercado los martes" y "Mariana va al mercado los miércoles"– es afirmado. Lo único que se afirma es la ***disyunción*** de los dos enunciados, es decir, se afirma que al menos uno de ellos debe ser verdadero, pero no se afirma cuál de ellos lo es. El enunciado será verdadero si sólo uno de los enunciados es falso o si ambos enunciados son verdaderos: desde un punto de vista lógico, la verdad de uno de los enunciados que forman una disyunción no excluye la verdad del otro.

De la misma manera, existen enunciados ***hipotéticos*** o ***condicionales*** en los que ninguno de los dos enunciados es afirmado, sino que más bien se establece una relación de dependencia lógica entre ellos. Consideremos el siguiente ejemplo:

(38) Si no pagas impuestos, no tienes derecho a quejarte por el estado de las calles.

El enunciado compuesto no implica que la persona a quien va dirigida la frase no pague sus impuestos, ni tampoco que haya perdido el derecho a quejarse. Lo único que se afirma es que existe una relación condicional entre los dos enunciados: si es cierto que la persona en cuestión no paga impuestos, entonces debe ser cierto que esa persona no tiene derecho a quejarse, y esta relación es verdadera incluso si los dos enunciados son de hecho falsos.

Finalmente, existen enunciados doblemente hipotéticos, o ***bicondicionales***, que son simplemente la conjunción de dos enunciados condicionales. Por ejemplo, el enunciado:

(39) Un número es par si y sólo si no es impar.

es la conjunción de los enunciados: "Si un número es par, no es impar" y "Si un número no es impar, es par". Ninguno de los dos enunciados condicionales afirma la verdad o falsedad de los enunciados que lo constituyen porque no estamos hablando de ningún número en particular. Pero el enunciado bicondicional sí afirma la verdad de los dos enunciados condicionales que lo constituyen. Por esa razón, los enunciados "un número es par" y "un número no es impar" deben ser ambos verdaderos o ambos falsos.

Los enunciados compuestos pueden servir de base para la construcción de ciertos tipos de silogismos deductivamente válidos. Cada tipo de silogismo deriva su nombre del tipo de enunciado en el que está basado. Los dos tipos más usados son el silogismo disyuntivo y el silogismo hipotético o condicional. Comencemos con el ***silogismo disyuntivo***. En el siguiente ejemplo, la primera premisa es una disyunción:

(40) O el canario se escapó o se lo comió el gato.
El canario no se escapó.
____
Se lo comió el gato.

Cap-1.pmd 20 20/06/07, 11:53 a.m.

La primera premisa afirma que al menos uno de los dos enunciados que componen la disyunción es verdadero. Como la segunda premisa afirma que el primero de estos enunciados es falso, nos vemos obligados a concluir que el segundo enunciado es verdadero. El siguiente silogismo, sin embargo, no es válido:

(41) O el canario se escapó o se lo comió el gato.
El canario se escapó.
―――――――――――――――
No se lo comió el gato.

El afirmar la verdad de uno de los dos enunciados que conforman la disyunción no nos permite afirmar absolutamente nada acerca del segundo enunciado. Es perfectamente posible que el canario haya escapado y el gato se lo haya comido en el jardín. Como vimos anteriormente, la verdad de uno de los enunciados que forman una disyunción no excluye la verdad del otro. Sin embargo, el siguiente ejemplo parece contradecir lo anteriormente dicho:

(42) Fernanda está en Cali o en Medellín.
Fernanda está en Cali.
―――――――――――――――
Fernanda no está en Medellín.

Aunque el silogismo parece ser válido, en realidad se trata de un argumento incompleto. La conclusión depende de la siguiente premisa, que se asume tácitamente: “Fernanda no puede estar tanto en Cali como en Medellín”. Este enunciado se puede expresar en forma disyuntiva como: “Fernanda no está en Cali o no está en Medellín”. Con esta nueva premisa, es posible construir el siguiente argumento:

(43) Fernanda no está en Cali o no está en Medellín.
Fernanda está en Cali.
―――――――――――――――
Fernanda no está en Medellín.

El silogismo **(43)** tiene la misma estructura del **(40)** y es deductivamente válido. La premisa “Fernanda está en Cali o en Medellín” no es necesaria para obtener la conclusión, pero si queremos preservar el sentido original del argumento, podemos construir el siguiente argumento[9]:

(44) Fernanda no está en Cali o no está en Medellín.
Fernanda está en Cali o en Medellín.
Fernanda está en Cali.
―――――――――――――――
Fernanda no está en Medellín.

9. Como el silogismo **(43)** es deductivamente válido, podemos agregarle cualquier premisa sin afectar su validez. Sin embargo, el argumento resultante no es un silogismo porque tiene más de dos premisas.

Cap-1.pmd 21 20/06/07, 11:53 a.m.

Un ***silogismo hipotético***, por otra parte, contiene al menos un enunciado hipotético o condicional, como en el siguiente ejemplo:

(45) Si Esteban pasa el examen médico, lo contratarán en el Barcelona.
Si lo contratan en el Barcelona, podrá comprarle una casa a su mamá.
Si Esteban pasa el examen médico, podrá comprarle una casa a su mamá.

En el anterior silogismo se combinan dos enunciados condicionales. También es posible combinar un enunciado condicional con un enunciado no condicional:

(46) Si sigue lloviendo, vamos a perder la cosecha de maíz.
No para de llover.
Vamos a perder la cosecha de maíz.

La primera premisa afirma que si la condición se cumple, la consecuencia se debe cumplir también. La segunda premisa nos confirma que la condición se cumplió, lo cual nos lleva a concluir que la consecuencia tiene que ser cierta.

El primer tipo de argumento es un ***silogismo hipotético puro***, mientras que el segundo, que contiene un enunciado condicional y uno no condicional, es un ***silogismo hipotético mixto***. Cuando un silogismo hipotético mixto tiene la forma del argumento **(46)**, se dice que está en ***modus ponens*** (la palabra *ponens* viene del latín *ponere*, que significa afirmar). Es importante no confundir un argumento en *modus ponens* con un argumento como el siguiente:

(47) Si el examen estaba difícil, la mitad de la clase lo perdió.
La mitad de la clase perdió el examen.
El examen estaba difícil.

Este argumento es una falacia conocida como "afirmar el consecuente". El hecho de que se cumpla la consecuencia que hace parte del enunciado condicional no implica que la condición también se haya cumplido. La mitad de la clase pudo haber perdido el examen simplemente por no haber estudiado.

Otra forma válida del silogismo hipotético mixto es aquél que está en ***modus tollens*** (la palabra latina *tollens* significa negar). Veamos el siguiente ejemplo:

(48) Si la sustancia contiene sulfuro, la llama de un mechero Bunsen se tornará amarilla al entrar en contacto con ella.
La llama del mechero no se tornó amarilla al entrar en contacto con la sustancia.
La sustancia no contiene sulfuro.

En este caso, la segunda premisa niega que la consecuencia se haya cumplido, por lo que es imposible que la condición sea cierta. Este tipo de argumentos constituyen la

Cap-1.pmd 22 20/06/07, 11:53 a.m.

base del método hipotético-deductivo que de una u otra forma es utilizado en las ciencias sociales y naturales para examinar la verdad de una hipótesis.

1.8 Premisas no afirmativas

Una pregunta o una orden no es un enunciado porque no afirma absolutamente nada. Sin embargo, hay ocasiones en que una oración no declarativa puede ser considerada una premisa de un argumento. Esto ocurre cuando, por ejemplo, una pregunta es retórica. Consideremos el siguiente pasaje:

(49) Es falso asumir que las personas que dependen de la asistencia social están contentas con su situación. ¿A quién le gusta ser pobre y desempleado? ¿A quién le gusta ser considerado un parásito de la sociedad?

Aquí el autor asume que la respuesta a las dos preguntas es obvia: ninguna persona quiere ser pobre, desempleada y considerada un parásito de la sociedad. Esas afirmaciones deben ser tomadas como las premisas a partir de las cuales el autor quiere construir su argumento. El siguiente pasaje de un diálogo de Platón ejemplifica el mismo punto:

(50) Si no hay nadie que desee ser miserable, no hay nadie, Menón, que desee el mal. Porque, ¿qué es la miseria sino el deseo y la posesión del mal?

Platón, *Menón* 78a

El uso de preguntas retóricas en un argumento puede arrojar un manto de sospecha sobre la conclusión. No es infrecuente que el autor intente eludir la responsabilidad de defender una afirmación, y se ampare bajo la supuesta obviedad de la respuesta a la pregunta retórica.

Otra forma muy frecuente de afirmaciones enmascaradas son las conclusiones expresadas a través de imperativos. Después de exponer una serie de razones, el autor nos puede sugerir u ordenar la conclusión que se sigue de las premisas. Un enunciado como: “Ni prestes ni pidas prestado” es una orden que puede ser transformada fácilmente en una afirmación: “No se debe prestar ni pedir prestado”.

1.9 Entimemas

En la vida diaria frecuentemente utilizamos argumentos cuyas premisas o conclusión no se afirman explícitamente. Al exponer un argumento, siempre asumimos que nuestra audiencia comparte con nosotros una gran cantidad de información, y si no dejáramos sobreentendidas algunas de las partes de los argumentos que utilizamos, la comunicación se convertiría en un proceso muy engorroso.

Cap-1.pmd 23 20/06/07, 11:53 a.m.

Un ***entimema*** es un argumento en el cual una o más de sus partes no se hace explícita. El análisis de un entimema depende en gran medida del contexto en el que aparece y de la información de la que disponga el lector. Consideremos el siguiente ejemplo. Un fiscal está tratando de convencer al juez de la culpabilidad del acusado y dice los siguiente:

(51) Solamente una persona que supiera la combinación de la caja fuerte pudo haber cometido el robo, y solamente el señor Martínez conocía la combinación.

El argumento **(51)** es un entimema porque hace falta la conclusión del argumento. El juez debe concluir por sí mismo que el señor Martínez es el autor del robo aunque el fiscal no lo diga explícitamente. En el siguiente ejemplo, el argumento es un entimema porque hacen falta varias premisas y la conclusión:

(52) La construcción de esos edificios destruirá el carácter rural de nuestro pueblo. Hay estudios que demuestran que una densidad poblacional tan alta aumenta la tasa de criminalidad. Además, no tenemos la infraestructura para cubrir las necesidades de una población tan grande.

En este argumento hace falta la conclusión que naturalmente se desprende de estos enunciados: "No debemos permitir la construcción de esos edificios en nuestro pueblo". Pero esta conclusión no se sigue *lógicamente* de los enunciados en el argumento original. Debemos agregar, además, las siguientes premisas: "Cualquier cosa que destruya el carácter rural de nuestro pueblo no debe ser permitida", "Cualquier cosa que aumente la tasa de criminalidad no debe ser permitida" y "Si no tenemos la infraestructura para cubrir las necesidades de una población tan grande, no se debe permitir la construcción de esos edificios".

No se trata, sin embargo, de añadir todo aquello que el autor esté asumiendo en el momento de formular el argumento. Sin duda, el autor asume muchas cosas diferentes; por ejemplo, que el lector entiende español. Pero la mayoría de las cosas que el autor asume no hacen parte del argumento como tal. El análisis de un entimema debe estar guiado por el ***Principio de Caridad***: *al completar el argumento debemos propender para que sea el mejor argumento posible*. En particular, el principio de caridad requiere (i) la identificación de la(s) premisa(s) necesaria(s) para que el argumento sea deductivamente válido, o al menos inductivamente fuerte; o (ii) la identificación de la conclusión que se sigue deductiva o inductivamente de las premisas dadas. Los siguientes pasajes son ejemplos de entimemas.

(53) Todos los estudiantes se oponen al nuevo reglamento, por lo tanto los primíparos se oponen.

(54) Marcos nació en Argentina y cualquier persona que haya nacido en Argentina tiene derecho a la nacionalidad argentina.

Cap-1.pmd 24 20/06/07, 11:53 a.m.

(55) El alma es inmortal en todo su ser, pues aquello que está siempre en movimiento es inmortal.

Platón, *Fedro* 245c

Las premisas o la conclusión que hacen falta en cada caso son las siguientes:

(53)	Premisa:	Todos los primíparos son estudiantes.
(54)	Conclusión:	Marcos tiene derecho a la nacionalidad argentina.
(55)	Premisa:	El alma está siempre en movimiento.

El uso de entimemas no se debe solamente a que las personas generalmente eviten afirmar lo que es obvio para todos. También tienen un valor retórico, como Aristóteles mismo lo afirma: “los [discursos] basados en entimemas generan los mayores aplausos” (*Retórica,* 1356b).

Ejercicio 1.3

Los siguientes pasajes contienen argumentos incompletos, o entimemas. Identifique las premisas y la conclusión, y encuentre la premisa que hace falta para que el argumento sea deductivamente válido.

Ejemplo: La planta necesita agua. Se le están marchitando las hojas.

Cuando se marchitan las hojas de una planta, ésta necesita agua.
Las hojas de la planta se están marchitando.
———————————————
La planta necesita agua.

1. Fabio tiene buenos modales. Tuvo una buena educación.
2. Lucía es brillante, así que sacará buena nota.
3. Debió llover anoche porque hay charcos por todas partes.
4. O el perro tiene pulgas o tiene la piel muy seca. Se está rascando como loco.
5. Les sobró mucha comida, así que la fiesta no debió ser muy exitosa.
6. Creo que podemos concluir que la batería todavía está buena. La luz todavía es brillante.
7. Jaramillo fue un buen senador, así que va a ser un buen presidente.
8. Hilary Putnam es uno de los mejores filósofos del mundo. Su trabajo es publicado por la editorial de la Universidad de Harvard.
9. Los precios en el nuevo almacén de la esquina van a ser altos. Venden sólo productos importados.
10. Tenía el promedio en 3.0, pero la nota del curso me tiene que quedar por lo menos en 4.0 porque saqué 5.0 en el final.

Cap-1.pmd 25 20/06/07, 11:53 a.m.

11. Es un buen guitarrista. ¿Sabías que estudió con Pepe Romero?
12. Ruddy no tiene la menor posibilidad de ser elegido alcalde. Todo el mundo sabe que es un déspota.
13. La mitad de los que se sientan en la primera fila creen en Dios, así que la mitad de la clase debe creer en Dios.
14. ¿No sabías que Mauricio se casa? ¿Acaso no lo viste quemando todas las cartas de sus ex novias?
15. "Si no creyéramos en su inocencia no le estaríamos devolviendo su empleo", declaró el Procurador.

1.10 Consistencia lógica de un conjunto

Existe otra forma de examinar varios enunciados al mismo tiempo sin que exista entre ellos ninguna de las relaciones lógicas mencionadas hasta ahora en este capítulo. Se trata de examinar si los enunciados forman un conjunto lógicamente consistente. La consistencia lógica se puede definir de la siguiente manera:

> Un conjunto de enunciados es ***lógicamente consistente*** si y sólo si es posible que todos los miembros del conjunto sean verdaderos. Es ***lógicamente inconsistente*** si esto es imposible.

Consideremos el siguiente conjunto de afirmaciones:

(56) {México es más grande que España, Béla Bartók nació en el siglo XIX, El precio del arroz se ve afectado por el fenómeno de El Niño}

Este conjunto es lógicamente consistente porque es posible que los tres enunciados sean verdaderos al mismo tiempo. En cambio, consideremos el siguiente conjunto de afirmaciones:

(57) {Daniel es más alto que Alberto, Carlos es más alto que Daniel, Beatriz es más alta que Carlos, Alberto es más alto que Beatriz}

El conjunto es lógicamente inconsistente porque es imposible que los cuatro enunciados sean ciertos. Para que las relaciones de altura pudieran cumplirse, tendríamos que eliminar alguno de los cuatro enunciados. Veamos otro ejemplo:

(58) {Cualquier persona que crea en la astrología es un tonto, Alicia es mi hermana y ninguna de mis hermanas tiene un marido que sea tonto, Hernando es el marido de Alicia y él lee el horóscopo todas las mañanas, Cualquier persona que lea el horóscopo todas las mañanas cree en la astrología}

Cap-1.pmd 26 20/06/07, 11:53 a.m.

Varias de las afirmaciones contenidas en este conjunto pueden ser consideradas falsas por muchas personas. Pero lo importante, desde el punto de vista lógico, no es evaluar su verdad individualmente, sino más bien considerar si es posible que todas ellas sean ciertas simultáneamente. En este caso, si la primera, la tercera y la última afirmación son ciertas, entonces la segunda tiene que ser falsa. Y si la segunda es verdadera, entonces la tercera o la cuarta o la primera tiene que ser falsa. La lógica no nos puede decir cuál es la forma correcta de modificar el conjunto para volverlo consistente. Tan solo nos muestra cuáles son las posibilidades.

1.11 Verdad, falsedad y equivalencia lógica

Aunque normalmente la verdad o falsedad de un enunciado sólo se puede determinar de manera empírica, hay algunos casos en que la lógica por sí sola basta para determinar su valor de verdad. Por ejemplo, la afirmación:

(59) A Julia la contratarán en la Contraloría o no la contratarán.

es verdadera en virtud de su forma lógica; su valor de verdad es independiente de la decisión que tome el Contralor. Ni siquiera es necesario que Julia haya solicitado empleo en la Contraloría. Otros ejemplos incluyen enunciados tales como: "Si a Julia la contratan, entonces la contratan", "Si todos pasan, entonces Paula pasa" y "Si Sara le apuesta al boxeador panameño si y sólo si Ana lo hace, entonces si Ana no hace la apuesta, Sara tampoco". Enunciados como éstos se denominan ***verdades lógicas*** o ***tautologías***.

Así como hay enunciados que son verdaderos en virtud de su forma lógica, hay otros que son falsos por la misma razón. Por ejemplo, el enunciado:

(60) Todos los filósofos fuman pero en Estados Unidos casi ninguno lo hace.

es siempre falsa sin importar si los enunciados constituyentes lo son. Otros ejemplos incluyen enunciados como "Hoy llueve pero no llueve" y "Aquí estoy pero no hay nadie aquí". Estos enunciados se denominan ***falsedades lógicas*** o ***contradicciones***.

Aquellos enunciados que no son ni lógicamente verdaderos ni lógicamente falsos se denominan enunciados ***lógicamente indeterminados***. La mayoría de las afirmaciones acerca del mundo son lógicamente indeterminadas. Por ejemplo:

(61) Hace calor hoy.

(62) Michael Schumacher no ganó el campeonato de la Fórmula 1 este año.

Finalmente, hay pares de enunciados que están relacionados entre sí de tal modo que si el primero es verdadero o falso, el segundo también lo es, y viceversa. En tales casos decimos que los dos enunciados son ***lógicamente equivalentes***. Los siguientes son ejemplos de tales pares de enunciados:

(63) Romeo ama a Julieta.
Julieta es amada por Romeo.

(64) Romeo y Julieta mueren al final de la historia
Julieta y Romeo mueren al final de la historia.

(65) No todos los tumores son cancerosos.
Algunos tumores no son cancerosos.

Podemos resumir las definiciones de estos conceptos en el siguiente cuadro:

Un enunciado es ***lógicamente verdadero*** o ***tautológico*** si y sólo si es imposible que sea falso.

Un enunciado es ***lógicamente falso*** o ***contradictorio*** si y sólo si es imposible que sea verdadero.

Un enunciado es ***lógicamente indeterminado*** si y sólo si no es ni lógicamente verdadero ni lógicamente falso.

Un par de enunciados son ***lógicamente equivalentes*** si y sólo si es imposible que uno de las enunciados sea verdadero y el otro falso.

Es importante anotar que todo enunciado es lógicamente equivalente a sí mismo, que todos los enunciados lógicamente verdaderos son lógicamente equivalentes, al igual que todos los lógicamente falsos. Esto no ocurre, por supuesto, en el caso de los enunciados lógicamente indeterminados, así éstos posean de hecho el mismo valor de verdad. Los enunciados:

(66) Aruba está al norte de Venezuela.
En la China el consumo de perros es legal.

no son lógicamente equivalentes así ambos sean de hecho ciertos. Lo importante no es el valor de verdad de los enunciados en cuestión, sino más bien si ese valor de verdad debe ser necesariamente el mismo.

Cap-1.pmd 28 20/06/07, 11:53 a.m.

PRIMERA PARTE
LA LÓGICA PROPOSICIONAL

2. Introducción a la lógica proposicional

Algunas disciplinas, como la música y las matemáticas, han recurrido a lenguajes artificiales para simplificar la expresión de ideas complejas. A diferencia de los lenguajes naturales, como el español o el quechua, que sirven como herramientas generales de comunicación, los lenguajes artificiales son diseñados con un propósito específico y nos permiten expresar ideas en términos precisos, carentes de ambigüedades y de contenido emotivo.

En este capítulo estudiaremos un lenguaje artificial llamado *LP* (*Lógica Proposicional*) que ha sido concebido para sacar a la luz la estructura lógica de las afirmaciones y razonamientos que hacemos utilizando los lenguajes naturales. Inicialmente examinaremos cuál es la relación entre los enunciados del español y las fórmulas del lenguaje *LP*. Al mismo tiempo, estudiaremos cómo se determina el valor de verdad de las fórmulas de este lenguaje lógico. El objetivo es entender qué quiere decir que *LP* sea un lenguaje ***veritativo-funcional***. Finalmente, en la última sección estableceremos las reglas gramaticales o la sintaxis de este lenguaje formal.

2.1 Letras proposicionales de *LP*

Comenzaremos el estudio de la relación entre los enunciados del español y las fórmulas de *LP* estableciendo una distinción entre ***enunciados simples*** y ***enunciados compuestos***. Un enunciado simple es una oración declarativa cuyo sujeto es una persona, animal o cosa individual y concreta de la cual se predica un solo atributo o propiedad. Los enunciados simples pueden ser combinados de múltiples maneras para formar enunciados compuestos. En español existen muchas palabras y frases que sirven para combinar enunciados, tales como "y", "o", "sólo si", "antes de", "a causa de", "si y sólo si" y muchas otras. No todas estas palabras y frases establecen una relación *lógica* entre los enunciados. Algunas palabras establecen relaciones temporales, causales y de otros tipos. Aquellas palabras y frases que establecen una conexión lógica entre dos enunciados se denominan ***conectores lógicos***. Hay otras palabras y frases que no conectan dos enunciados sino que se anteponen a uno solo de ellos. Al añadir expresiones como "no", "no es el caso que" o "no es cierto que" a un enunciado, se genera un enunciado nuevo con un valor de verdad opuesto al del enunciado original. Tales frases se denominan ***operadores de negación***.

Los conectores lógicos y los operadores de negación son los ***operadores lógicos*** de la lógica clásica proposicional. Podemos definir un enunciado simple de manera negativa como aquél que no contiene ningún operador lógico. El siguiente enunciado es un enunciado simple:

(1) Lucien Freud es un pintor.

Pero ninguno de los siguientes enunciados lo es:

(2) Freud y Bacon son pintores.
(3) Freud es un pintor y escritor.
(4) Freud no es austriaco.
(5) Si Freud es un pintor, no es muy conocido.

El enunciado **(2)** es la unión de los enunciados simples "Freud es un pintor" y "Bacon es un pintor". En el **(3)** tenemos la unión de "Freud es un pintor" y "Freud es un escritor". El **(4)** es la negación del enunciado simple "Freud es austriaco". Y en el **(5)** se establece una relación lógica entre "Freud es pintor" y la negación de "Freud es muy conocido".

Nuestro objetivo inicial al estudiar el lenguaje *LP* es entender cómo los enunciados simples y compuestos del español pueden ser representados en *LP* a través de ***fórmulas atómicas*** y ***fórmulas moleculares***, respectivamente. En *LP* utilizaremos letras mayúsculas para simbolizar los enunciados simples. A estas letras las llamaremos ***letras proposicionales***. Las letras proposicionales son las fórmulas atómicas de *LP*.

El enunciado "Lucien Freud es un pintor" puede ser simbolizado en *LP* con la letra "F". Hubiéramos podido escoger cualquier otra letra mayúscula, pero lo más conveniente es escoger siempre una letra que nos recuerde el enunciado original. Así, la letra "F" nos ayuda a recordar que el enunciado es acerca de Lucien Freud, aunque no debemos caer en el error de pensar que "F" sólo simboliza el sujeto o el predicado del enunciado. Cada letra proposicional corresponde a un enunciado simple completo.

Para asegurarnos de tener un número suficiente de letras para simbolizar cualquier cantidad de enunciados, también admitiremos letras mayúsculas con subíndices. Así, todas las siguientes fórmulas atómicas o letras proposicionales pueden ser usadas para simbolizar enunciados simples:

$$\mathrm{F, J, T, A_{23}, Y_9, F_{5935}}$$

Cap-2.pmd 32 20/06/07, 11:54 a.m.

En ciertos casos tendremos que referirnos a las fórmulas del lenguaje *LP* en general, sin mencionar ninguna en particular. Para ese fin introduciremos el uso de variables proposicionales, o metavariables[1], que escribiremos en letra cursiva de la siguiente manera:

$$\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{S}, ...$$

Una metavariable puede ser utilizada para hacer referencia a fórmulas atómicas y a fórmulas moleculares de *LP*.

2.2 Conjunción

Podríamos ajustar el lenguaje *LP* para que un enunciado como:

(6) Tolstoi y Kandinsky son rusos.

pudiera ser simbolizado utilizando una sola letra proposicional. Sin embargo, al hacerlo estaríamos ignorando información importante. En realidad se trata de dos enunciados simples, “Tolstoi es ruso” y “Kandinsky es ruso”, que son afirmados simultáneamente. La afirmación simultánea de dos enunciados es la ***conjunción*** de los mismos. Utilizaremos el signo “&” para simbolizar la conjunción de dos enunciados en *LP*. Así, si “T” representa al enunciado “Tolstoi es ruso” y “K” al enunciado “Kandinsky es ruso”, el enunciado **(6)** se podría simbolizar como:

(6a) T & K

Además de la palabra “y”, hay otras palabras y frases en español que nos indican que un enunciado compuesto es una conjunción. Entre ellas están: “pero”, “sin embargo”, “aunque”, “aún más”, “no sólo”, “a pesar de” y “también”. La mayoría de estas expresiones se usan para crear un contraste entre dos enunciados. Por ejemplo, el enunciado:

(7) Juan quiere viajar a Río de Janeiro pero está muy ocupado.

nos da a entender que Juan no va a poder cumplir su deseo de viajar a Río. Sin embargo, estrictamente hablando lo único que dice la oración es que Juan quiere viajar a Río y que Juan está muy ocupado, conjunción que podríamos simbolizar como:

1. Cuando utilizamos un lenguaje para estudiar otro lenguaje, decimos que el primero es el ***metalenguaje*** y el segundo el ***lenguaje objeto***. Si un mexicano toma clases de japonés, el japonés es el lenguaje objeto y el español el metalenguaje. En el caso de la lógica en general, y del lenguaje *LP* en particular, el metalenguaje que utilizamos es el español y las metavariables utilizadas para hacer referencia a las fórmulas de *LP* hacen parte de ese metalenguaje.

Cap-2.pmd 33 20/06/07, 11:54 a.m.

(7a) R & O

Las connotaciones que tiene la palabra "pero" se pierden en la traducción a *LP*.

¿Cómo se determina el valor de verdad de una conjunción? Al considerar esta pregunta debemos tener en cuenta dos elementos. En primer lugar, la lógica proposicional clásica es un lenguaje ***veritativo-funcional***. Un lenguaje es veritativo-funcional cuando el valor de verdad de cualquier enunciado compuesto está completamente determinado por los valores de verdad asignados a los enunciados simples que lo componen. El lenguaje *LP* es una simbolización de los enunciados del español y refleja sus propiedades veritativo-funcionales. En segundo lugar, la lógica proposicional clásica es una ***lógica bivalente***, es decir, a cada enunciado en español y a cada fórmula de *LP* sólo se le puede asignar uno de dos valores de verdad: verdadero o falso[2].

Como una conjunción es la afirmación simultánea de dos enunciados, una conjunción es verdadera si y sólo si los dos enunciados que la componen son verdaderos, y falsa en caso contrario. En consecuencia, una fórmula cuya forma lógica sea:

$$\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q}$$

donde $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son fórmulas arbitrarias de *LP*, es verdadera si y sólo si las fórmulas son verdaderas, y falsa en caso contrario Esta idea se resume en la siguiente tabla:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Este tipo de tabla se denomina una ***tabla de verdad característica*** porque muestra cómo se determina el valor de verdad de las conjunciones de *LP*. La tabla se lee horizontalmente, fila por fila. Cada fila representa una ***interpretación*** o ***valuación*** de cualquier fórmula que tenga la forma $\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$:

> Una ***valuación*** de una fórmula de *LP* es la asignación de un valor de verdad **V** o **F** a cada una de las letras proposicionales que ocurran en la fórmula.

2. Es necesario advertir que durante el siglo XX se desarrollaron muchas lógicas polivalentes en respuesta a las aparentes limitaciones de la lógica clásica. Estos sistemas no serán estudiados en este libro. Los lectores interesados en las lógicas no clásicas pueden consultar Haack (1982), Nolt (1997), Peña (1993) y Priest (2001), entre otros.

Cap-2.pmd 34 20/06/07, 11:54 a.m.

La tabla reúne todas las posibles asignaciones de valor de verdad de las fórmulas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$. La columna de la derecha nos indica cuál es el valor de verdad de la fórmula $\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$ en cada caso. Por ejemplo, la tercera fila nos indica que cuando $\mathcal{P}$ es falsa y $\mathcal{Q}$ es verdadera, cualquier fórmula de la forma $\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$ es falsa.

2.3 Disyunción

El segundo conector lógico que estudiaremos es aquél que genera la ***disyunción*** de dos enunciados. Este conector generalmente se expresa en español por medio de la palabra "o". Consideremos el siguiente ejemplo:

(8) Cervantes era escritor o pintor.

El enunciado está compuesto por dos enunciados simples, "Cervantes era escritor" y "Cervantes era pintor". En *LP* utilizaremos el símbolo "∨" para representar el conector lógico que genera la disyunción de dos enunciados. Así, si "E" representa el enunciado "Cervantes era escritor" y "P" a "Cervantes era pintor", el enunciado **(8)** se podría simbolizar en *LP* como:

(8a) $E \vee P$

Una disyunción es verdadera si y sólo si al menos uno de los dos enunciados que la componen es verdadero, y falsa en caso contrario. La siguiente tabla de verdad resume las condiciones de verdad de la disyunción en *LP*:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Según las condiciones de verdad de la disyunción, el enunciado **(8)** es verdadero si Cervantes era tanto escritor como pintor, una consecuencia que riñe con la forma en que normalmente utilizamos la palabra "o" en español. Suponga que el mesero de un restaurante le dice lo siguiente:

(9) La cena incluye *crème brûlée* o pastel de manzana.

El ofrecimiento implícitamente excluye la posibilidad de ordenar los dos postres, es decir, en español la disyunción tiene un sentido *exclusivo*. En la lógica clásica, por el contrario, la disyunción siempre tiene un sentido *inclusivo*. Según la tabla de verdad característica de la disyunción, es posible ordenar los dos postres. Más adelante veremos cómo expresar el sentido exclusivo de la disyunción utilizando una combinación de conectores lógicos, y discutiremos por qué la lógica clásica prefiere el sentido inclusivo de la disyunción.

2.4 Puntuación

Cuando un enunciado compuesto contiene más de dos enunciados simples, es importante entender cabalmente la forma en que dichos enunciados están conectados. Suponga que el menú en un restaurante dice:

(10) El almuerzo incluye ensalada o papas a la francesa y postre.

La ausencia de comas genera un enunciado ambiguo. En este caso tenemos tres enunciados diferentes que podríamos simbolizar de la siguiente manera:

E: El almuerzo incluye ensalada.
P: El almuerzo incluye papas a la francesa.
T: El almuerzo incluye postre.

La ambigüedad se presenta porque no sabemos si el enunciado es una disyunción o una conjunción. En el primer caso, podríamos parafrasear el enunciado como:

(11) El almuerzo incluye ensalada, o incluye papas a la francesa y postre.

Si se trata de una conjunción, la paráfrasis sería:

(12) El almuerzo incluye ensalada o papas a la francesa, y además postre.

La diferencia entre los dos enunciados se debe ver reflejada al representarlos en *LP*; para tal fin, introduciremos el uso de paréntesis. Así, la disyunción se simboliza como:

(11a) $E \vee (P \& T)$

Y la conjunción se simboliza como:

(12a) $(E \vee P) \& T$

La disyunción sería verdadera si, por ejemplo, el almuerzo es servido únicamente con ensalada, mientras que la conjunción requiere que si el comensal escoge la ensalada, ésta sea servida con postre.

Cuando se requiera utilizar más de un par de paréntesis, combinaremos su uso con el de paréntesis cuadrados. Así, si el enunciado original fuera:

(13) El almuerzo incluye ensalada o papas a la francesa y postre; y en cualquier caso incluye un café.

las dos posibles opciones serían:

(14) $[E \vee (P \,\&\, T)] \,\&\, C$

(15) $[(E \vee P) \,\&\, T] \,\&\, C$

donde "C" representa al enunciado: "El almuerzo incluye un café". En la sección final del capítulo, donde estudiaremos la sintaxis formal del lenguaje *LP*, se establecerán las bases para el uso correcto de los paréntesis.

2.5 Negación

Hay ciertas frases, palabras y partículas en español que, al ser añadidas a un enunciado o a partes de un enunciado, generan un enunciado compuesto cuyo valor de verdad es el opuesto al del enunciado original. Estas frases, palabras y partículas se denominan ***operadores de negación***, y generan la ***negación*** del enunciado original. En los siguientes pares de enunciados, el segundo es la negación del primero. El operador de negación ha sido subrayado:

(16) Shanghai es la capital de China.
<u>No es cierto que</u> Shanghai sea la capital de China.

(17) El perro de Ramona es negro.
El perro de Ramona <u>no</u> es negro.

(18) Isabel estaba presente la noche del asesinato.
<u>No es el caso que</u> Isabel estuviera presente la noche del asesinato.

A veces el predicado de un enunciado contiene prefijos como "in-" o "des-", que nos indican que se trata de la negación de un enunciado simple. Por ejemplo, el enunciado:

(19) Heidegger era <u>in</u>tolerante.

es la negación de:

(20) Heidegger era tolerante.

Cap-2.pmd 37 20/06/07, 11:54 a.m.

En *LP* utilizaremos el símbolo "~" para representar los operadores de negación del español. Así, si "H" simboliza el enunciado "Heidegger era tolerante", el enunciado **(19)** se simbolizaría como:

(19a) ~H

Una negación es verdadera si y sólo si el enunciado negado es falso, y falsa en caso contrario. La siguiente es la tabla de verdad característica de la negación en *LP*:

$\mathcal{P}$	$\sim\mathcal{P}$
V	F
F	V

Aunque $\sim\mathcal{P}$ es la negación de $\mathcal{P}$, la negación de $\sim\mathcal{P}$ no es $\mathcal{P}$ sino $\sim\sim\mathcal{P}$. La negación de una fórmula sólo se puede generar añadiendo, y no removiendo, el símbolo "~".

2.6 Combinación de conectores lógicos

Los conectores lógicos "&", "$\vee$" y el operador "~" pueden ser combinados para generar fórmulas más complejas. Por ejemplo, el enunciado:

(21) Ni José ni Roberto va a clasificar.

puede ser simbolizado de la siguiente manera. Si "J" representa el enunciado: "José va a clasificar" y "R" es "Roberto va a clasificar", la negación conjunta de los dos enunciados se puede representar como:

(21a) ~J & ~R

El enunciado también se puede representar como:

(21b) ~(J $\vee$ R)

Esta fórmula *niega* la fórmula que afirma que al menos uno de los dos va a clasificar, lo cual es equivalente a *afirmar* que ninguno de los dos va a clasificar. Consideremos ahora el siguiente enunciado:

(22) No es cierto que José y Roberto vayan a clasificar.

El enunciado se puede entender de dos maneras diferentes: por una parte, se *niega* que los dos vayan a clasificar, pero no se excluye la posibilidad de que uno de ellos lo haga; por otra, se *afirma* que al menos uno de los dos no va a clasificar. En consecuencia, el enunciado se puede simbolizar de dos maneras diferentes:

(22a) ~(J & R)

(22b) ~J ∨ ~R

En el capítulo siguiente probaremos formalmente que las fórmulas **(21a)** y **(21b)** tienen las mismas condiciones de verdad. Lo mismo sucede con las fórmulas **(22a)** y **(22b)**. Es muy importante tener en cuenta que "~(J & R)" **no** es equivalente a "~J & ~R", y que "~(J ∨ R)" **no** es equivalente a "~J ∨ ~R".

La siguiente tabla de verdad resume las condiciones de verdad para afirmaciones del tipo "Ni $\mathcal{P}$ ni $\mathcal{Q}$":

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	~$\mathcal{P}$ & ~$\mathcal{Q}$	~($\mathcal{P}$ ∨ $\mathcal{Q}$)
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	V

Y la siguiente tabla de verdad resume las condiciones de verdad para afirmaciones del tipo "No es el caso que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$":

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	~$\mathcal{P}$ ∨ ~$\mathcal{Q}$	~($\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$)
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	V

Utilizando una combinación de operadores lógicos también es posible representar el sentido *exclusivo* de la disyunción, el cual corresponde a la forma en que es usada normalmente. Como vimos en la sección 2.3, el siguiente ejemplo representa el uso típico de la disyunción en español:

(9) La cena incluye *crème brûlée* o pastel de manzana.

Si "C" simboliza el enunciado "La cena incluye *crème brûlée*" y "M" al enunciado "La cena incluye un pastel de manzana", el enunciado **(9)** puede ser simbolizado como la conjunción de dos fórmulas:

(9a) (C ∨ M) & ~(C & M)

El primer componente de la conjunción nos asegura que la cena incluye al menos uno de los dos postres. El segundo componente excluye la posibilidad de que la cena incluya los dos postres. La siguiente es la tabla de verdad característica de la disyunción exclusiva:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ & $\sim(\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q})$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A diferencia de la tabla de verdad característica de la disyunción inclusiva, en esta tabla la fórmula molecular es falsa cuando tanto $\mathcal{P}$ como $\mathcal{Q}$ son verdaderas.

Al combinar los operadores lógicos, es importante tener en cuenta que la conjunción y la disyunción (lo mismo que el condicional y el bicondicional que estudiaremos más adelante) sólo pueden conectar pares de fórmulas. En el ejemplo anterior sería un error simbolizar el enunciado **(9)** como:

(9b) C ∨ M & ~(C & M)

Por otra parte, para que el signo de negación niegue una fórmula compuesta, la negación debe ir en frente del paréntesis. Si escribiéramos la fórmula "~(C & M)" en **(9a)** sin el paréntesis, el signo de negación sólo negaría a "C" y le cambiaría completamente el sentido a la fórmula.

Ejercicio 2.1

A. Simbolice cada uno de los siguientes enunciados en el lenguaje *LP*. Use las siguientes letras proposicionales para simbolizar los enunciados:

A: Adriana juega tenis todos los días.
C: Carolina juega tenis todos los días.
L: Luis juega tenis todos los días.

1. Luis y Carolina juegan tenis todos los días.
2. Adriana juega tenis todos los días, al igual que Carolina.
3. Ni Luis ni Carolina juega tenis todos los días.
4. Luis no juega tenis todos los días pero Carolina sí.
5. Luis o Carolina juega tenis todos los días.
6. Luis juega tenis todos los días; sin embargo, Adriana no lo hace.
7. Luis no juega tenis todos los días aunque Carolina sí lo hace.
8. Adriana, Luis y Carolina no juegan tenis todos los días.
9. No es el caso que Carolina o Luis juegue tenis todos los días; aún más, Adriana tampoco juega tenis todos los días.
10. Aunque Carolina no juega tenis todos los días, Adriana o Luis lo hace.

11. O bien Luis juega tenis todos los días, o Adriana juega tenis todos los días, pero no es cierto que los dos jueguen tenis todos los días.
12. Adriana, Luis o Carolina no juega tenis todos los días.
13. O Adriana juega tenis todos los días o no lo hace.
14. Ni Adriana ni Carolina ni Luis juega tenis todos los días.
15. No es el caso que Carolina no juegue tenis todos los días.

B. Usando los enunciados simples del ejercicio anterior, construya oraciones gramaticalmente correctas en español a partir de las siguientes fórmulas de *LP*.

1. A & L
2. A ∨ ~A
3. A ∨ C
4. ~(A ∨ C)
5. ~A & ~C
6. ~~L
7. L & (A ∨ C)
8. (A ∨ C) & L
9. ~A ∨ (~L ∨ ~C)
10. (L ∨ C) ∨ ~(L ∨ C)

2.7 Condicional material

Una de las relaciones lógicas más comunes en español es la relación condicional entre dos enunciados. Un enunciado condicional generalmente tiene la forma: "si $\mathcal{P}$, entonces $\mathcal{Q}$". El enunciado que establece la condición se denomina el ***antecedente***, y aquél cuyo valor de verdad está condicionado, el ***consecuente***. Pero no todas las oraciones formuladas en estos términos expresan una relación *lógica* entre dos enunciados. En ocasiones utilizamos las palabras "si" y "entonces" para expresar una relación *causal*, como en el siguiente ejemplo:

(23) Si arrojas un huevo desde el décimo piso, entonces el huevo se rompe.

En otras ocasiones, utilizamos la forma "si $\mathcal{P}$, entonces $\mathcal{Q}$" en un enunciado subjuntivo para expresar una relación *contrafáctica*, es decir, una relación entre posibles estados de cosas que de hecho no ocurrieron:

(24) Si hubieras cerrado el grifo, entonces la casa no se habría inundado.

El problema con estos dos enunciados condicionales es que ninguno de ellos puede ser analizado en términos veritativo-funcionales: el valor de verdad del enun-

Cap-2.pmd 41 20/06/07, 11:54 a.m.

ciado condicional no depende única y exclusivamente del valor de verdad de los enunciados que lo componen. Consideremos un enunciado condicional que aparentemente establece un nexo causal:

(25) Si Pedro toma píldoras anticonceptivas, no quedará embarazado.

Supongamos que Pedro toma píldoras anticonceptivas, y supongamos que Pedro, al igual que todos los varones, no queda embarazado. ¿Diríamos que el enunciado **(25)** es verdadero? Por supuesto que no. El hecho de que Pedro no quede embarazado no tiene relación alguna con su ingestión de píldoras anticonceptivas. Ahora, si comparamos el enunciado **(25)** con el **(23)** vemos que en ambos casos se trata de enunciados en los cuales tanto el antecedente como el consecuente son verdaderos. Por lo tanto, la verdad o falsedad de un enunciado causal no depende sólo del valor de verdad de los enunciados que lo componen.

Lo mismo sucede en el caso de los enunciados contrafácticos. Consideremos el siguiente par de enunciados:

(26) Si Brasil no hubiera ganado la final del Mundial de Fútbol de 2002, Alemania habría ganado.

(27) Si Brasil no hubiera ganado la final del Mundial de Fútbol de 2002, Inglaterra habría ganado.

En ambos enunciados tanto el antecedente como el consecuente son falsos: "Brasil no ganó la final del Mundial de Fútbol de 2002", "Alemania ganó la final del Mundial de Fútbol de 2002" e "Inglaterra ganó la final del Mundial de Fútbol de 2002". A pesar de que el valor de verdad de sus componentes es el mismo, el enunciado **(26)** es verdadero y el **(27)** es falso. De nuevo, la moraleja es que el valor de verdad de este tipo de enunciados condicionales no depende sólo del valor de verdad de los enunciados que lo componen.

El tipo de enunciado condicional que hace parte de la lógica clásica debe ser plenamente analizable en términos veritativo-funcionales, y para tal fin se ha definido un tipo de condicional conocido como ***condicional material***. En *LP* usaremos el signo "$\supset$" para representar el conector lógico que genera un condicional material.

Un condicional material es verdadero en todos los casos, excepto cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, como se puede observar en la tabla de verdad característica del condicional material en *LP*:

Cap-2.pmd 42 20/06/07, 11:54 a.m.

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \supset \mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Analicemos cada una de las líneas de la tabla de verdad. En la primera línea, tanto el antecedente como el consecuente se cumplen; por lo tanto, el enunciado condicional es verdadero. En la segunda línea, el antecedente se cumple, pero el consecuente no; por lo tanto el condicional debe ser falso. Las siguientes dos líneas no son tan evidentes. En la tercera y en la cuarta línea la condición no se cumple, lo cual inmediatamente nos lleva a preguntarnos si es posible determinar el valor de verdad del condicional material. Consideremos el siguiente ejemplo:

(28) Si me invitan a la fiesta, entonces yo voy.

Si "I" es "Me invitan a la fiesta" y "V" es "Voy a la fiesta", el enunciado **(28)** puede ser simbolizado como:

(28a) $I \supset V$

La siguiente es la tabla de verdad en el caso concreto de la fórmula **(28a)**:

I	V	$I \supset V$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

En la tercera línea yo no recibo una invitación, y de todos modos asisto a la fiesta. Si analizamos estrictamente lo que dice el enunciado original: "Si me invitan a la fiesta, entonces yo voy", vemos que no se establece cuál debe ser el curso de acción que yo debo tomar si *no* recibo una invitación, es decir, si no se cumple la condición. Si voy a la fiesta sin ser invitado, no habré actuado en contra de mi compromiso original, no habré dicho algo falso. Lo mismo sucede en la cuarta línea: no recibo una invitación y no voy a la fiesta. Mis acciones no contradicen mi afirmación original según la cual si me invitan a la fiesta, asistiré. Como en ninguno de los dos casos se trata de una afirmación falsa, y como la lógica clásica es bivalente, el condicional debe ser verdadero.

Algunos filósofos han expresado su insatisfacción con esta definición de las condiciones de verdad del condicional material. Por una parte, afirman, las condiciones de verdad del condicional material casi nunca corresponden a las de los enunciados condicionales en español[3], y dan lugar a casos absurdos. Consideremos, por ejemplo, el siguiente enunciado condicional:

(29) Si este filamento está hecho de madera, entonces conducirá electricidad.

Según las condiciones de verdad del condicional material, el enunciado es verdadero si el filamento está hecho de metal o de plástico, es decir, si el antecedente es falso. Sin embargo, nadie está dispuesto a aceptar el enunciado como verdadero, independientemente del material del que esté hecho el filamento.

La respuesta habitual de los lógicos a esta objeción es aceptar que las condiciones de verdad del condicional material no son obvias, pero que su aceptación tiene consecuencias que sí lo son. Sólo si se aceptan estas definiciones, es posible validar inferencias como *modus ponens*, *modus tollens*, el silogismo hipotético, el silogismo disyuntivo y muchas otras inferencias que no estamos dispuestos a desechar. Además, con estas definiciones es posible confirmar la invalidez de inferencias que consideramos falaces. En pocas palabras, la confirmación de nuestras intuiciones lógicas requiere que aceptemos las condiciones de verdad del condicional material[4].

Por otra parte, algunos lógicos y filósofos arguyen que si el antecedente de un condicional material es falso, es imposible determinar el valor de verdad del enunciado condicional. Al fin y al cabo, el enunciado condicional sólo tiene sentido cuando se cumple la condición. La solución que proponen es adoptar, para los condicionales cuyo antecedente sea falso, un tercer valor de verdad, generalmente representado con la letra "***i***", el cual algunos leen como "indeterminado", otros como "ni verdadero ni falso" y otros como "tanto verdadero como falso". Las lógicas que se desprenden de la introducción de un tercer valor de verdad son llamadas lógicas trivalentes. En este libro no nos ocuparemos de estas lógicas no clásicas, pero es importante tener presente que existen estas alternativas en la lógica formal.

Ahora bien, si quisiera asegurarle a mi interlocutor que no asistiré a la fiesta sin una invitación, debería utilizar el siguiente enunciado:

(30) Yo voy a la fiesta *sólo si* me invitan.

que simbolizaremos como:

(30a) $V \supset I$

3. La excepción más notable es el caso de las promesas, juramentos, compromisos y enunciados afines. Por esa razón, en el ejemplo **(28)** las tablas de verdad sí expresan las condiciones de verdad del enunciado.

4. La misma respuesta es utilizada para justificar la adopción del uso inclusivo de la disyunción.

Cap-2.pmd 44 20/06/07, 11:54 a.m.

En el enunciado **(30)**, la frase "sólo si" invierte la relación condicional y es muy importante tener en cuenta esta inversión en el momento de simbolizar un enunciado. El enunciado "Yo voy a la fiesta", que ocurre antes de la frase "sólo si", es ahora el antecedente del condicional material. Y éste es falso si yo voy a la fiesta sin haber recibido una invitación, es decir, si "V" es verdadera e "I" es falsa:

V	I	V ⊃ I
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Consideremos otro ejemplo. Los siguientes dos enunciados dicen cosas muy distintas:

(31) Si me pagan, voy.

(32) Sólo si me pagan, voy.

En el ejemplo **(31)**, el enunciado es verdadero si voy así no me paguen, es decir, si el antecedente "Me pagan" es falso, y el consecuente "Voy" es verdadero. Quizás pida prestado el dinero para ir. Pero en el **(32)** esa situación no puede ocurrir. El enunciado "Voy" es el antecedente del enunciado, y "me pagan" es el consecuente. Por lo tanto, si es verdad que voy, tiene que ser cierto que me pagaron. Las simbolizaciones de los enunciados reflejan esa diferencia:

(31a) $P \supset V$

(32a) $V \supset P$

Otra frase que nos indica la existencia de una relación condicional es "a menos que", como en el siguiente ejemplo:

(33) La planta se va a morir *a menos que* le pongas agua todos los días.

El enunciado se puede parafrasear como:

(33a) La planta se va a morir *si no* le pones agua todos los días.

Si "M" es "La planta se va a morir" y "A" es "Le pones agua a la planta todos los días", el enunciado se puede simbolizar como:

(33b) $\sim A \supset M$

Cap-2.pmd 45 20/06/07, 11:54 a.m.

Analicemos las condiciones de verdad de esta fórmula:

A	M	$\sim A \supset M$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

El enunciado **(33)** dice que de continuar el *status quo* en el que la planta no está siendo regada todos los días, es decir, si "A" es falsa, con seguridad la planta morirá, es decir, "M" será verdadera. La tercera línea de la tabla de verdad nos muestra que en tal caso el condicional es verdadero; y la cuarta línea nos muestra que si el *status quo* continúa y la planta no muere, el condicional es falso. La primera línea de esta tabla de verdad puede parecer extraña: es verdad que la planta fue regada con agua todos los días y también es verdad que la planta murió. A pesar de esto, el enunciado "La planta se va a morir a menos que le pongas agua todos los días" resulta ser verdadero. Para entender lo que está sucediendo debemos tener presente que el enunciado no dice nada acerca de lo que acaecerá si la planta es en efecto regada todos los días. En particular, el enunciado **(33) no** es equivalente a:

(34) Si le pones agua todos los días, la planta no morirá.

La planta puede morir de todos modos por falta de luz. En los casos en los que se rompe el *status quo*, el valor de verdad del consecuente es irrelevante para el valor de verdad del condicional. En ambos casos éste es verdadero porque el antecedente es falso.

Según la tabla de verdad característica del condicional material, éste es verdadero cuando el antecedente es falso o el consecuente es verdadero. En otras palabras, todo enunciado de la forma $\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$ puede ser simbolizado como una disyunción: $\sim\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$. Ahora bien, si un enunciado de la forma "$\mathcal{P}$ a menos que $\mathcal{Q}$" debe ser simbolizado como $\sim\mathcal{Q} \supset \mathcal{P}$, podemos transformar este condicional material en una disyunción equivalente: $\sim\sim\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$. Una fórmula de forma $\sim\sim\mathcal{Q}$ es equivalente a $\mathcal{Q}$, así que podemos simplificar la doble negación: $\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$. Finalmente, podemos invirtir el orden de las metavariables en la disyunción. Así, tenemos que un enunciado de la forma "$\mathcal{P}$ a menos que $\mathcal{Q}$" siempre puede ser simbolizado como "$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$". La siguiente tabla de verdad resume esta idea:

Cap-2.pmd 46 20/06/07, 11:54 a.m.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$	$\sim\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

2.8 Bicondicional material

En ocasiones, el condicional material es insuficiente para capturar la relación de dependencia lógica que existe entre dos enunciados. Consideremos el siguiente condicional material:

(35) Si el hierro se calienta, entonces aumenta de volumen.

Si “C” es “El hierro se calienta” y “V” es “El hierro aumenta de volumen”, podemos resumir en una tabla de verdad las posibilidades que surgen:

C	V	C $\supset$ V
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Si observamos la tercera línea de la tabla de verdad, nos encontramos con un problema: el hierro no se calentó y a pesar de eso aumentó de volumen. Como queremos que nuestras enunciados reflejen las leyes de la naturaleza, debemos evitar los enunciados condicionales que permiten su violación. Se podría pensar que al invertir el antecedente y el consecuente se soluciona el problema. Así, el nuevo enunciado sería:

(36) El hierro aumenta de volumen *sólo si* se calienta.

Al examinar la tabla de verdad correspondiente a este enunciado, nos encontramos con un nuevo problema:

C	V	V $\supset$ C
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Este enunciado excluye el caso problemático en el que el hierro aumenta de volumen sin ser calentado (“V $\supset$ C” es falsa en la tercera línea), pero admite el caso en el que el hierro se calienta y no aumenta de volumen ("V ⊃ C" es verdadera en la segunda línea). La solución es entonces combinar las dos afirmaciones para excluir los dos casos problemáticos. Así, la conjunción de los dos condicionales materiales nos proporciona el resultado deseado:

C	V	(C ⊃ V)	&	(V ⊃ C)
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

En *LP* expresaremos la conjunción de dos condicionales materiales utilizando el símbolo "≡", un conector lógico que genera un ***bicondicional material***. El conector corresponde en español a la expresión "si y sólo si". La forma correcta de expresar la relación entre el volumen y la temperatura del hierro es entonces a través del siguiente enunciado:

(37) El hierro aumenta de volumen *si y sólo si* se calienta.

que simbolizaremos como:

(37a) V ≡ C

Un enunciado bicondicional es verdadero si y sólo si los enunciados que lo componen son ambos verdaderos o ambos falsos. Estas condiciones de verdad están representadas en la tabla de verdad característica del bicondicional material:

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \equiv \mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejercicio 2.2

A. Usando los enunciados simples del Ejercicio 2.1, junto con los indicados a continuación, simbolice cada una de las siguientes afirmaciones en el lenguaje *LP*.

P: Luis es una persona muy ocupada.
M: Carolina va al gimnasio.
S: Adriana goza de buena salud.

1. Si Luis juega tenis todos los días, no es una persona muy ocupada.
2. Carolina va al gimnasio sólo si juega tenis todos los días.

Cap-2.pmd 48 20/06/07, 11:54 a.m.

3. Luis juega tenis todos los días si y sólo si no es una persona muy ocupada.
4. Si Luis no es una persona muy ocupada, juega tenis todos los días.
5. Si tanto Carolina como Luis juegan tenis todos los días, entonces Adriana también lo hace.
6. Si Carolina juega tenis todos los días, entonces si Luis no es una persona muy ocupada él también juega tenis todos los días.
7. Carolina va al gimnasio si y sólo si juega tenis todos los días.
8. Si Carolina o Luis juega tenis todos los días, entonces Adriana también lo hace.
9. Si Carolina o Luis no juega tenis todos los días, entonces Adriana tampoco.
10. Si ni Carolina ni Luis juega tenis todos los días, entonces Adriana tampoco.
11. Asumiendo que Carolina va al gimnasio, ella juega tenis todos los días si y sólo si tanto Adriana como Luis juegan tenis todos los días.
12. Si Adriana goza de buena salud, ella juega tenis todos los días si y sólo si Luis lo hace.
13. Si Adriana goza de buena salud y Luis no es una persona muy ocupada, entonces ambos juegan tenis todos los días.
14. Aunque Adriana goza de buena salud, no juega tenis todos los días; pero Carolina sí juega tenis todos los días si Luis lo hace.
15. Si Carolina va al gimnasio, Luis no es una persona muy ocupada y Adriana goza de buena salud, entonces todos juegan tenis todos los días.
16. Si Adriana goza de buena salud si juega tenis todos los días, entonces si Luis es una persona muy ocupada no juega tenis todos los días.
17. Si Adriana juega tenis todos los días si Carolina lo hace, entonces Adriana goza de buena salud y Carolina va al gimnasio.
18. Si Adriana juega tenis todos los días, entonces Carolina lo hace si Luis lo hace.
19. Si Adriana juega tenis todos los días si Carolina o Luis lo hacen, entonces Adriana goza de buena salud y Luis no es una persona muy ocupada.
20. Si Adriana no goza de buena salud, entonces Luis o Adriana no juega tenis todos los días.

B. Simbolice los siguientes argumentos en el lenguaje *LP*. En cada argumento es necesario identificar primero las premisas y la conclusión. Posteriormente, se deben identificar los enunciados simples y se le debe asignar a cada uno una letra proposicional.

1. *La historia del tiempo* fue escrita por un loco, por un autor de ciencia ficción o por un científico. El autor de *La historia del tiempo* fue inspirado por un incidente en un acelerador de partículas, aunque él no es un científi-

co. El autor de *La historia del tiempo* no es un autor de ciencia ficción y no había escrito ningún libro antes. El autor de *La historia del tiempo* es un loco.

2. Si ni Pedro ni Javier puede resolver la ecuación, Manuel va a estar furioso. Y si Manuel está furioso, el experimento no va a ser exitoso. Definitivamente el laboratorio no recibirá recursos adicionales. Después de todo, ni Pedro ni Javier puede resolver la ecuación, y el laboratorio recibirá recursos adicionales si y sólo si el experimento es exitoso.
3. La mucama o el mayordomo cometió el crimen, a menos que Lord Bradley lo haya hecho. Lord Bradley es el asesino sólo si el crimen fue cometido con una daga; aún más, si el crimen se cometió con una daga, ni la mucama ni el mayordomo lo cometieron. El arma fue una daga. Por lo tanto, Lord Bradley cometió el crimen.
4. Jorge no sabe lo que está haciendo o está siguiendo una estrategia suicida. Si no sabe lo que está haciendo, Jorge va a perder la partida, y si pierde la partida, Jorge perderá mucho dinero. Por lo tanto, Jorge perderá mucho dinero.
5. El candidato ganará al menos dos de las tres ciudades principales del departamento: San Mateo, La Estrella y Salvador. Si el candidato es percibido como corrupto, no ganará en La Estrella pero sí en las otras dos. No será percibido como corrupto si su estrategia publicitaria es exitosa y en efecto tiene una muy exitosa estrategia publicitaria.

2.9 Enunciados cuantificados

En el capítulo anterior nos ocupamos de los enunciados categóricos, los cuales constituyen la base de la lógica aristotélica. Recordemos que los enunciados categóricos son aquellos en los que se afirma o niega que una clase o categoría está incluida en otra clase o categoría, total o parcialmente. Para indicar cuál es la relación de inclusión, los enunciados categóricos contienen ***cuantificadores***, términos como "todos", "algunos" y "ninguno". En general, el lenguaje *LP* no puede expresar este tipo de enunciados, pues el punto de partida para construir cualquier fórmula de *LP* son los enunciados simples, cuyos sujetos son individuos y no clases de cosas. Sin embargo, existe una estrategia para transformar enunciados categóricos o cuantificados en fórmulas de *LP*. Consideremos el siguiente ejemplo:

(38) Todos los huéspedes del Ritz usan bufanda.

El enunciado no se refiere a ningún huésped del Ritz en particular, pero podríamos compilar una lista de todos los huéspedes del Ritz y crear una conjunción de enunciados simples en los que se afirme, de cada uno, que usa bufanda:

Cap-2.pmd 50 20/06/07, 11:54 a.m.

(38a) El señor Guzmán usa bufanda y la condesa von Below usa bufanda y el doctor Peterson usa bufanda y ... y el actor Kinsky usa bufanda.

Si le asignamos una letra proposicional a cada uno de estos enunciados simples, podremos construir una fórmula de *LP*:

(38b) [(G & B) & P] & ... & K

Esta estrategia para simbolizar enunciados categóricos funciona cuando se trata de clases con pocos miembros, como los huéspedes del Hotel Ritz. Pero no funciona cuando se trata de clases con muchos miembros o con un número infinito de ellos, como en el siguiente ejemplo:

(39) Todos los números pares tienen un sucesor impar.

La simbolización en *LP* de este enunciado sería una fórmula infinita. Para poder ofrecer una simbolización lógica adecuada de este tipo de enunciados, tendremos que estudiar un lenguaje lógico más sofisticado que *LP*. Eso será lo que haremos en la segunda parte del libro. Por el momento, podemos estudiar cómo se pueden utilizar los limitados recursos de *LP* para simbolizar otros enunciados con cuantificadores.

Supongamos que en la habitación 504 del Hotel Ritz hay tres personas, Dimitri, Pamela y Diana. Utilizaremos las siguientes convenciones para simbolizar una serie de enunciados acerca de estas personas:

D: Dimitri está tomando vino.
P: Pamela está tomando vino.
N: Diana esxtá tomando vino.

(40) Al menos uno de los ocupantes de la habitación está tomando vino.

(41) Exactamente uno de los ocupantes de la habitación está tomando vino.

La diferencia entre los dos enunciados es que en el **(40)** es posible que haya más de una persona tomando vino, mientras que en el **(41)** no. Por lo tanto, la simbolización en *LP* del enunciado **(40)** debe ser verdadera si una, dos o tres personas están tomando vino. La disyunción de los tres enunciados cumple esta condición:

(40a) $D \vee (P \vee N)$

En la simbolización del enunciado **(41)** debemos asegurarnos de que al menos una persona esté tomando vino, pero también debemos excluir la posibilidad de que haya más de una persona tomando vino:

(41a) $[D \,\&\, {\sim}(P \vee N)] \vee ([P \,\&\, {\sim}(D \vee N)] \vee [N \,\&\, {\sim}(D \vee P)])$

Cap-2.pmd 51 20/06/07, 11:54 a.m.

Consideremos ahora un enunciado categórico tipo **E**:

(42) Ninguno de los ocupantes de la habitación esta tomando vino

Necesitamos afirmar que ni Dimitri, ni Pamela ni Diana está tomando vino. Existen dos formas de simbolizar esa afirmación. Podemos crear la conjunción de las negaciones de los enunciados simples:

(42a) $\sim D \ \& \ (\sim P \ \& \ \sim N)$

Y también podemos construir la negación de la disyunción de los tres enunciados, es decir, la negación del enunciado **(40)**. Al fin y al cabo el enunciado **(40)** es un enunciado categórico tipo **I**, y como vimos en el capítulo anterior, los enunciados categóricos tipo **I** y **E** son contradictorios.

(42b) $\sim[D \vee (P \vee N)]$

Finalmente, consideremos un enunciado un poco más complejo:

(43) Exactamente dos de los ocupantes de la habitación están tomando vino.

Para simbolizar este enunciado, debemos asegurarnos primero de que haya al menos dos personas tomando vino, y posteriormente debemos excluir la posibilidad de que haya un tercero. La siguiente simbolización logra ese propósito:

(43a) $([(D \ \& \ P) \vee (D \ \& \ N)] \vee (P \ \& \ N)) \ \& \ \sim[(D \ \& \ P) \ \& \ N]$

Ejercicio 2.3

Simbolice los siguientes enunciados en el lenguaje *LP* utilizando las siguientes convenciones:

A: Los argentinos ganarán al menos un partido.
B: Los brasileños ganarán al menos un partido.
C: Los colombianos ganarán al menos un partido.
L: El equipo brasileño tiene jugadores lesionados.
E: La estrella del equipo argentino es expulsada del torneo.
T: La temperatura supera los 40 grados durante la mayor parte del tor neo.

Nota: Para este ejercicio asumiremos que sólo quedan tres equipos compitiendo en el torneo: los brasileños, los argentinos y los colombianos.

Cap-2.pmd 52 20/06/07, 11:54 a.m.

1. Si algún equipo gana un partido, todos lo harán.
2. Los brasileños ganarán un partido sólo si no tienen jugadores lesionados, en cuyo caso no ganarán ninguno.
3. Si la estrella del equipo argentino es expulsada, los argentinos ganarán un partido sólo si ninguno de los otros dos equipos lo hace.
4. Siempre y cuando la temperatura no supere los 40 grados durante la mayor parte del torneo y su estrella no sea expulsada, los argentinos ganarán un partido si alguno de los otros dos equipos lo hace.
5. Los colombianos ganarán un partido si y sólo si el equipo brasileño tiene jugadores lesionados y la estrella del equipo argentino es expulsada.
6. Los argentinos ganarán un partido sólo si la temperatura no supera los 40 grados durante la mayor parte del torneo y su jugador estrella no es expulsado.
7. Si el equipo brasileño tiene lesionados, ganarán un partido sólo si ninguno de los otros dos lo hace y la temperatura no supera los 40 grados durante la mayor parte del torneo.
8. Los colombianos ganarán un partido a menos que la temperatura supere los 40 grados durante la mayor parte del torneo, en cuyo caso, a diferencia de los otros dos equipos, no ganarán ningún partido.
9. Al menos un equipo ganará un partido.
10. Máximo uno de ellos ganará un partido.
11. Exactamente uno de ellos ganará un partido.
12. No todos ganarán partidos.
13. Al menos dos de ellos ganarán partidos.
14. Máximo dos de ellos ganarán partidos.
15. Exactamente dos de ellos ganarán partidos.
16. Todos ganarán partidos.

2.10 La sintaxis de *LP*

En esta sección estudiaremos de una manera más precisa y rigurosa el vocabulario y la sintaxis del lenguaje *LP*.

El ***vocabulario*** de *LP* está constituido por los siguientes elementos:

Letras proposicionales: A, B, C, …

Numerales: 1 2 3 4 ...

Operadores lógicos: $\sim$ & $\vee$ $\supset$ $\equiv$

Puntuación: ( )

Una ***expresión*** de *LP* es simplemente una serie de elementos del vocabulario de *LP*. Así, "A & F" es una expresión de *LP*, al igual que "$\supset R_{89}$&~D∨". Para determinar cuáles expresiones son sintácticamente correctas, o ***fórmulas bien formadas*** (*fbf*), utilizamos las siguientes definiciones:

1. Toda letra proposicional con o sin subíndices numéricos es una fórmula bien formada.
2. Si $\mathcal{P}$ es una fórmula bien formada, ~$\mathcal{P}$ también lo es.
3. Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son fórmulas bien formadas, entonces ($\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$) también lo es.
4. Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son fórmulas bien formadas, entonces ($\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$) también lo es.
5. Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son fórmulas bien formadas, entonces ($\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$) también lo es.
6. Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son fórmulas bien formadas, entonces ($\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$) también lo es.
7. Nada más es una fórmula bien formada a menos que pueda ser construida utilizando las cláusulas 1 al 6.

Como hemos visto, las fórmulas bien formadas definidas en la primera cláusula se denominan ***fórmulas atómicas*** y nos permiten simbolizar los enunciados simples. Las fórmulas bien formadas definidas por las cláusulas 2 a 6 nos permiten simbolizar enunciados compuestos. La definición proporciona un ***método efectivo*** para determinar si una expresión de *LP* es una fórmula bien formada de *LP*. Es decir, dada una expresión de *LP*, podemos determinar en un número finito de pasos si la expresión es una fórmula bien formada.

Para facilitar el uso del lenguaje *LP*, adoptaremos las siguientes convenciones. En primer lugar, los paréntesis cuadrados pueden reemplazar a los paréntesis normales en cualquier caso. Generalmente alternaremos su uso para que sea más fácil leer las fórmulas. En segundo lugar, los paréntesis al comienzo y al final de una fórmula pueden ser eliminados siempre y cuando la fórmula no haga parte de otra fórmula.

Consideremos algunos ejemplos. Ninguna de las siguientes expresiones es una fórmula bien formada:

(44) (M ∨ P) ⊃ m

(45) A & (B & C) & D

(46) ((K ≡ L))

(47) ~($\mathcal{Q}$ & $\mathcal{P}$)

En la expresión **(44)**, "m" no es una fórmula. Sólo las letras mayúsculas son letras proposicionales. En consecuencia, el condicional tampoco puede ser una fórmula. El problema en el ejemplo **(45)** es que una conjunción debe conectar sólo dos fórmulas,

Cap-2.pmd 54 20/06/07, 11:54 a.m.

y en este caso hay tres. Para que la expresión **(45)** fuera una fórmula, tendríamos que añadir paréntesis alrededor de las primeras o de las últimas dos fórmulas:

(45a) [A & (B & C)] & D

(45b) A & [(B & C) & D]

En la expresión **(46)** sobra un par de paréntesis. Finalmente, en el ejemplo (**47**), $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{P}$ no son fórmulas sino metavariables.

Además de especificar la sintaxis de *LP*, introduciremos dos nociones sintácticas que son de gran importancia en el análisis de cualquier fórmula bien formada: el ***operador lógico principal*** de una fórmula y los ***componentes proposicionales inmediatos*** de una formula:

1. Si $\mathcal{P}$ es una fórmula atómica, $\mathcal{P}$ no contiene operadores lógicos y por lo tanto no tiene un operador lógico principal. $\mathcal{P}$ no tiene componentes proposicionales inmediatos.
2. Si $\mathcal{P}$ tiene la forma ~$\mathcal{Q}$, donde $\mathcal{Q}$ es una fórmula bien formada, el operador lógico principal de $\mathcal{P}$ es el signo de negación frente a $\mathcal{Q}$, y $\mathcal{Q}$ es el componente proposicional inmediato de $\mathcal{P}$.
3. Si $\mathcal{P}$ tiene la forma ($\mathcal{Q}$ & $\mathcal{R}$), ($\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}$), ($\mathcal{Q} \supset \mathcal{R}$) o ($\mathcal{Q} \equiv \mathcal{R}$), donde $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{R}$ son fórmulas bien formadas, entonces el operador lógico principal de $\mathcal{P}$ es el conector que aparece entre $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{R}$; además, $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{R}$ son los componentes proposicionales inmediatos de $\mathcal{P}$.

Ejercicio 2.4

A. Determine cuáles de las siguientes expresiones son fórmulas bien formadas de *LP*.

1.	(B & C & D)	2.	~&A
3.	(BC ⊃ DC)	4.	(B ⊂ (A ∨ L)
5.	(m ≡ k)	6.	$\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$
7.	(((R & S) & (U ∨ R))	8.	~M ~ N
9.	(F & K) ≡ [K ⊃ S]	10.	~~~J

B. En cada una de las siguientes fórmulas bien formadas, indique cuál es el operador lógico principal y cuáles sus componentes proposicionales inmediatos.

Ejemplo: (M & T) ⊃ ~(~A ∨ M)

Operador lógico principal: ⊃

Componentes proposicionales inmediatos: (M & T) y ~(~A ∨ M)

1. $(S \supset {\sim}G) \,\&\, S$
2. ${\sim}[(F \vee G) \supset D]$
3. ${\sim}G \equiv {\sim}(D \,\&\, F)$
4. ${\sim}G \vee (S \vee D)$
5. $[(G \supset F) \supset (F \supset D)] \supset (G \supset D)$
6. $R \supset [({\sim}F \,\&\, {\sim}T) \,\&\, {\sim}D]$
7. $[F \vee (D \vee G)] \vee [(S \vee G) \vee T]$
8. $D \vee [({\sim}F \,\&\, {\sim}T) \vee ({\sim}S \vee {\sim}D)]$

Cap-2.pmd 56 20/06/07, 11:54 a.m.

3. Semántica del lenguaje *LP*

En el capítulo anterior consideramos brevemente las condiciones de verdad de las fórmulas generadas por los cinco operadores lógicos de *LP*. Las condiciones de verdad de una fórmula constituyen su significado lógico y determinan sus propiedades semánticas. El significado lógico de una fórmula también contribuye a la verdad o falsedad de las fórmulas en las que ocurre, a la consistencia o inconsistencia de los conjuntos de los cuales es miembro, y a la validez o invalidez de los argumentos de los que hace parte. En este capítulo desarrollaremos un método de prueba, las tablas de verdad, para determinar las propiedades semánticas de fórmulas, conjuntos y argumentos a partir del significado lógico de las fórmulas que los componen.

3.1 Condiciones de verdad

El primer paso para darle un contenido semántico al lenguaje *LP* es establecer una *valuación total* del lenguaje. Recordemos que una valuación de una fórmula es la asignación de un valor de verdad, **V** o **F**, a cada una de las fórmulas atómicas en la fórmula. Una valuación total de *LP* es la asignación de un valor de verdad a cada fórmula atómica de *LP*. Cada fórmula de *LP* es semánticamente independiente, es decir, el valor de verdad de una fórmula atómica no depende del valor de verdad de ninguna otra fórmula. Al combinar los valores de verdad de todas las fórmulas atómicas de *LP* obtenemos una descripción total de la forma en que el mundo *podría* ser. Cualquier variación en la valuación de las fórmulas atómicas de *LP* genera otro mundo posible. Como existe un número infinito de fórmulas en *LP*, existe un número infinito de valuaciones totales y de mundos posibles.

El valor de verdad de una fórmula molecular de *LP* está completa y exclusivamente determinado por el valor de verdad de las fórmulas atómicas que la componen. Como una valuación total le asigna un valor de verdad a todas las fórmulas atómicas de *LP*, se sigue que todas las fórmulas moleculares de *LP* también tienen un valor de verdad determinado bajo cada valuación total.

Aunque cada valuación total le asigna un valor de verdad a un número infinito de fórmulas atómicas, al considerar una fórmula en particular sólo hace falta tener en cuenta los valores de verdad de las fórmulas atómicas incluidas en la fórmula. Al fin y al cabo el valor de verdad de la fórmula molecular sólo depende de esas fórmulas atómicas y de ninguna otra. Una valuación en la que sólo se tiene en cuenta un subconjunto de todas las fórmulas de *LP* es una *valuación parcial* de *LP*. Una tabla de verdad contiene todas las posibles valuaciones parciales de *LP* que son relevantes para una fórmula en particular.

En el capítulo anterior presentamos las condiciones de verdad de los cinco tipos de fórmulas de *LP* utilizando sus tablas de verdad características. Cada tabla de verdad presenta las posibles valuaciones parciales de *LP* que son relevantes para cada tipo de fórmula.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$\mathcal{P}$	$\sim\mathcal{P}$
V	F
F	V

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Aunque las tablas de verdad son fáciles de leer, es posible definir de una manera más rigurosa y abstracta cuáles son las condiciones de verdad de cada tipo de fórmula. Estas definiciones abstractas serán más útiles en el largo plazo porque tienen la gran ventaja de que nos permiten ver más fácilmente la relación entre la lógica clásica y los sistemas más avanzados que estudiaremos en la tercera parte de este libro.

Las definiciones que consideraremos resumen los resultados de la tabla de verdad característica de cada tipo de fórmula. Abreviaremos estas definiciones utilizando las siguientes convenciones: Usaremos la letra cursiva "$\mathcal{V}$" para representar una valuación total de *LP*. Escribiremos la frase "el valor de verdad asignado por $\mathcal{V}$ a $\mathcal{P}$" como $\mathcal{V}(\mathcal{P})$. Así, para decir que $\mathcal{V}$ le asigna el valor de verdad **F** a $\mathcal{P}$, escribiremos $\mathcal{V}(\mathcal{P}) =$ **F**.

Cap-3.pmd 58 13/07/07, 03:13 p.m.

Condiciones de verdad para las fórmulas de LP

NEGACIÓN

$\mathcal{V}(\sim\mathcal{P}) = \mathbf{V}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{F}$.

$\mathcal{V}(\sim\mathcal{P}) = \mathbf{F}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{V}$.

CONJUNCIÓN

$\mathcal{V}(\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q}) = \mathbf{V}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{V}$.

$\mathcal{V}(\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q}) = \mathbf{F}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{F}$ o $\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{F}$.

DISYUNCIÓN

$\mathcal{V}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = \mathbf{V}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{V}$ o $\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{V}$.

$\mathcal{V}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = \mathbf{F}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{F}$ y $\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{F}$.

CONDICIONAL MATERIAL

$\mathcal{V}(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}) = \mathbf{V}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{F}$ o $\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{V}$.

$\mathcal{V}(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}) = \mathbf{F}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{F}$.

BICONDICIONAL MATERIAL

$\mathcal{V}(\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}) = \mathbf{V}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{V}$,
o $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{F}$ y $\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{F}$.

$\mathcal{V}(\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}) = \mathbf{F}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{F}$,
o $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{F}$ y $\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{V}$.

Utilizaremos estas definiciones como base para establecer el valor de verdad de las fórmulas de *LP*. Pasaremos ahora a estudiar cómo se construye una tabla de verdad.

3.2 Tablas de verdad

El primer paso en la construcción de una tabla de verdad para una fórmula $\mathcal{P}$ es preguntarnos cuántas posibles valuaciones de la fórmula hay, es decir, en cuántas formas diferentes pueden combinarse los valores de verdad asignados a las fórmulas

Cap-3.pmd 59 13/07/07, 03:13 p.m.

atómicas que la componen. Si $\mathcal{P}$ es una fórmula atómica, $\mathcal{P}$ sólo tiene dos valuaciones posibles. Si $\mathcal{P}$ tiene dos fórmulas atómicas, existen cuatro combinaciones posibles. Si $\mathcal{P}$ tiene tres fórmulas atómicas, sus valores de verdad se pueden combinar de ocho formas diferentes, y así sucesivamente. En general, cada vez que añadimos una fórmula atómica, el número de posibilidades se duplica. Así, si $\mathcal{P}$ tiene n fórmulas atómicas, habrá 2^n combinaciones posibles de valores de verdad.

Consideremos todas las valuaciones posibles de la siguiente fórmula:

(1) $(\sim B \ \& \ C) \supset (\sim A \vee C)$

Como la fórmula tiene tres fórmulas atómicas, existen ocho valuaciones posibles ($2^3 = 8$):

A	B	C	$(\sim B \ \& \ C) \supset (\sim A \vee C)$
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

Al contar el número de fórmulas atómicas sólo tenemos en cuenta el número de fórmulas diferentes, no el número total. En el ejemplo **(1)**, "C" ocurre dos veces en la fórmula pero sólo se cuenta una vez.

En la construcción de la tabla de verdad adoptaremos un método sistemático para registrar las combinaciones de valor de verdad. En primer lugar, organizaremos las fórmulas atómicas en orden alfabético. En segundo lugar, a la primera fórmula le asignaremos el valor **V** en la mitad de las filas, y el valor **F** en la segunda mitad. En la segunda columna, correspondiente a la segunda fórmula, el número de **V**s y **F**s que alternamos es la mitad que en la primera columna, y así sucesivamente. En el ejemplo anterior, a la fórmula "A" le asignamos cuatro **V**s y cuatro **F**s; en la columna de "B", alternamos dos **V**s y dos **F**s; y en la columna de "C" alternamos una **V** y una **F**. La última columna *siempre* debe alternar una **V** y una **F**. Podemos expresar esto de una manera más precisa. En una tabla de verdad con n fórmulas atómicas, la primera columna contiene 2^{n-1} **V**s alternando con 2^{n-1} **F**s, la segunda contiene 2^{n-2} **V**s alternando con 2^{n-2} **F**s, y en general la columna i consiste de 2^{n-i} **V**s alternando con 2^{n-i} **F**s.

Una vez hayamos determinado el número y el orden de las filas, procedemos a asignarle a cada fórmula atómica dentro de la fórmula molecular el valor de verdad indicado a la izquierda de la tabla.

Cap-3.pmd 60 13/07/07, 03:13 p.m.

A	B	C	(~	B	&	C)	⊃	(~	A	∨	C)
V	V	V		V		V			V		V
V	V	F		V		F			V		F
V	F	V		F		V			V		V
V	F	F		F		F			V		F
F	V	V		V		V			F		V
F	V	F		V		F			F		F
F	F	V		F		V			F		V
F	F	F		F		F			F		F

A continuación establecemos el valor de la negación de todas las fórmulas atómicas:

A	B	C	(~	B	&	C)	⊃	(~	A	∨	C)
V	V	V	F	V		V		F	V		V
V	V	F	F	V		F		F	V		F
V	F	V	V	F		V		F	V		V
V	F	F	V	F		F		F	V		F
F	V	V	F	V		V		V	F		V
F	V	F	F	V		F		V	F		F
F	F	V	V	F		V		V	F		V
F	F	F	V	F		F		V	F		F

El siguiente paso consiste en determinar el valor de verdad del conector principal de las fórmulas entre paréntesis. En este caso se trata de una conjunción y una disyunción. Para determinar el valor de la conjunción "~B & C", comparamos la columna debajo de la negación de "B" con la columna debajo de "C" de acuerdo con las definiciones de las condiciones de verdad de la conjunción. Y para determinar el valor de la disyunción "~A ∨ C", comparamos la columna debajo de la negación de "A" con la columna debajo de "C" de acuerdo con las definiciones de las condiciones de verdad de la disyunción.

A	B	C	(~	B	&	C)	⊃	(~	A	∨	C)
V	V	V	F	V	F	V		F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F		F	V	F	F
V	F	V	V	F	V	V		F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F		F	V	F	F
F	V	V	F	V	F	V		V	F	V	V
F	V	F	F	V	F	F		V	F	V	F
F	F	V	V	F	V	V		V	F	V	V
F	F	F	V	F	F	F		V	F	V	F

Cap-3.pmd 61 13/07/07, 03:13 p.m.

El paso final consiste en determinar el valor de verdad del condicional, que es el conector lógico principal. Para tal fin, comparamos el valor de verdad de los conectores principales del antecedente y el consecuente del condicional, en este caso de la conjunción y de la disyunción.

A	B	C	(~	B	&	C)	$\downarrow$ ⊃	(~	A	∨	C)
V	V	V	F	V	F	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F	V	F	V	F	F
V	F	V	V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	F	F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	F	F	V	V	F	V	F

La columna debajo del conector "⊃" nos indica el valor de verdad de la fórmula molecular bajo cada valuación posible. Usaremos una flecha para indicar cuál es el conector principal de la fórmula para la cual hemos construido la tabla de verdad, y llamaremos a la columna debajo del conector principal, la ***columna solución***[1].

3.3 Tautologías, contradicciones y fórmulas contingentes

En el primer capítulo estudiamos las nociones de verdad, falsedad e indeterminación lógica. En esta sección estudiaremos las nociones correspondientes en la lógica proposicional: tautologías, contradicciones y fórmulas semánticamente indeterminadas[2]. La noción de verdad lógica es más *amplia* que su noción correspondiente en *LP*: todas las tautologías son verdades lógicas, pero no es posible probar en *LP* que cualquier enunciado lógicamente verdadero es una tautología[3]. Los siguientes enunciados son verdades lógicas:

(2) $7 = 7$

1. La idea básica detrás de las tablas de verdad está implícita en la obra de Lewis Carroll, Charles Sanders Peirce, William Stanley Jevons (1835-1882), John Venn (1834-1923) y Allan Marquand (1853-1924), pero éstas sólo aparecen explícitamente por primera vez hacia 1909 en la obra de Eugen Müller (1865-1932). Su uso se popularizó a comienzos de la década de 1920 debido a los escritos de Emil Post (1897-1954), en particular a su tesis doctoral (1921), y de Ludwig Wittgenstein (1889-1951), quien les da gran prominencia en el *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921).

2. Las tautologías también son llamadas *fórmulas lógicamente válidas*; las contradicciones también se conocen como *fórmulas inconsistentes*; y las fórmulas semánticamente indeterminadas también son llamadas *fórmulas contingentes*.

3. Lo mismo es cierto, naturalmente, para las nociones de falsedad e indeterminación lógica.

Cap-3.pmd 62 13/07/07, 03:13 p.m.

(3) Todos los animales son animales.

Si simbolizáramos estos enunciados en *LP*, tendríamos que utilizar una sola letra proposicional para cada uno, y una fórmula atómica siempre puede ser verdadera o falsa. El análisis en *LP* no lograría demostrar que es imposible que los enunciados **(2)** y **(3)** sean falsos.

La explicación de la discrepancia entre las dos nociones radica en que la lógica proposicional, al tomar a los enunciados simples y a las fórmulas atómicas como unidades mínimas de análisis, excluye información dentro de los mismos que afectan su valor de verdad. Los conceptos semánticos que definiremos en este capítulo están basados única y exclusivamente en las propiedades veritativo-funcionales de fórmulas y enunciados. Estas propiedades veritativo-funcionales hacen parte de su forma lógica, pero no la agotan. En capítulos subsiguientes de este libro estudiaremos otros aspectos de la forma lógica de fórmulas y enunciados que nos permitirán demostrar formalmente que es imposible que los enunciados **(2)** y **(3)** sean falsos.

Una tautología es un enunciado que siempre es verdadero en virtud de sus propiedades veritativo-funcionales, e independientemente de lo que ocurra en el resto del universo. En el lenguaje *LP* podemos expresar esta idea de la siguiente manera:

> Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LP* es una ***tautología en LP*** si y sólo si $\mathcal{P}$ es verdadera bajo cualquier valuación.

En otras palabras, la fórmula es una tautología en *LP* si y sólo si es verdadera en todas las filas de la tabla de verdad. El siguiente enunciado es un ejemplo de un enunciado tautológico:

(4) Si la nieve es blanca, la nieve es blanca o dulce.

Podemos simbolizar este enunciado con la fórmula:

(4a) $B \supset (B \vee D)$

La tabla de verdad para esta fórmula sólo tiene cuatro filas porque sólo hay dos fórmulas atómicas diferentes en **(4a)**, “B” y “D”. La siguiente es la tabla de verdad completa:

B	D	B	↓ $\supset$	(B	$\vee$	D)
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F
F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	F	F	F

Una contradicción es un enunciado que siempre es falso en virtud de sus propiedades veritativo-funcionales, e independientemente de lo que ocurra en el resto del universo. En el lenguaje *LP* podemos expresar esta idea de la siguiente manera:

> Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LP* es una ***contradicción en LP*** si y sólo si $\mathcal{P}$ es falsa bajo cualquier valuación.

En otras palabras, la fórmula es una contradicción en *LP* si y sólo si es falsa en todas las filas de la tabla de verdad. La negación de una tautología siempre es una contradicción. Consideremos la negación de la fórmula **(2a)**:

(5) $\sim[B \supset (B \vee D)]$

La tabla de verdad para esta fórmula tiene cuatro filas, y la fórmula es falsa bajo cualquier valuación:

B	D	~	[B	⊃	(B	∨	D)]
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	F
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	F	F

Finalmente, hay enunciados cuyo valor de verdad varía de acuerdo con el estado de cosas en el mundo. Tales enunciados son enunciados semánticamente indeterminados. Una fórmula que represente un enunciado de este tipo será verdadera bajo algunas valuaciones, y falsa bajo otras, como se deriva de la siguiente definición.

> Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LP* es ***semánticamente indeterminada en LP*** si y sólo si $\mathcal{P}$ no es ni una tautología ni una contradicción.

La siguiente fórmula es semánticamente indeterminada, como lo demuestra su tabla de verdad correspondiente.

(6) $[(A \supset C) \,\&\, C] \supset A$

A	C	[(A	⊃	C)	&	C]	⊃	A
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	F	F	F	V	F

Cap-3.pmd 64 13/07/07, 03:13 p.m.

La fórmula es verdadera cuando $\mathcal{V}$(A) = **V**, o cuando $\mathcal{V}$(A) = **F** y $\mathcal{V}$(C) = **F**. Pero es falsa cuando $\mathcal{V}$(A) = **F** y $\mathcal{V}$(C) = **V**.

Ejercicio 3.1

A. Determine si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o fórmulas semánticamente indeterminadas utilizando el método de las tablas de verdad.

1. ~S ⊃ S
2. W ⊃ (Z ⊃ W)
3. (A ∨ B) ∨ (~A ≡ B)
4. (A ∨ B) ∨ ~(~A ⊃ B)
5. ~M ⊃ [(N & M) ⊃ O]
6. M ≡ (N ≡ M)
7. [(E ∨ ~E) ⊃ E] ⊃ E
8. (S ≡ T) ⊃ (~S ⊃ ~T)
9. (~A & ~D) ∨ ~(A ∨ D)
10. ([(F ⊃ G) & (G ⊃ H)] & F) & ~H
11. [(F ∨ G) & (F ∨ H)] ⊃ ~(G & H)
12. ~[[(P ∨ Q) & (Q ∨ Q)] & (~P & ~Q)]
13. (E ∨ ~K) ≡ ~~(K ⊃ E)
14. ~R ⊃ [(R ∨ S) ⊃ S]
15. [(B ∨ ~E) & ~(B & E)] ⊃ ~E
16. (H ≡ ~I) & (H ≡ I)

B. Responda las siguientes preguntas.

1. Suponga que $\mathcal{P}$ es una tautología y que $\mathcal{Q}$ es una contradicción. ¿Es posible determinar, con base en esta información, si $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ es una tautología, una contradicción o una fórmula semánticamente indeterminada?
2. Suponga que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son fórmulas semánticamente indeterminadas. ¿Es posible afirmar que $\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$ es también una fórmula semánticamente indeterminada?
3. Suponga que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son fórmulas semánticamente indeterminadas. ¿Es posible afirmar que $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ es también una fórmula semánticamente indeterminada?
4. Suponga que $\mathcal{P}$ es una tautología y $\mathcal{Q}$ una fórmula semánticamente indeterminada. ¿Es posible determinar, con base en esta información, si $\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$ es una tautología, una contradicción o una fórmula semánticamente indeterminada?

3.4 Equivalencia semántica

El siguiente concepto semántico que estudiaremos es el de equivalencia semántica. En el primer capítulo vimos que un par de enunciados son lógicamente equivalentes si es imposible que uno de las enunciados sea verdadero y el otro falso. Así como la noción de verdad lógica es más amplia que la noción de tautología, la equivalencia lógica es más amplia que la equivalencia semántica en *LP*. Examinemos el siguiente par de enunciados:

(7) Todos odian a Osama.
Osama es odiado por todos.

Aunque intuitivamente sabemos que los dos enunciados son lógicamente equivalentes, nuestro juicio está basado en nuestro comprensión de la diferencia entre la voz activa y la voz pasiva. Pero sería imposible utilizar esta información para demostrar la equivalencia entre los dos enunciados en *LP*. La noción de equivalencia que podemos definir en *LP* está basada única y exclusivamente en las propiedades veritativo-funcionales del lenguaje. La siguiente es la definición de equivalencia que utilizaremos en *LP*:

> Dos fórmulas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ de *LP* son ***semánticamente equivalentes en LP*** si y sólo si no hay ninguna valuación bajo la cual tengan valores de verdad diferentes.

De la definición se desprende que dos fórmulas son semánticamente equivalentes si y sólo si tienen el mismo valor de verdad en todas las filas de la tabla de verdad. Para determinar si dos fórmulas son semánticamente equivalentes, debemos construir una tabla de verdad para cada una y mostrar que en cada fila las dos fórmulas tienen el mismo valor de verdad. Ahora bien, para que las dos tablas de verdad sean comparables, el número de filas en las tablas de verdad debe estar basado en el número total de fórmulas atómicas diferentes que existen en las dos fórmulas. Consideremos el siguiente par de fórmulas:

(8) $G \vee H$
$(H \vee J) \vee G$

Cap-3.pmd 66 13/07/07, 03:13 p.m.

Integraremos la tabla de verdad de cada fórmula en una sola tabla de la siguiente manera:

G	H	J	G	∨	H	(H	∨	J)	∨	G
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	F
F	V	F	F	V	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	$\boxed{F}$	F	F	V	V	$\boxed{V}$	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

Al comparar los valores de verdad de "G ∨ H" y "(H ∨ J) ∨ G" nos damos cuenta de que a pesar de que éstos son los mismos en casi todos los casos, existe una fila de la tabla de verdad, la séptima, en la que no son iguales. Por lo tanto las dos fórmulas no son semánticamente equivalentes. Por otra parte, en este caso la tabla de verdad de "G ∨ H" tiene ocho filas en vez de cuatro a pesar de que la fórmula sólo tiene dos fórmulas atómicas. Como vimos antes, para poder comparar dos fórmulas tenemos que construir tablas de verdad que tengan en cuenta las fórmulas atómicas presentes en todas las fórmulas. Como hay tres fórmulas diferentes en total, la tabla de verdad debe tener ocho líneas.

Ejercicio 3.2

A. Utilice el método de las tablas de verdad para determinar en cuáles de los siguientes pares de fórmulas, éstas son semánticamente equivalentes.

1.	~(M & N)	~(M ∨ N)
2.	M ⊃ (N ⊃ M)	(O & ~O) ∨ (M ⊃ M)
3.	A ≡ G	~A ≡ ~G
4.	~G ⊃ ~A	A ⊃ G
5.	(G ⊃ A) ⊃ (A ⊃ G)	(G ≡ A) ∨ (~A ∨ G)
6.	T & (S ∨ R)	(T & S) ∨ R
7.	[K ∨ ~(M & L)] ⊃ ~M	[M ∨ ~(K & L)] ⊃ ~K
8.	~(M ∨ K) ⊃ (L ⊃ K)	L ⊃ (M & K)
9.	~(A & B) ≡ (B ≡ ~C)	(A & B) ⊃ ~C
10.	A ⊃ [B ⊃ (A ⊃ B)]	B ⊃ [A ⊃ (B ⊃ A)]

Cap-3.pmd 67 13/07/07, 03:13 p.m.

B. Responda las siguientes preguntas.

1. Suponga que dos fórmulas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son semánticamente equivalentes. ¿Se puede afirmar lo mismo de $\sim\mathcal{P}$ y $\sim\mathcal{Q}$?
2. Suponga que dos fórmulas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son semánticamente equivalentes. Pruebe que en ese caso $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$ también son semánticamente equivalentes.
3. Suponga que dos fórmulas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son semánticamente equivalentes. Pruebe que en ese caso $\sim\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ es una tautología.

3.5 Consistencia semántica

La consistencia lógica es una propiedad, no de un enunciado, sino de un *conjunto* de ellos. Un conjunto de enunciados es lógicamente consistente si y sólo si es lógicamente posible que todos los elementos del conjunto sean verdaderos al mismo tiempo. En otras palabras, un conjunto consistente no tiene contradicciones internas que eliminen esa posibilidad lógica. La consistencia semántica se define de manera análoga, pero la posibilidad lógica está limitada a las propiedades veritativo-funcionales de los enunciados. Formalmente, definiremos la consistencia semántica de la siguiente manera:

> Un conjunto Γ de fórmulas de *LP* es ***semánticamente consistente en LP*** si y sólo si existe al menos una valuación bajo la cual todos los miembros del conjunto son verdaderos. Un conjunto es ***semánticamente inconsistente en LP*** si y sólo si no es semánticamente consistente.

La notación que utilizamos para referirnos a un conjunto de fórmulas es la siguiente: escribimos las fórmulas separadas por comas, y utilizamos corchetes al principio y al final para delimitar el conjunto. Así,

(9) $\{B \supset C, \sim C, H \vee B\}$

es el conjunto cuyos miembros son las fórmulas "$B \supset C$", "$\sim C$", y "$H \vee B$". Un conjunto sin miembros es un conjunto nulo o vacío, y se representa con el símbolo "∅". Utilizaremos la metavariable "Γ" para denotar cualquier conjunto de fórmulas de *LP*.

Para determinar si un conjunto es semánticamente consistente en *LP* es necesario construir una tabla de verdad para cada miembro del conjunto, y comparar los valores de verdad resultantes. Si existe alguna fila de la tabla de verdad en la que todos los miembros del conjunto sean verdaderos, el conjunto es semánticamente consistente. Si no existe tal fila, es inconsistente. Al igual que en el caso de la equivalencia semántica, para que las tablas de verdad de los miembros del conjunto sean comparables, el número de filas en las tablas debe estar basado en el número total de

Cap-3.pmd 68 13/07/07, 03:13 p.m.

fórmulas atómicas diferentes que aparecen en todas las fórmulas. Es decir, todas las tablas deben tener el mismo número de filas, así las fórmulas difieran individualmente en el número de fórmulas atómicas.

Consideremos la tabla de verdad del conjunto **(9)**:

B	C	H	B	⊃	C	~	C	H	∨	B
V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	V	F	F	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F	V	V	V	F
F	V	F	F	V	V	F	V	F	F	F
F	F	V	F	$\boxed{\text{V}}$	F	$\boxed{\text{V}}$	F	V	$\boxed{\text{V}}$	F
F	F	F	F	V	F	V	F	F	F	F

Podemos apreciar que existe al menos una valuación o fila de la tabla de verdad en la cual las tres fórmulas son verdaderas, a saber, la penúltima fila. Más precisamente, el conjunto **(9)** es semánticamente consistente cuando:

$$\mathcal{V}(\mathrm{B}) = \mathbf{F},\ \mathcal{V}(\mathrm{C}) = \mathbf{F} \text{ y } \mathcal{V}(\mathrm{H}) = \mathbf{V}$$

Consideremos ahora el siguiente conjunto:

(10) {~(A & B) ⊃ C, (A ⊃ ~B), ~C}

La siguiente tabla de verdad demuestra que el conjunto **(10)** es semánticamente inconsistente:

A	B	C	~	(A	&	B)	⊃	C	A	⊃	~	B	~	C
V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	F	F	V	F	V
V	V	F	F	V	V	V	V	F	V	F	F	V	V	F
V	F	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	F	F	V	V	V	F	V	F
F	V	V	V	F	F	V	V	V	F	V	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V	F	F	F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	F	F	F	V	V	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	F	F	F	F	F	V	V	F	V	F

No existe ninguna valuación bajo la cual las tres fórmulas del conjunto sean verdaderas; por lo tanto, según la definición, el conjunto es semánticamente inconsistente.

Cap-3.pmd 69 13/07/07, 03:13 p.m.

Ejercicio 3.3

Determine si los siguientes conjuntos de fórmulas son semánticamente consistentes usando el método de las tablas de verdad.

1. {A, B, C}
2. {(B ⊃ B) ⊃ A, ~B, ~A}
3. {B ≡ (C & D), ~C, ~B ⊃ B}
4. {A ⊃ B, B ⊃ C, A ⊃ C}
5. {~[B ∨ (A ⊃ C)], C ≡ (~B ∨ ~A), A ≡ (B ∨ C)}
6. {(A & B) & C, C ∨ (B ∨ A), A ≡ (B ⊃ C)}
7. {Y ∨ (Z & X), Z ≡ (Y ∨ X), X ∨ ~X}
8. {X ⊃ (Y ⊃ (Z ⊃ X)), Y ⊃ ~X}
9. {(M & N) ∨ (O ⊃ N), ~M, ~N}
10. {~(M & N), ~(N & O), ~(M & O), M ∨ (N & O)]}

3.6 Validez e implicación semántica

En el primer capítulo vimos que un argumento es deductivamente válido si y sólo si es imposible que sus premisas sean verdaderas y su conclusión falsa. En esta sección definiremos la noción de validez semántica en *LP*, la cual está basada en las propiedades veritativo-funcionales de los enunciados que conforman el argumento. Como hemos visto a lo largo de este capítulo, los conceptos semánticos definidos en *LP* son más restringidos que los que definimos en el capítulo inicial del libro. Por lo tanto, todo argumento semánticamente válido es deductivamente válido, pero no al contrario. Podemos definir la validez semántica en *LP* de la siguiente manera:

> Un argumento de *LP* es ***semánticamente válido en LP*** si y sólo si no existe ninguna valuación bajo la cual todas las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa.

El procedimiento para determinar la validez semántica de un argumento es el siguiente. Se construye un tabla de verdad para cada premisa y para la conclusión del argumento, y se busca una fila en la cual todas las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa. Si dicha fila existe, es un *contraejemplo* del argumento, y éste es semánticamente inválido. Si dicha fila no existe, el argumento es semánticamente válido. Consideremos, por ejemplo, el siguiente argumento:

(11) D ≡ (~H ∨ G)
G ≡ ~D
___
~D

Cap-3.pmd 70 13/07/07, 03:13 p.m.

Para poder comparar las diferentes fórmulas del argumento, debemos construir una tabla de verdad en la que el número de filas esté basado en el número total de fórmulas atómicas diferentes que existen en las premisas y la conclusión. En este caso tenemos tres fórmulas atómicas diferentes, "D", G" y "H", por lo cual la tabla debe tener ocho filas.

D	G	H	D	≡ ↓	(~	H	∨	G)	G	≡ ↓	~	D	~ ↓	D
V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	F	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V
V	F	F	V	$\boxed{V}$	V	F	V	F	F	$\boxed{V}$	F	V	$\boxed{F}$	V
F	V	V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	F	V	F
F	V	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	V	F	V	F	F	F	F	V	F	V	F
F	F	F	F	F	V	F	V	F	F	F	V	F	V	F

Como existe una línea de la tabla de verdad, la cuarta, en la que las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa, debemos concluir que el argumento es semánticamente inválido. Más precisamente, el argumento es semánticamente inválido cuando:

$$\mathscr{V}(\mathrm{D}) = \mathbf{V},\ \mathscr{V}(\mathrm{G}) = \mathbf{F} \text{ y } \mathscr{V}(\mathrm{H}) = \mathbf{F}$$

Al construir una tabla de verdad para determinar la validez o invalidez semántica de un argumento, hay un par de estrategias que hacen más fácil la tarea. En primer lugar, como lo que buscamos en una tabla de verdad de este tipo es una valuación en la cual las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa, sólo hace falta examinar aquellas valuaciones en las que la conclusión es falsa. Las valuaciones en las que la conclusión es verdadera son inocuas. Por eso es aconsejable comenzar la tabla resolviendo el valor de verdad de la conclusión. Una vez tengamos la columna solución de la conclusión, podemos limitarnos a resolver el valor de verdad de las premisas sólo en aquellas valuaciones en las que la conclusión sea falsa. El primer paso en la construcción de la tabla de verdad anterior sería:

Cap-3.pmd 71 13/07/07, 03:13 p.m.

D	G	H	D	≡	(~	H	∨	G)	G	≡	~	D	~	D	
V	V	V											F	V	
V	V	F											F	V	
V	F	V											F	V	
V	F	F											F	V	
F	V	V											V	F	*inocua*
F	V	F											V	F	*inocua*
F	F	V											V	F	*inocua*
F	F	F											V	F	*inocua*

En segundo lugar, debemos comenzar por resolver el valor de verdad de la premisa más simple. Si el valor de verdad de esa premisa bajo una valuación dada es **F**, podemos ignorar las demás premisas bajo esa valuación. Al fin y al cabo, estamos buscando una valuación bajo la cual *todas* las premisas sean verdaderas. Así, el segundo paso en la construcción de la tabla de verdad anterior sería:

D	G	H	D	≡	(~	H	∨	G)	G	≡	~	D	~	D	
V	V	V							V	F	F	V	F	V	*inocua*
V	V	F							V	F	F	V	F	V	*inocua*
V	F	V							F	V	F	V	F	V	
V	F	F							F	V	F	V	F	V	
F	V	V											V	F	*inocua*
F	V	F											V	F	*inocua*
F	F	V											V	F	*inocua*
F	F	F											V	F	*inocua*

Podemos repetir esta estrategia hasta llegar a la última premisa. Si el argumento es semánticamente válido, todas las líneas terminarán siendo inocuas. Si el argumento es semánticamente inválido, esta estrategia encontrará aquella valuación en la que todas las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa. La tabla de verdad resultante, en el ejemplo anterior, se vería así:

Cap-3.pmd 72 13/07/07, 03:13 p.m.

D	G	H	D	≡	(~	H	∨	G)	G	≡	~	D	~	D	
V	V	V							V	F	F	V	F	V	*inocua*
V	V	F							V	F	F	V	F	V	*inocua*
V	F	V	V	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	*inocua*
V	F	F	V	$\boxed{V}$	V	F	V	F	F	$\boxed{V}$	F	V	$\boxed{F}$	V	
F	V	V											V	F	*inocua*
F	V	F											V	F	*inocua*
F	F	V											V	F	*inocua*
F	F	F											V	F	*inocua*

Si el argumento es semánticamente inválido, como en este caso, basta con escribir la línea que contiene el contraejemplo al argumento:

D	G	H	D	≡	(~	H	∨	G)	G	≡	~	D	~	D
V	F	F	V	$\boxed{V}$	V	F	V	F	F	$\boxed{V}$	F	V	$\boxed{F}$	V

La tabla resultante es una ***tabla de verdad abreviada***. Con un poco de práctica, es posible encontrar estrategias similares para construir tablas de verdad abreviadas en el caso de los demás conceptos semánticos de *LP*. Sin embargo, en ningún caso es la estrategia tan clara como en el caso de las tablas de verdad para determinar si un argumento es semánticamente válido.

Aplicaremos la estrategia para construir tablas de verdad abreviadas en el caso del siguiente argumento:

(12) M ⊃ N
O ⊃ ~N
―――――
M ⊃ ~O

Comenzamos la tabla de verdad resolviendo el valor de verdad de la conclusión:

M	N	O	M	⊃	N	O	⊃	~	N	M	⊃	~	O	
V	V	V								V	F	F	V	
V	V	F								V	V	V	F	*inocua*
V	F	V								V	F	F	V	
V	F	F								V	V	V	F	*inocua*
F	V	V								F	V	F	V	*inocua*
F	V	F								F	V	V	F	*inocua*
F	F	V								F	V	F	V	*inocua*
F	F	F								F	V	V	F	*inocua*

Cap-3.pmd 73 13/07/07, 03:14 p.m.

Al obtener los valores de verdad de la conclusión, observamos que la conclusión sólo es falsa bajo dos valuaciones, la primera y la tercera. Por lo tanto, podemos limitarnos a esas dos valuaciones al buscar el valor de verdad de las premisas. Ahora bien, la primera premisa es un poco más simple que la segunda, así que podemos comenzar por ella. Para ahorrar espacio, en este paso sólo reproduciremos las primeras tres valuaciones de la tabla de verdad:

M	N	O	M	⊃	N	O	⊃	~	N	M	⊃	~	O	
V	V	V	V	V	V					V	F	F	V	
V	V	F	V	V	V					V	V	V	F	*inocua*
V	F	V	V	F	F					V	F	F	V	*inocua*

Bajo la tercera valuación, la primera premisa es falsa. Por lo tanto, sólo la primera valuación nos podría proporcionar un contraejemplo al argumento:

M	N	O	M	⊃	N	O	⊃	~	N	M	⊃	~	O	
V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	*inocua*
V	V	F	V	V	V					V	V	V	F	*inocua*
V	F	V	V	F	F					V	F	F	V	*inocua*
V	F	F								V	V	V	F	*inocua*
F	V	V								F	V	F	V	*inocua*
F	V	F								F	V	V	F	*inocua*
F	F	V								F	V	F	V	*inocua*
F	F	F								F	V	V	F	*inocua*

Bajo la primera valuación, la segunda premisa es falsa. Como lo muestra la tabla de verdad abreviada, hemos eliminado cualquier posibilidad de que las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa. Por lo tanto, el argumento **(12)** es semánticamente válido en *LP*.

Cuando un argumento es semánticamente válido, diremos que las premisas ***implican*** semánticamente a la conclusión, y que la conclusión es una ***consecuencia*** semántica de las premisas. La implicación semántica es una relación que existe entre un conjunto de fórmulas y una fórmula individual. La definimos de la siguiente manera:

> Un conjunto Γ de fórmulas de *LP* ***implica semánticamente*** a una fórmula $\mathcal{P}$ si y sólo si no existe ninguna valuación bajo la cual todos los miembros de Γ sean verdaderos y $\mathcal{P}$ sea falsa.

Cap-3.pmd 74 13/07/07, 03:14 p.m.

Utilizaremos el signo "$\models$" para denotar la implicación semántica. Si un conjunto de fórmulas $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, ..., \mathcal{P}_n\}$ implica semánticamente una fórmula $\mathcal{P}$, denotaremos esta relación como:

$$\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, ..., \mathcal{P}_n\} \models \mathcal{P}$$

La relación entre las nociones de validez y de implicación semántica puede ser formulada más estrictamente de la siguiente manera. Un argumento

$$\begin{array}{l} \mathcal{P}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{\mathcal{P}_n} \\ \mathcal{P} \end{array}$$

es semánticamente válido si y sólo si $\{\mathcal{P}_1, ..., \mathcal{P}_n\} \models \mathcal{P}$.

En el argumento **(12)** podemos expresar la relación de implicación semántica de la siguiente manera:

(12a) $\{M \supset N, O \supset {\sim}N\} \models$ "$M \supset {\sim}O$"

La fórmula implicada está entre comillas porque el signo "$\models$" no es un conector veritativo-funcional, sino que hace parte de nuestro metalenguaje. Su labor no es establecer una relación lógica entre las fórmulas, sino que se limita a indicarnos, en el metalenguaje, que la fórmula "$M \supset {\sim}O$" es una consecuencia semántica del conjunto formado por las fórmulas "$M \supset N$" y "$O \supset {\sim}N$"[4].

También podemos utilizar el signo de la implicación para indicar que una fórmula es una tautología. La justificación para este uso del signo de la implicación está contenida en la siguiente afirmación[5]:

Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LP* es una tautología de *LP* si y sólo si $\varnothing \models \mathcal{P}$.

4. Otra forma de entender por qué las fórmulas están entre comillas es utilizando la distinción entre ***uso*** y ***mención***. Existe una gran diferencia entre los siguientes dos enunciados:

(13) El letrero tiene nueve letras.

(14) "El letrero" tiene nueve letras.

En el primero, las palabras "el letrero" están siendo *usadas* en el lenguaje corriente para hacer referencia a algún letrero en particular. En el segundo, las palabras "el letrero" están siendo *mencionadas* en el metalenguaje, y hacen referencia a la expresión misma. El enunciado **(12a)** hace parte del metalenguaje, y las fórmulas están siendo mencionadas, no usadas; por eso deben ir entre comillas o agrupadas entre corchetes.

5. En el próximo capítulo mostraremos que esta afirmación se sigue de las definiciones de los conceptos de tautología e implicación semántica.

Cap-3.pmd 75 13/07/07, 03:14 p.m.

Podemos abreviar la expresión "$\varnothing \models \mathcal{P}$" como "$\models \mathcal{P}$". De este modo, el enunciado metalingüístico: "$\mathcal{P}$ es una tautología" se puede simbolizar simplemente como:

$$\models \mathcal{P}$$

Existe también una conexión interesante entre el concepto de tautología y el de validez semántica. Supongamos que tenemos un argumento en *LP* cuya conclusión es $\mathcal{P}$, y cuyas premisas son $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, ..., $\mathcal{T}$. Podemos crear la conjunción de todas las premisas del argumento:

$$\mathcal{Q} \,\&\, \mathcal{R} \,\&\, \mathcal{S} \,\&\, ... \,\&\, \mathcal{T}$$

Posteriormente, podemos crear una fórmula condicional en la cual esta conjunción sea el antecedente, y la conclusión el consecuente:

$$(\mathcal{Q} \,\&\, \mathcal{R} \,\&\, \mathcal{S} \,\&\, ... \,\&\, \mathcal{T}) \supset \mathcal{P}$$

Una fórmula de esta forma es llamada el ***condicional material correspondiente*** de un argumento. Formalmente, su definición es la siguiente:

> El ***condicional material correspondiente*** de un argumento de *LP* es la fórmula condicional cuyo antecedente es la conjunción de las premisas del argumento, y cuyo consecuente es la conclusión del argumento.

Por ejemplo, el condicional material correspondiente al argumento **(12)** es:

(12b) $[(M \supset N) \,\&\, (O \supset \sim N)] \supset (M \supset \sim O)$

Utilizando la noción de condicional material correspondiente, podemos establecer la relación entre las nociones de tautología y validez semántica:

> Un argumento de *LP* es semánticamente válido en *LP* si y sólo si su condicional material correspondiente es una tautología.

Esta afirmación puede ser utilizada para construir una prueba adicional de la validez o invalidez semántica de un argumento. Consideremos, por ejemplo, el argumento **(11)**. Para probar que el argumento es semánticamente inválido, probaremos que su condicional material correspondiente no es una tautología:

Cap-3.pmd 76 13/07/07, 03:14 p.m.

D	G	H	([D	≡	(~	H	∨	G)]	&	(G	≡	~	D))	⊃	~	D
V	V	V	V	V	F	V	V	V	F	V	F	F	V	V	F	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V	F	V	F	F	V	V	F	V
V	F	V	V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	V	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V	V	V	F	V	V	V	F	V	V	F
F	V	F	F	F	V	F	V	V	F	V	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	V	F	V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	F	V	F	V	F	F	F	F	V	F	V	V	F

En la cuarta valuación, el antecedente del condicional material es verdadero y el consecuente es falso. Por lo tanto, el condicional es falso bajo esa valuación y no es una tautología. Dada la definición de validez semántica en términos del condicional material correspondiente, debemos concluir que el argumento **(11)** no es semánticamente válido.

El método de prueba que utiliza el material condicional correspondiente requiere más trabajo que el método de las tablas de verdad abreviadas. Sin embargo, hay personas que se sienten más tranquilas si completan toda la tabla de verdad. Ambos métodos son igualmente efectivos.

Ejercicio 3.4

A. Construya una tabla de verdad completa para determinar si los siguientes argumentos son semánticamente válidos.

1. $(X \supset Y) \supset (Y \supset Z)$
   Y
   ———
   $X \supset Z$

2. $\sim(D \equiv A)$
   $\sim D$
   $\sim A$
   ———
   $B \;\&\; \sim B$

3. $\sim\sim A \supset \sim\sim B$
   $\sim B \supset \sim A$
   ———
   $B \supset A$

4. $G \vee (F \;\&\; \sim H)$
   $(H \supset F) \equiv G$
   $\sim G \vee F$
   ———
   $\sim(F \vee H)$

5. $$\begin{array}{l} D \supset (H \& P) \\ P \equiv H \\ {\sim}P \\ \hline {\sim}D \end{array}$$

6. $$\begin{array}{l} M \vee M \\ [{\sim}M \supset ({\sim}O \vee {\sim}N)] \& [({\sim}O \vee N) \vee ({\sim}M \vee N)] \\ \hline N \end{array}$$

7. $$\begin{array}{l} (P \equiv Q) \vee ({\sim}P \equiv Q) \\ \hline ({\sim}P \equiv {\sim}Q) \vee {\sim}(P \equiv Q) \end{array}$$

8. $$\begin{array}{l} [(A \& B) \& C] \vee ({\sim}A \supset {\sim}C) \\ A \supset B \\ B \supset C \\ \hline C \equiv B \end{array}$$

9. $$\begin{array}{l} (E \equiv {\sim}T) \& T \\ (T \vee [(B \supset E) \& B)] \supset {\sim}E \\ \hline T \supset {\sim}E \end{array}$$

10. $$\begin{array}{l} [R \& (S \vee T)] \equiv (R \vee S) \\ S \supset {\sim}S \\ \hline T \vee R \end{array}$$

B. En cada uno de los siguientes ejercicios use tablas de verdad *abreviadas* para determinar si los siguientes argumentos son semánticamente válidos.

1. $$\begin{array}{l} N \supset {\sim}N \\ (T \supset N) \supset T \\ \hline N \equiv {\sim}T \end{array}$$

2. $$\begin{array}{l} D \& E \\ {\sim}(D \& G) \\ \hline G \end{array}$$

3. $$\begin{array}{l} (A \vee V) \supset {\sim}(A \& V) \\ V \equiv (V \supset A) \\ \hline V \supset A \end{array}$$

4. $$\begin{array}{l} R \vee [S \supset (T \equiv R)] \\ (S \supset R) \& (T \supset S) \\ \hline T \& {\sim}S \end{array}$$

Cap-3.pmd 78 13/07/07, 03:14 p.m.

5. $F \,\&\, \sim[(G \,\&\, H) \equiv (H \supset F)]$
$G \supset \sim G$
$\sim H \supset H$

C. Simbolice cada uno de los siguientes argumentos y determine si es semánticamente válido construyendo una tabla de verdad abreviada.

1. El espeleólogo encontrará la salida de la cueva si las baterías de su linterna duran más de tres horas. Pero el espeleólogo no encontrará la salida de la cueva, así que las baterías de su linterna no duran más de tres horas.
2. Mucha gente cree que los polos se están derritiendo. Pero los polos se están derritiendo si y sólo si la temperatura del planeta está aumentando. Así que mucha gente cree que la temperatura del planeta está aumentando.
3. La primera línea de metro fue inaugurada en 1927, y si mi memoria no me falla, el planetario fue construido ese mismo año. No, mi memoria no me falla. El planetario fue construido en 1927 y el Museo de Arte Egipcio en 1928.
4. Los adolescentes pueden pensar si y sólo si pueden tener emociones. Si los adolescentes pueden tener emociones, también pueden tener deseos. Pero los adolescentes no pueden pensar si tienen deseos. Por lo tanto, los adolescentes no pueden pensar.
5. Si la inflación continúa estable, entonces los intereses tenderán a bajar; y si el consumo interno aumenta, la economía crecerá. Los intereses tenderán a bajar si y sólo si la economía no crece, y si no crece, entonces la inflación continuará estable. Por lo tanto, la inflación continuará estable.

3.7 La barra de Sheffer y la daga de Nicod*

Finalizaremos este capítulo considerando uno de los aspectos más interesantes del lenguaje *LP*: la posibilidad de expresar todos sus conectores lógicos en términos de un único conector. Hemos visto que en la lógica clásica el significado de una fórmula es simplemente sus condiciones de verdad. Por lo tanto, todas las fórmulas de la lógica clásica que tengan las mismas condiciones de verdad tienen el mismo significado. Por ejemplo, desde un punto de vista lógico es indiferente si al simbolizar un enunciado de la forma: "ni $\mathcal{P}$, ni $\mathcal{Q}$", escribimos: $\sim(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$, $\sim\mathcal{P} \,\&\, \sim\mathcal{Q}$ o alguna otra fórmula semánticamente equivalente. Lo que debemos considerar es si es posible encontrar un único conector que sirva como base para construir fórmulas semánticamente equivalentes a cualquier fórmula de *LP*. Si esto es posible, quedará demostrado que los demás conectores son lógicamente redundantes.

Comenzaremos por eliminar el conector lógico "$\equiv$". Recordemos que un bicondicional material es la conjunción de dos condicionales materiales, es decir, una fórmula que tenga la forma $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ es semánticamente equivalente a una que tenga la forma $(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q})$ & $(\mathcal{Q} \supset \mathcal{P})$. Por lo tanto, cualquier fórmula que contenga el conector lógico "$\equiv$" puede ser reemplazada por una fórmula semánticamente equivalente que no contenga dicho conector. Un sistema lógico que careciera del conector "$\equiv$" nos permitiría simbolizar exactamente los mismos enunciados, y por esa razón "$\equiv$" es lógicamente redundante.

Continuaremos con la reducción del lenguaje eliminando el conector "$\supset$". Una fórmula de la forma $\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$ es semánticamente equivalente a cualquier fórmula que tenga las siguientes formas lógicas: $\sim\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ o $\sim(\mathcal{P}$ & $\sim\mathcal{Q})$. La equivalencia es demostrada en la siguiente tabla:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$	↓ $\supset$	$\mathcal{Q}$	$\sim$	$\mathcal{P}$	↓ $\vee$	$\mathcal{Q}$	↓ $\sim$	$(\mathcal{P}$	&	$\sim$	$\mathcal{Q})$
V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	F	V	F	F	F	V	V	V	F
F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	F	V	F

La eliminación del conector "$\supset$" no impone limitaciones al lenguaje *LP*. Por lo tanto, el conector es lógicamente redundante.

Podemos continuar con la reducción del vocabulario de *LP* de la siguiente manera. Podríamos eliminar el conector "&" si consideramos que una fórmula de forma $\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$ es semánticamente equivalente a una de forma $\sim(\sim\mathcal{P} \vee \sim\mathcal{Q})$. O podríamos eliminar el conector "$\vee$" debido a que una fórmula de la forma $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ es semánticamente equivalente a una de la forma $\sim(\sim\mathcal{P}$ & $\sim\mathcal{Q})$. En síntesis, el lenguaje *LP* sólo requiere de dos de los cinco operadores lógicos que hemos considerado, la negación y la disyunción, o la negación y la conjunción. Más aún, cada uno de estos dos pares de operadores puede ser reducido a un nuevo operador que serviría de base para un nuevo lenguaje simbólico. La negación y la disyunción pueden ser reducidos a un operador conocido como la ***daga de Nicod***, el cual es simbolizado con una flecha vertical y tiene las mismas condiciones de verdad que $\sim(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$. La negación y la conjunción pueden ser reducidos a un operador conocido como la ***barra de Sheffer***, el cual es simbolizado con una barra vertical y tiene las mismas condiciones de verdad que $\sim(\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q})$. Estos operadores tienen las siguientes tablas de verdad características[6]:

6. En un artículo inédito, Peirce (1880) redujo todos los operadores del álgebra booleana a un solo operador. Sin conocer el artículo de Peirce, en 1913 Henry M. Sheffer demostró que todos los operadores de la lógica clásica se pueden expresar por medio de un único operador, al que llamó "*rejection*" (rechazo), y el cual simbolizó con el signo "$\wedge$". Sheffer le asignó a "$\wedge$" las condiciones de verdad de $\sim(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$, pero al final del artículo indicó que el operador también podía ser interpretado como $\sim(\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q})$. Jean Nicod (1917) utilizó los resultados obtenidos por Sheffer para demostrar que los axiomas de la lógica clásica formulados por Russell y

Cap-3.pmd 80 13/07/07, 03:14 p.m.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \downarrow \mathcal{Q}$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \mid \mathcal{Q}$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Inicialmente mostraremos cómo es posible reducir la negación a los operadores "$\downarrow$" y "$\mid$". Una fórmula $\sim\mathcal{P}$ es semánticamente equivalente tanto a $\mathcal{P} \downarrow \mathcal{P}$ como a $\mathcal{P} \mid \mathcal{P}$, como lo muestra la siguiente tabla:

$\mathcal{P}$	$\sim\mathcal{P}$	$\mathcal{P} \mid \mathcal{P}$
V	F	F
F	V	V

$\mathcal{P}$	$\sim\mathcal{P}$	$\mathcal{P} \downarrow \mathcal{P}$
V	F	F
F	V	V

La reducción de $\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$ al operador "$\mid$" es muy sencilla. Como la barra de Sheffer es la negación de una conjunción, la conjunción es la negación de la barra de Sheffer. Es decir, $\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$ es semánticamente equivalente a $\sim(\mathcal{P} \mid \mathcal{Q})$, que a su vez es equivalente a $(\mathcal{P} \mid \mathcal{Q}) \mid (\mathcal{P} \mid \mathcal{Q})$:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q}$	$(\mathcal{P} \mid \mathcal{Q})$	$\mid$	$(\mathcal{P} \mid \mathcal{Q})$
V	V	V	F	V	F
V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	V
F	F	F	V	F	V

Utilizando esta equivalencia semántica, es posible simbolizar ahora $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ en términos del operador "$\mid$". Sabemos que $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ es semánticamente equivalente a $\sim(\sim\mathcal{P} \,\&\, \sim\mathcal{Q})$, y ya vimos cómo expresar la negación y la conjunción en términos del operador "$\mid$". Comenzamos eliminando las dos negaciones dentro del paréntesis en $\sim(\sim\mathcal{P} \,\&\, \sim\mathcal{Q})$:

$$\sim(\mathcal{P} \mid \mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q} \mid \mathcal{Q})$$

A renglón seguido eliminamos la conjunción (el orden de eliminación es arbitrario):

$$\sim([(\mathcal{P} \mid \mathcal{P}) \mid (\mathcal{Q} \mid \mathcal{Q})] \mid [(\mathcal{P} \mid \mathcal{P}) \mid (\mathcal{Q} \mid \mathcal{Q})])$$

Whitehead en *Principia Mathematica* pueden ser reducidos a un solo axioma, el axioma de Nicod, cuyo único operador lógico es el operador de Sheffer. Nicod prefirió interpretar el operador como $\sim(\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q})$ porque la simbolización de $\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$ resultaba más simple, y lo simbolizó utilizando una barra vertical, signo que Sheffer sólo había usado en conexión con el álgebra booleana. Por esa razón, hoy en día el operador introducido por Sheffer es simbolizado con una barra vertical y es interpretado como $\sim(\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q})$.

Cap-3.pmd 81 13/07/07, 03:14 p.m.

Y finalmente eliminamos la negación al comienzo de la fórmula:

$$([(\mathcal{P} \mid \mathcal{P}) \mid (\mathcal{Q} \mid \mathcal{Q})] \mid [(\mathcal{P} \mid \mathcal{P}) \mid (\mathcal{Q} \mid \mathcal{Q})]) \mid ([(\mathcal{P} \mid \mathcal{P}) \mid (\mathcal{Q} \mid \mathcal{Q})] \mid [(\mathcal{P} \mid \mathcal{P}) \mid (\mathcal{Q} \mid \mathcal{Q})])$$

Como es evidente, debemos pagar un alto precio por la reducción del vocabulario de *LP*: el lenguaje se vuelve inmanejable. El uso de varios operadores lógicos tiene un gran valor práctico y por eso no es aconsejable prescindir de ellos.

4. Árboles de verdad de *LP*

Las tablas de verdad que estudiamos en el capítulo anterior son un método sistemático y mecánico que nos permite determinar las propiedades semánticas de las fórmulas, conjuntos y argumentos de *LP*. Su mayor virtud es que nos permite ver fácilmente cómo el valor de verdad de una fórmula se genera a partir del valor de verdad de las fórmulas atómicas que la componen. Sin embargo, las tablas de verdad tienen el defecto de ser inmanejables cuando la fórmula tiene más de 4 ó 5 fórmulas atómicas, y entre más valuaciones posibles haya, mayor será el riesgo de cometer un error.

En este capítulo estudiaremos un método semántico distinto, el *método de los árboles de verdad*, que al igual que las tablas de verdad, es mecánico y sistemático. A diferencia de las tablas de verdad, la complejidad de un árbol de verdad no depende directamente del número de fórmulas atómicas involucradas, y en la gran mayoría de los casos es posible construir un árbol de verdad relativamente sencillo así haya muchas fórmulas atómicas diferentes. Una ventaja adicional de los árboles de verdad es que, a diferencia de las tablas de verdad, pueden ser generalizados a la lógica de primer orden y a la lógica modal, sistemas que estudiaremos en capítulos subsiguientes[1].

4.1 Propiedades semánticas y consistencia semántica

El método de los árboles de verdad sólo puede ser utilizado para probar la consistencia semántica de un conjunto de fórmulas. Sin embargo, esto no constituye una limitación del método, pues como veremos en esta sección, es posible definir todas las propiedades semánticas de un enunciado y de un argumento en términos de la consistencia semántica de un conjunto de fórmulas.

Comenzaremos con las tautologías, las contradicciones y las fórmulas semánticamente indeterminadas. El primer paso para poder expresar las propiedades semánticas de una fórmula $\mathcal{P}$ de *LP* en términos de consistencia semántica consiste en crear el

1. El método de los árboles de verdad fue desarrollado por Raymond M. Smullyan (1968) a partir del método de las tablas semánticas ideadas por Evert W. Beth (1959). Su formulación más conocida, que es la que utilizaremos aquí, es la de Richard Jeffrey (1991).

Cap-4.pmd 83 20/06/07, 01:44 p.m.

conjunto unitario de $\mathcal{P}$, es decir, un conjunto en el cual $\mathcal{P}$ sea el único miembro. Utilizaremos este conjunto para establecer la siguiente afirmación:

Una fórmula $\mathcal{P}$ es una ***contradicción en LP*** si y sólo si el conjunto $\{\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente en *LP*.

Para probar esta afirmación, debemos probar (i) que si una fórmula $\mathcal{P}$ es una contradicción, entonces $\{\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente, y (ii) que si $\{\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente, entonces $\mathcal{P}$ es una contradicción[2]. Comencemos con (i). Primero asumimos que $\mathcal{P}$ es una contradicción. Entonces por definición no existe ninguna valuación bajo la cual $\mathcal{P}$ sea verdadera. Como $\mathcal{P}$ es el único miembro de $\{\mathcal{P}\}$, no existe ninguna valuación bajo la cual todos los miembros del conjunto sean verdaderos. Así que $\{\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente.

Para probar (ii), asumimos que $\{\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente. En ese caso, por definición no existe ninguna valuación bajo la cual todos los miembros del conjunto sean verdaderos. Como $\mathcal{P}$ es el único miembro de $\{\mathcal{P}\}$, no existe ninguna valuación bajo la cual $\mathcal{P}$ sea verdadera. En consecuencia, $\mathcal{P}$ es una contradicción.

La relación correspondiente en el caso de las tautologías es muy similar:

Una fórmula $\mathcal{P}$ es una ***tautología en LP*** si y sólo si el conjunto $\{\sim\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente en *LP*.

La prueba de esta afirmación es la siguiente. Primero probaremos que si $\mathcal{P}$ es una tautología, entonces $\{\sim\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente. Asumamos que $\mathcal{P}$ es una tautología. Entonces por definición $\mathcal{P}$ es verdadera bajo cualquier valuación. Como una fórmula es verdadera bajo una valuación si y sólo si su negación es falsa bajo esa misma valuación, se sigue que $\sim\mathcal{P}$ es falsa bajo cualquier valuación. En ese caso, no existe ninguna valuación bajo la cual todos los miembros del conjunto $\{\sim\mathcal{P}\}$ sean verdaderos, así que $\{\sim\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente.

Ahora probaremos que si $\{\sim\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente, entonces $\mathcal{P}$ es una tautología. Si asumimos que $\{\sim\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente, entonces no existe ninguna valuación bajo la cual todos los miembros del conjunto sean verdaderos. Como $\sim\mathcal{P}$ es el único miembro del conjunto, entonces no existe ninguna valuación bajo la cual $\sim\mathcal{P}$ sea verdadera. Como una negación es falsa bajo una valuación si y sólo si la fórmula negada es verdadera bajo esa misma valuación, entonces $\mathcal{P}$ es verdadera bajo cualquier valuación. Es decir, $\mathcal{P}$ es una tautología.

2. Todo enunciado en el que se use la frase "si y sólo si" es la conjunción de dos condicionales. Por lo tanto, para probar que la afirmación es verdadera, se debe probar por separado que cada enunciado condicional es verdadero.

Cap-4.pmd 84 20/06/07, 01:44 p.m.

Si una fórmula $\mathcal{P}$ es una contradicción si y sólo si $\{\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente, y es una tautología si y sólo si $\{\sim\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente, se sigue que:

> Una fórmula $\mathcal{P}$ es ***semánticamente indeterminada en LP*** si y sólo si tanto $\{\mathcal{P}\}$ como $\{\sim\mathcal{P}\}$ son semánticamente consistentes en *LP*.

Pasamos ahora a la noción de equivalencia semántica. El primer paso consiste en probar que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son semánticamente equivalentes si y sólo si $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ es una tautología. Primero asumimos que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son semánticamente equivalentes. En tal caso, por definición su valor de verdad es el mismo bajo cualquier valuación. Sabemos que el bicondicional es verdadero cuando sus componentes proposicionales inmediatos tienen el mismo valor de verdad. Por lo tanto, $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ es verdadera bajo cualquier valuación, es decir, es una tautología.

Ahora probaremos la afirmación en la otra dirección. Supongamos que $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ es una tautología. En tal caso, el bicondicional es verdadero bajo cualquier valuación. Sabemos que el bicondicional es verdadero cuando $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ tienen el mismo valor de verdad. Como dos proposiciones son semánticamente equivalentes si y solo si su valor de verdad es el mismo bajo cualquier valuación, $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son semánticamente equivalentes.

Habiendo probado que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son semánticamente equivalentes si y sólo si $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ es una tautología, podemos adoptar la siguiente definición:

> Dos fórmulas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son ***semánticamente equivalentes en LP*** si y sólo si $\{\sim(\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q})\}$ es semánticamente inconsistente en *LP*.

La prueba de esta afirmación es esencialmente la misma que la de la definición de una tautología en términos de inconsistencia semántica, sólo que en este caso la tautología tiene la forma $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$.

Finalmente, estableceremos la relación entre la noción de consistencia semántica y la nociones de implicación y validez semántica. Si Γ es un conjunto de fórmulas de *LP* y $\mathcal{P}$ es cualquier fórmula de *LP*, podemos formar un conjunto que contenga a $\mathcal{P}$ y a todos los miembros de Γ, es decir, la *unión* de Γ y $\{\mathcal{P}\}$:

$$\Gamma \cup \{\mathcal{P}\}$$

Si Γ es $\varnothing$, el conjunto nulo o vacío, entonces $\Gamma \cup \{\mathcal{P}\}$ es simplemente $\{\mathcal{P}\}$. Y si $\mathcal{P}$ es un elemento de Γ, entonces $\Gamma \cup \{\mathcal{P}\}$ es simplemente Γ. Utilizaremos estos conceptos para definir la noción de implicación semántica en términos de inconsistencia semántica:

Cap-4.pmd 85 20/06/07, 01:44 p.m.

> Un conjunto Γ de fórmulas de *LP* ***implica semánticamente*** a una fórmula $\mathcal{P}$ ($\Gamma \models \mathcal{P}$) si y sólo si $\Gamma \cup \{\sim\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente en *LP*.

Para probar esta afirmación, primero asumimos que $\Gamma \models \mathcal{P}$. Entonces por definición no existe ninguna valuación bajo la cual todos los miembros de Γ sean verdaderos y $\mathcal{P}$ sea falsa. Como sabemos que $\sim\mathcal{P}$ es verdadera bajo una valuación si y sólo si $\mathcal{P}$ es falsa bajo esa misma valuación, se sigue que no hay ninguna valuación bajo la cual todos los miembros de Γ sean verdaderos y $\sim\mathcal{P}$ sea verdadera. Pero en ese caso no habrá ninguna valuación bajo la cual todos los miembros de $\Gamma \cup \{\sim\mathcal{P}\}$ sean verdaderos. Por lo tanto, $\Gamma \cup \{\sim\mathcal{P}\}$ será semánticamente inconsistente. La otra dirección de la prueba la dejamos como ejercicio.

En el capítulo anterior vimos que las nociones de validez y de implicación semántica están íntimamente ligadas. Un argumento

$$\begin{array}{l} \mathcal{P}_1 \\ . \\ . \\ \mathcal{P}_n \\ \hline \mathcal{Q} \end{array}$$

es semánticamente válido si y sólo si $\{\mathcal{P}_1, ..., \mathcal{P}_n\} \models \mathcal{P}$. Esta definición nos permite relacionar los conceptos de validez y consistencia semántica:

> Un argumento de *LP* es ***semánticamente válido en LP*** si y sólo si el conjunto que consiste de las premisas y la negación de la conclusión es semánticamente inconsistente en *LP*.

Ejercicio 4.1

Escriba una prueba para cada una de las siguientes afirmaciones. Es permisible utilizar en las pruebas las definiciones introducidas en esta sección.

1. Si $\Gamma \cup \{\sim\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente, entonces $\Gamma \models \mathcal{P}$.
2. Una fórmula es una tautología si y sólo si $\varnothing \models \mathcal{P}$.
3. $\Gamma \models \mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\mathcal{P}\} \models \mathcal{Q}$.
4. Si Γ es semánticamente inconsistente, entonces Γ implica semánticamente a cualquier fórmula de *LP*.

Cap-4.pmd 86 20/06/07, 01:44 p.m.

5. Si Γ es un conjunto de fórmulas de *LP* y $\mathcal{P}$ es una contradicción, entonces $\Gamma \cup \{\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente.
6. Si Γ es semánticamente consistente y $\mathcal{P}$ es una tautología, entonces $\Gamma \cup \{\mathcal{P}\}$ es semánticamente consistente.
7. Si $\Gamma \models \mathcal{P}$ y $\Gamma \models \sim\mathcal{P}$, entonces Γ es semánticamente inconsistente.
8. Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son semánticamente equivalentes, entonces para cualquier fórmula $\mathcal{R}$ en *LP*, $\{\mathcal{P}\} \models \mathcal{R}$ si y sólo si $\{\mathcal{Q}\} \models \mathcal{R}$.

4.2 La estructura de un árbol de verdad

Un árbol de verdad para un conjunto finito de fórmulas de *LP* nos permite determinar si el conjunto es semánticamente consistente. A diferencia de las tablas de verdad, que muestran todas las valuaciones posibles de una fórmula, el árbol sólo despliega aquellas valuaciones bajo las cuales las fórmulas en el conjunto son verdaderas. El árbol también hace manifiestas las contradicciones que puede haber entre las condiciones de verdad de las fórmulas del conjunto, y nos permite ver en cuáles casos estas contradicciones son insalvables, es decir, en cuales casos se trata de un conjunto inconsistente. Consideremos el siguiente conjunto:

(1) {A & ~B, ~C}

El primer paso en la construcción de un árbol de verdad consiste en listar los miembros del conjunto en una columna que servirá de “tronco” para el árbol:

A & ~B
~C

Lo que queremos saber es si el conjunto que contiene a estas fórmulas es semánticamente consistente, es decir, si existe alguna valuación bajo la cual todas las fórmulas en esta columna son verdaderas. La primera fórmula en la columna es una conjunción, y hemos visto que la conjunción es verdadera si y sólo si ambas fórmulas son verdaderas. Gráficamente, representamos esta doble condición escribiendo una fórmula encima de la otra. Así, al analizar la conjunción, obtenemos:

A & ~B ✓
~C
A
~B

Añadimos una marca a la conjunción para indicar que esa fórmula ya ha sido *descompuesta*, es decir, que ya hemos desplegado sus condiciones de verdad. La columna resultante contiene una fórmula atómica, la negación de dos fórmulas atómicas, y una

Cap-4.pmd 87 20/06/07, 01:44 p.m.

fórmula descompuesta. Cuando un árbol sólo contiene este tipo de fórmulas, es decir, fórmulas compuestas que han sido descompuestas, y fórmulas atómicas o sus negaciones, el árbol está terminado y estamos en condiciones de determinar si el conjunto en cuestión es semánticamente consistente. El árbol se debe leer de la siguiente manera: una fórmula atómica sin negación indica que a esa fórmula se le debe asignar el valor de verdad **V**; y la negación de una fórmula atómica indica que a esa fórmula se le debe asignar el valor de verdad **F**. Según el árbol que acabamos de construir, debemos asignarle a “A” el valor **V**, y a “B” y “C” el valor **F**. Bajo estas valuaciones, todas las fórmulas del conjunto son verdaderas. Es decir, la valuación bajo la cual el conjunto {A & ~B, ~C} es semánticamente consistente es la siguiente:

$$\mathcal{V}(\mathrm{A}) = \mathbf{V},\ \mathcal{V}(\mathrm{B}) = \mathbf{F} \text{ y } \mathcal{V}(\mathrm{C}) = \mathbf{F}$$

La mayoría de los árboles de verdad requieren varias ramas para poder descomponer todas las fórmulas compuestas que hacen parte del conjunto. Consideremos el siguiente ejemplo:

(2) {A & ~B, A ∨ C}

La primera parte del árbol no ofrece dificultad. Listamos los miembros del conjunto, y descomponemos la conjunción, tal y como lo hicimos en el primer ejemplo:

A & ~B✓
A ∨ C
A
~B

Pero el árbol no está completo aún, pues todavía existe una fórmula compuesta que no ha sido descompuesta. Para descomponer la disyunción, debemos encontrar una forma de mostrar las condiciones bajo las cuales ésta sería verdadera. Sería un error escribir sus fórmulas atómicas una encima de la otra, pues estaríamos afirmando que ambas deben ser verdaderas. Como sabemos, la disyunción es verdadera si y sólo si *al menos uno* de sus componentes proposicionales lo es. Es decir, hay dos formas en que la disyunción puede ser verdadera. Para representar estas dos posibilidades, debemos formar dos ramas distintas:

1	A & ~B✓	
2	A ∨ C✓	
3	A	
4	~B	
5	A	C

Cap-4.pmd 88 20/06/07, 01:44 p.m.

El árbol está completo. Enumeraremos las líneas del árbol para facilitar su lectura. El paso final consiste en inspeccionar las ramas del árbol para determinar cuáles son los valores de verdad que se le debe asignar a cada una de las fórmulas atómicas. Una ***rama*** consiste de todas las fórmulas que estén en el trayecto que lleva de una fórmula en la última línea hasta la fórmula en la primera línea. En este caso, las fórmulas en las cuatro primeras líneas son miembros comunes de las dos ramas del árbol. Si examinamos la rama de la derecha, encontramos que debemos asignar el valor de verdad **V** a "A" y a "C", y el valor de verdad **F** a "B". Es decir, el conjunto es semánticamente consistente cuando:

$$\mathcal{V}(\mathrm{A}) = \mathbf{V},\ \mathcal{V}(\mathrm{B}) = \mathbf{F} \text{ y } \mathcal{V}(\mathrm{C}) = \mathbf{V}$$

El examen de la rama de la izquierda nos confirma la asignación de valores de verdad para "A" y para "B", pero "C" no está presente en esa rama. ¿Qué debemos hacer en ese caso? Si una fórmula atómica no aparece en una rama terminada, se le puede asignar cualquier valor de verdad. La fórmula "C" puede ser verdadera, como lo confirma la rama de la derecha, pero también puede ser falsa. Por lo tanto, el conjunto es semánticamente consistente bajo cualquiera de las siguientes dos valuaciones:

$$\mathcal{V}(\mathrm{A}) = \mathbf{V},\ \mathcal{V}(\mathrm{B}) = \mathbf{F} \text{ y } \mathcal{V}(\mathrm{C}) = \mathbf{V}$$
$$\mathcal{V}(\mathrm{A}) = \mathbf{V},\ \mathcal{V}(\mathrm{B}) = \mathbf{F} \text{ y } \mathcal{V}(\mathrm{C}) = \mathbf{F}$$

La siguiente tabla de verdad nos confirma que el conjunto {A & ~B, A ∨ C} es semánticamente consistente bajo esas dos valuaciones:

A	B	C	A	&	~	B	A	∨	C
V	V	V	V	F	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	V	F
V	F	V	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	V	F	F	F	F

Consideremos otro ejemplo. Usaremos el método de los árboles de verdad para determinar si el siguiente conjunto es semánticamente consistente:

(3) {A & ~B, ~A}

Cap-4.pmd 89 20/06/07, 01:44 p.m.

Comenzamos. como en el caso anterior, por hacer una lista numerada de los miembros del conjunto:

1	A & ~B
2	~A

A continuación descomponemos la conjunción y obtenemos:

1	A & ~B✓
2	~A
3	A
4	~B
	×

El árbol está terminado porque sólo contiene fórmulas descompuestas, y fórmulas atómicas o sus negaciones. Ahora bien, si tratamos de recuperar los valores de verdad que le debemos asignar a las fórmulas atómicas, nos encontramos con un problema. Sabemos que "B" debe ser falsa, pero, ¿qué valor de verdad le asignamos a la fórmula "A"? El árbol nos dice que "A" debe ser tanto verdadera como falsa, lo cual es imposible. Es decir, el árbol nos muestra que existe una contradicción insalvable en las condiciones de verdad de las fórmulas del conjunto, y por ende tenemos que concluir que el conjunto {A & ~B, ~A} es semánticamente inconsistente.

Cuando una rama contiene al menos una contradicción, decimos que es una ***rama cerrada*** y escribiremos una equis al final de la rama. Si la rama no contiene contradicciones, es una ***rama abierta***, y si además sólo contiene fórmulas descompuestas, y fórmulas atómicas o sus negaciones, decimos que es una ***rama abierta completa***. Un ***árbol de verdad completo*** es uno en el que todas las ramas son ramas cerradas o ramas abiertas completas. Si todas las ramas son ramas cerradas, el conjunto correspondiente es semánticamente inconsistente y diremos que tiene un ***árbol de verdad cerrado***. Si el árbol tiene al menos una rama abierta completa, el conjunto es semánticamente consistente y diremos que tiene un ***árbol de verdad abierto***. Resumimos estos resultados en las siguientes definiciones:

> Una rama de un árbol de verdad de *LP* es una ***rama cerrada*** si y sólo si contiene una fórmula $\mathcal{P}$ y su negación ~$\mathcal{P}$.
>
> Una rama de un árbol de verdad de *LP* es una ***rama abierta completa*** si y sólo si no es una rama cerrada y sólo contiene fórmulas descompuestas, fórmulas atómicas o sus negaciones.
>
> Un árbol de verdad de *LP* es un ***árbol de verdad abierto*** si y sólo si contiene al menos una rama abierta completa.

Cap-4.pmd 90 20/06/07, 01:44 p.m.

> Un árbol de verdad de *LP* es un ***árbol de verdad cerrado*** si y sólo si todas sus ramas son ramas cerradas.
>
> Un conjunto finito Γ de fórmulas de *LP* es ***semánticamente consistente*** si y sólo si Γ tiene un árbol de verdad abierto.
>
> Un conjunto Γ de fórmulas de *LP* es ***semánticamente inconsistente*** si y sólo si un subconjunto finito de Γ tiene un árbol de verdad cerrado[3].

Al construir un árbol de verdad no existe ninguna regla que nos diga cuál es el orden en que se deben descomponer las fórmulas complejas. En el ejemplo **(2)**, hubiéramos podido descomponer la disyunción primero:

1	A & ~B	
2	A ∨ C✓	
3	A	C

Sin embargo, al descomponer "A & ~B" hubiéramos tenido que incluir sus componentes en ambas ramas:

1	A & ~B✓	
2	A ∨ C✓	
3	A	C
4	A	A
5	~B	~B

Cada rama debe desplegar las valuaciones bajo las cuales todas las fórmulas en la rama son verdaderas. Como "A & ~B" hace parte de ambas ramas, debemos escribir en ambas ramas bajo cuál valuación es verdadera. Para evitar esta duplicación, siempre es mejor descomponer primero aquellas fórmulas que no requieren la introducción de más ramas, y posponer la ramificación hasta cuando ésta sea inevitable. Esta recomendación sólo se hace para ahorrar esfuerzo y papel, pero el orden de descomposición no tiene ningún efecto sobre la información semántica que despliega el árbol.

3. Los árboles de verdad que presentamos aquí son generados a partir de conjuntos finitos. Sin embargo, es posible probar que un conjunto *infinito* de fórmulas es semánticamente inconsistente si y sólo si uno de sus subconjuntos finitos es semánticamente inconsistente. Naturalmente, el resultado opuesto no es cierto. Si un subconjunto finito de un conjunto infinito de fórmulas tiene un árbol de verdad con una rama abierta completa, esto solo demuestra la consistencia semántica de ese subconjunto, no del conjunto infinito.

Cap-4.pmd 91 20/06/07, 01:44 p.m.

Como se puede apreciar en este último árbol, las valuaciones que se pueden leer en él son las mismas que desplegaba el árbol original.

4.3 Reglas para la conjunción, la disyunción y la negación

Las reglas que hemos utilizado para descomponer las conjunciones y disyunciones en los ejemplos anteriores se pueden esquematizar de la siguiente manera:

Descomposición de la conjunción (&)

$$\begin{array}{c} \mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q} \checkmark \\ \mathcal{P} \\ \mathcal{Q} \end{array}$$

Descomposición de la disyunción ($\vee$)

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \checkmark & \\ / & & \backslash \\ \mathcal{P} & & \mathcal{Q} \end{array}$$

También introduciremos una regla para descomponer la doble negación de una fórmula. Una fórmula de la forma $\sim\sim\mathcal{P}$ es verdadera si y sólo si $\mathcal{P}$ es verdadera. Por lo tanto:

Descomposición de la doble negación ($\sim\sim$)

$$\begin{array}{c} \sim\sim\mathcal{P} \checkmark \\ \mathcal{P} \end{array}$$

Las reglas para la conjunción y la disyunción nos permiten formular reglas para descomponer la negación de una conjunción o de una disyunción. En el capítulo 2 establecimos que una fórmula de la forma $\sim(\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q})$ es semánticamente equivalente a $\sim\mathcal{P} \vee \sim\mathcal{Q}$. Esto nos permite introducir la siguiente regla:

Descomposición de la negación de la conjunción ($\sim$&)

$$\begin{array}{ccc} & \sim(\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q}) \checkmark & \\ / & & \backslash \\ \sim\mathcal{P} & & \sim\mathcal{Q} \end{array}$$

De la misma manera, una fórmula de la forma $\sim(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ es semánticamente equivalente a $\sim\mathcal{P} \,\&\, \sim\mathcal{Q}$. Si aplicamos la regla para la descomposición de conjunciones a esta fórmula, obtenemos:

Cap-4.pmd 92 20/06/07, 01:44 p.m.

Descomposición de la negación de la disyunción ($\sim\vee$)

$$\sim(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \checkmark$$
$$\sim\mathcal{P}$$
$$\sim\mathcal{Q}$$

Estas reglas nos permiten descomponer cualquier fórmula que contenga los operadores lógicos "~", "&" y "∨". Consideremos un ejemplo un poco más complejo que los anteriores. Construiremos el árbol de verdad del siguiente conjunto:

(4) {~(G ∨ ~F), F & ~G, (G & F) ∨ (G & ~F)}

1	~(G ∨ ~F) ✓		MC
2	F & ~G ✓		MC
3	(G & F) ∨ (G & ~F) ✓		MC
4	F		2 (&)
5	~G		2 (&)
6	~G		1 (~∨)
7	~~F✓		1 (~∨)
8	F		7 (~~)
9	(G & F) ✓	(G & ~F) ✓	3 (∨)
10	G	G	9 (&)
11	F	~F	9 (&)
	×	×	

A la derecha del árbol hemos añadido una columna que nos indica, en cada paso, cuál fórmula está siendo descompuesta y cuál regla se ha usado para descomponerla. En aras de la claridad, sólo descompondremos una fórmula a la vez. La única excepción es si hay varias fórmulas que se descomponen con la misma regla en diferentes ramas pero en la misma línea del árbol, como ocurre aquí con "(G & F)" y "(G & ~F)" en la línea 9. En tales casos, todas las fórmulas pueden ser descompuestas simultáneamente. Finalmente, las letras "MC" en las tres primeras líneas significan "miembro del conjunto".

Si examinamos el árbol que hemos construido, vemos que ambas ramas están cerradas y debemos concluir que el conjunto {~(G ∨ ~F), F & ~G, (G & F) ∨ (G & ~F)} es semánticamente inconsistente.

Cap-4.pmd 93 20/06/07, 01:44 p.m.

Ejercicio 4.2

Use el método de los árboles de verdad para determinar si los siguientes conjuntos son semánticamente consistentes. Si el conjunto es consistente, especifique cuáles son las valuaciones bajo las cuales todos los elementos del conjunto son verdaderos.

1. {~(F ∨ G), F ∨ G}
2. {~(~F ∨ G), F ∨ ~G}
3. {~(A ∨ B), A ∨ ~B}
4. {~[(A ∨ ~A) & B]}
5. {M & (N & O), ~[M & (N & O)]}
6. {M & (N & ~O), ~[M & (N & O)]}
7. {~F ∨ (D & E), F, ~(D & E)}
8. {~(~D ∨ E), D ∨ ~E, ~(~E & ~D)}
9. {(~R & ~S) & [(S ∨ ~U) & (U ∨ ~T)]}
10. {~(~R ∨ ~S), ~[R & ~(S & T)], R ∨ (S ∨ T)}
11. {(H ∨ ~I) & [(I ∨ ~J) & (J ∨ ~K)]}
12. {H ∨ (I ∨ J), ~(H ∨ I), ~(I & J), ~(H & J)}

4.4 Reglas para el condicional y el bicondicional

A pesar de que las reglas que introdujimos en la sección anterior son suficientes para descomponer cualquier fórmula, pues cualquier fórmula que contenga un condicional o un bicondicional puede ser expresada en términos de conjunciones y disyunciones, es conveniente introducir una serie de reglas específicas para estos conectores proposicionales.

Sabemos que cualquier fórmula de la forma $\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$ es verdadera si el antecedente es falso o si el consecuente es verdadero. En otras palabras, $\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$ es semánticamente equivalente a $\sim\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$. Podemos usar este hecho para establecer la siguiente regla:

Descomposición del condicional (⊃)

$$\mathcal{P} \supset \mathcal{Q} \checkmark$$

$$\sim\mathcal{P} \qquad\qquad \mathcal{Q}$$

La negación de una fórmula condicional es verdadera si la fórmula es falsa, y eso sólo ocurre cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Es decir, cualquier fórmula de la forma $\sim(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q})$ es semánticamente equivalente

Cap-4.pmd 94 20/06/07, 01:44 p.m.

a una de la forma $\mathcal{P}$ & ~$\mathcal{Q}$. Así, la regla para descomponer la negación de un condicional es:

Descomposición de la negación del condicional $(\sim\supset)$

$$\begin{array}{c} \sim(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}) \checkmark \\ \mathcal{P} \\ \sim\mathcal{Q} \end{array}$$

Pasamos ahora a las reglas para el bicondicional. Un bicondicional es verdadero cuando sus componentes proposicionales son ambos verdaderos o ambos falsos. Es decir, una fórmula de la forma $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ es semánticamente equivalente a $(\mathcal{P}\ \&\ \mathcal{Q}) \vee (\sim\mathcal{P}\ \&\ \sim\mathcal{Q})$. La regla está basada en esta equivalencia:

Descomposición del bicondicional $(\equiv)$

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{P} \equiv \mathcal{Q} \checkmark & \\ / & & \backslash \\ \mathcal{P} & & \sim\mathcal{P} \\ \mathcal{Q} & & \sim\mathcal{Q} \end{array}$$

Dado que el bicondicional es falso bajo dos valuaciones –cuando sus componentes proposicionales tienen valor de verdad diferente– la regla para descomponer la negación del bicondicional también tiene dos ramas:

Descomposición de la negación del bicondicional $(\sim\equiv)$

$$\begin{array}{ccc} & \sim(\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}) \checkmark & \\ / & & \backslash \\ \mathcal{P} & & \sim\mathcal{P} \\ \sim\mathcal{Q} & & \mathcal{Q} \end{array}$$

Algunos ejemplos nos permitirán apreciar cómo se deben utilizar las reglas para el condicional y el bicondicional. Consideremos un árbol de verdad para el siguiente conjunto:

Cap-4.pmd 95 20/06/07, 01:44 p.m.

(5) $\{K \supset L, L \supset K, \sim K\}$

1		$K \supset L$ ✓			MC
2		$L \supset K$ ✓			MC
3		$\sim K$			MC
4	$\sim K$		L		1 ($\supset$)
5	$\sim L$	K	$\sim L$	K	2 ($\supset$)
		×	×	×	

Una de las principales estrategias en la construcción de un árbol de verdad es descomponer primero aquellas fórmulas que no resulten en ramificaciones. En este caso, las dos fórmulas que se deben descomponer requieren la introducción de dos ramas, así que aparentemente no tiene importancia cuál de las dos descompongamos primero. Sin embargo, hay una segunda consideración que se debe tener en cuenta: debemos tratar de descomponer primero aquellas fórmulas que generen contradicciones para así poder cerrar la rama en la que éstas se presenten. Si en el ejemplo anterior descomponemos la segunda fórmula primero, no tenemos necesidad de continuar desarrollando la rama de la derecha pues vemos que existe una contradicción entre "K" y "~K":

1		$K \supset L$ ✓		MC
2		$L \supset K$ ✓		MC
3		$\sim K$		MC
4	$\sim L$		K	2 ($\supset$)
			×	
5	$\sim K$	L		1 ($\supset$)
		×		

No sería un error continuar desarrollando la rama de la derecha en el paso 4, pero sí sería inoficioso pues no hay nada que podamos agregar que elimine la contradicción existente entre "K" y "~K".

En ambos casos el árbol resultante nos indica que el conjunto $\{K \supset L, L \supset K, \sim K\}$ es semánticamente consistente. El conjunto es consistente cuando:

$$\mathcal{V}(K) = \mathbf{F} \text{ y } \mathcal{V}(L) = \mathbf{F}$$

Cap-4.pmd 96 20/06/07, 01:44 p.m.

El siguiente ejemplo nos muestra cómo se deben usar las reglas para el bicondicional. Construiremos un árbol de verdad para el conjunto:

(6) {B, ~C, B ≡ A, A ≡ C}

1		B		MC
2		~C		MC
3		B ≡ A ✓		MC
4		A ≡ C ✓		MC
5		B	~B	3 (≡)
6		A	~A	3 (≡)
			×	
7	A	~A		4 (≡)
8	C	~C		4 (≡)
	×	×		

El árbol es cerrado, por lo tanto el conjunto es semánticamente inconsistente. En este caso el orden de descomposición no tiene ninguna importancia práctica. Si descomponemos la cuarta fórmula primero, también obtenemos dos ramas, una de las cuales se puede cerrar inmediatamente. No ocurre lo mismo con el siguiente ejemplo:

(7) {B ≡ C, ~(A ≡ B), ~A}

1		B ≡ C ✓			MC
2		~(A ≡ B) ✓			MC
3		~A			MC
4	A		~A		2 (~≡)
5	~B		B		2 (~≡)
	×				
6		B		~B	1 (≡)
7		C		~C	1 (≡)
				×	

Si en vez de comenzar el árbol descomponiendo la segunda fórmula, comenzamos con la primera, no se generará ninguna contradicción en la rama izquierda. En consecuencia, tenemos que descomponer la primera fórmula en ambas ramas, generando así un árbol de cuatro ramas:

1		$B \equiv C$ ✓			MC
2		$\sim(A \equiv B)$ ✓			MC
3		$\sim A$			MC
4	B		~B		1 (≡)
5	C		~C		1 (≡)
6	A	~A	A	~A	2 (~≡)
7	~B	B	~B	B	2 (~≡)
	×		×	×	

A pesar de la diferencia entre los dos árboles, el resultado final es el mismo: existe una rama abierta completa, lo cual nos indica que el conjunto {B ≡ C, ~(A ≡ B), ~A} es semánticamente consistente. La valuación bajo la cual todos los miembros del conjunto son verdaderos es:

$$\mathscr{V}(A) = \mathbf{F},\ \mathscr{V}(B) = \mathbf{V} \text{ y } \mathscr{V}(C) = \mathbf{V}$$

Existe una tercera consideración importante en la construcción de un árbol de verdad: podemos dejar incompleto un árbol de verdad si ya hemos obtenido la respuesta que estábamos buscando. Consideremos el caso del siguiente conjunto:

(8) {R ⊃ (S ≡ T), ~(T ⊃ R)}

1		R ⊃ (S ≡ T) ✓		MC
2		~(T ⊃ R) ✓		MC
3		T		2 (~⊃)
4		~R		2 (~⊃)
5	~R		S ≡ T	1 (⊃)

Al llegar a este punto podríamos continuar con la descomposición de la fórmula "S ≡ T", pero no hace falta hacerlo si lo único que queremos saber es si el conjunto es semánticamente consistente. La rama de la izquierda es una rama abierta completa, lo cual nos indica que la respuesta es afirmativa. El conjunto es semánticamente consistente cuando:

$$\mathscr{V}(R) = \mathbf{F},\ \mathscr{V}(S) = \mathbf{V} \text{ y } \mathscr{V}(T) = \mathbf{V}$$
$$\mathscr{V}(R) = \mathbf{F},\ \mathscr{V}(S) = \mathbf{F} \text{ y } \mathscr{V}(T) = \mathbf{V}$$

Cap-4.pmd 98 20/06/07, 01:44 p.m.

El valor de verdad de “S” puede ser **V** o **F**, pues no aparece en esa rama. El desarrollo de la rama de la derecha sólo nos puede servir para tratar de encontrar valuaciones adicionales en las que el conjunto sea semánticamente consistente.

Podemos resumir las estrategias para la construcción de árboles de verdad en el siguiente cuadro:

Estrategia 1
Descomponer primero aquellas fórmulas que no resulten en ramificaciones.

Estrategia 2
Descomponer primero aquellas fórmulas que generen contradicciones para poder cerrar el mayor número posible de ramas en cada paso.

Estrategia 3
Desarrollar el árbol sólo hasta obtener la respuesta a la pregunta formulada.

Estrategia 4
Cuando ninguna de las anteriores estrategias sean aplicables, descomponer las fórmulas más complejas primero.

Ejercicio 4.3

Use el método de los árboles de verdad para determinar si los siguientes conjuntos son semánticamente consistentes. Si el conjunto es consistente, especifique cuáles son las valuaciones bajo las cuales todos los elementos del conjunto son verdaderos.

1. $\{\sim(J \supset K), \sim(K \supset J)\}$
2. $\{K \equiv \sim J, \sim K\}$
3. $\{C \equiv A, \sim A\}$
4. $\{\sim[\sim A \supset (C \supset E)], A \supset E\}$
5. $\{\sim[(M \supset \sim N) \supset (N \supset M)], \sim(\sim M \supset \sim N)\}$
6. $\{N \equiv M, \sim N, M\}$
7. $\{C \equiv A, \sim(C \supset A)\}$
8. $\{(C \equiv A) \equiv \sim C\}$
9. $\{B \equiv A, A \equiv C, \sim(B \supset C)\}$
10. $\{A \supset \sim(A \equiv C), \sim(A \supset C)\}$
11. $\{Z \supset (X \equiv \sim Y), \sim(Z \equiv X)\}$

12. $\{X \supset Y, Y \supset X, \sim(X \equiv Y)\}$
13. $\{R \equiv (\sim S \equiv T), \sim R \supset (S \supset \sim T), \sim(R \supset \sim T)\}$
14. $\{\sim[R \supset (S \equiv T)], R \equiv \sim T, R \equiv S\}$

4.5 Tautologías, contradicciones y fórmulas indeterminadas

En la sección 4.1 vimos que es posible reducir todas las nociones semánticas a la noción de consistencia semántica. Como los árboles de verdad son un método para establecer la consistencia semántica de un conjunto, pueden ser utilizados para establecer las propiedades semánticas de fórmulas y argumentos. En esta sección estudiaremos cómo utilizar los árboles de verdad para determinar si una fórmula es una tautología, una contradicción o una fórmula semánticamente indeterminada.

Comencemos recordando las definiciones de estos conceptos en términos de consistencia semántica:

> Una fórmula $\mathcal{P}$ es una contradicción si y sólo si $\{\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente.
>
> Una fórmula $\mathcal{P}$ es una tautología si y sólo si $\{\sim\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente.
>
> Una fórmula $\mathcal{P}$ es semánticamente indeterminada si y sólo si tanto $\{\mathcal{P}\}$ como $\{\sim\mathcal{P}\}$ son semánticamente consistentes.

Si expresamos estas definiciones en términos de las propiedades de los árboles de verdad, obtenemos:

> Una fórmula $\mathcal{P}$ es una ***contradicción en LP*** si y sólo si $\{\mathcal{P}\}$ tiene un árbol cerrado.
>
> Una fórmula $\mathcal{P}$ es una ***tautología en LP*** si y sólo si $\{\sim\mathcal{P}\}$ tiene un árbol cerrado.
>
> Una fórmula $\mathcal{P}$ es ***semánticamente indeterminada en LP*** si y sólo si tanto $\{\mathcal{P}\}$ como $\{\sim\mathcal{P}\}$ tienen árboles de verdad abiertos.

Consideremos la siguiente fórmula:

(9) $A \supset [B \supset (A \supset B)]$

¿Cómo debemos determinar las propiedades semánticas de esta fórmula? Si construimos un árbol de verdad para el conjunto unitario $\{A \supset [B \supset (A \supset B)]\}$, existen dos posibilidades. Si el árbol es cerrado, la fórmula es una contradicción. Pero si el árbol es abierto, lo único que hemos establecido es que la fórmula no es una contradicción,

Cap-4.pmd 100 20/06/07, 01:44 p.m.

pero no hemos establecido si es una tautología o una fórmula semánticamente indeterminada. Para tal fin, tendríamos que construir un árbol de verdad para un conjunto cuyo único miembro sea la negación de la fórmula en cuestión. Comencemos construyendo un árbol para el conjunto {A ⊃ [B ⊃ (A ⊃ B)]}:

1	A ⊃ [B ⊃ (A ⊃ B)] ✓		MC
2	~A	B ⊃ (A ⊃ B)]	1 (⊃)

Podemos detenernos en este punto. La rama de la izquierda es una rama abierta completa, lo cual nos indica que el conjunto {A ⊃ [B ⊃ (A ⊃ B)]} es semánticamente consistente. Por lo tanto, la fórmula "A ⊃ [B ⊃ (A ⊃ B)]" no es una contradicción.

Para determinar si la fórmula es una tautología o una fórmula semánticamente indeterminada, debemos construir un árbol para el conjunto que contiene como único miembro a la negación de la fórmula, es decir, el conjunto {~(A ⊃ [B ⊃ (A ⊃ B)])}:

1	~(A ⊃ [B ⊃ (A ⊃ B)]) ✓	MC
2	A	1 (~⊃)
3	~[B ⊃ (A ⊃ B)] ✓	1 (~⊃)
4	B	3 (~⊃)
5	~(A ⊃ B) ✓	3 (~⊃)
6	A	5 (~⊃)
7	~B	5 (~⊃)
	×	

El conjunto que contiene la negación de la fórmula tiene un árbol cerrado. En consecuencia, "A ⊃ [B ⊃ (A ⊃ B)]" es una tautología.

En este ejemplo construimos dos árboles de verdad, uno para el conjunto que contiene a la fórmula y otro para el que contiene a su negación, pero hubiera bastado con construir sólo el segundo árbol. El problema cuando se intenta determinar si una fórmula es una tautología, una contradicción o una fórmula semánticamente indeterminada reside en que muchas veces el árbol que decidimos construir primero no resulta ser un árbol cerrado, y por lo tanto puede ser un árbol innecesario y superfluo. Solamente se requieren dos árboles de verdad cuando se trata de una fórmula semánticamente indeterminada.

Consideremos otro ejemplo. A simple vista es muy difícil determinar las propiedades semánticas de la siguiente fórmula:

(10) [A ⊃ (B & C)] & [~(A ⊃ B) ∨ ~(A ⊃ C)]

Cap-4.pmd 101 20/06/07, 01:44 p.m.

Comenzaremos con el árbol de verdad de {[A ⊃ (B & C)] & [~(A ⊃ B) ∨ ~(A ⊃ C)]}. Si el árbol es cerrado, la fórmula es una contradicción. Si resulta ser abierto, tendremos que construir otro árbol para el conjunto que contiene la negación de la fórmula.

1	[A ⊃ (B & C)] & [~(A ⊃ B) ∨ ~(A ⊃ C)] ✓				MC
2	A ⊃ (B & C) ✓				1 (&)
3	~(A ⊃ B) ∨ ~(A ⊃ C) ✓				1 (&)
4	~(A ⊃ B) ✓		~(A ⊃ C) ✓		3 (∨)
5	A		A		4 (~⊃)
6	~B		~C		4 (~⊃)
7	~A	B & C ✓	~A	B & C ✓	2 (⊃)
8	×	B	×	B	7 (&)
9		C		C	7 (&)
		×		×	

Todas las ramas están cerradas, así que no existe ninguna valuación bajo la cual el único miembro de este conjunto sea verdadero. En consecuencia, el conjunto es semánticamente inconsistente y la fórmula "[A ⊃ (B & C)] & [~(A ⊃ B) ∨ ~(A ⊃ C)]" es una contradicción. Si hubiéramos comenzado construyendo el árbol de verdad para el conjunto que contiene la negación de la fórmula, habríamos perdido el tiempo. El árbol de verdad para el conjunto {~([A ⊃ (B & C)] & [~(A ⊃ B) ∨ ~(A ⊃ C)])} tiene ramas abiertas, así que habríamos tenido que construir el árbol anterior de todos modos.

Es importante no cometer el siguiente error. El hecho de que el árbol de verdad de {$\mathcal{P}$} no tenga ninguna rama cerrada no quiere decir que la fórmula $\mathcal{P}$ sea una tautología. El árbol de verdad de {K ∨ L}, por ejemplo, tiene dos ramas abiertas completas, pero "K ∨ L" es una fórmula semánticamente indeterminada. Tampoco es cierto que si $\mathcal{P}$ es una tautología, entonces todas las ramas del árbol de verdad de {$\mathcal{P}$} serán ramas abiertas completas. Por ejemplo, la fórmula "(A ∨ ~A) ⊃ (Z ⊃ Z)" es una tautología, pero su árbol de verdad tiene una rama cerrada. La construcción de los árboles la dejamos como ejercicio.

Ejercicio 4.4

Use el método de los árboles de verdad para determinar si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o fórmulas contingentes.

1. K & ~K
2. K ∨ L

Cap-4.pmd 102 20/06/07, 01:44 p.m.

3. ~L ∨ ~L
4. K ∨ ~K
5. (L ≡ Z) ∨ (A & Z)
6. (A ∨ ~A) ⊃ (Z ⊃ Z)
7. (B ⊃ D) & [(B ⊃ ~D) & ~(~B ∨ D)]
8. (B ⊃ D) ⊃ [~D ⊃ ~(B & C)]
9. (~F ≡ ~G) & (F & ~G)
10. [H ∨ (F ∨ ~G)] & (G & [(F ∨ H) ⊃ ~G])
11. (M ∨ N) & ~(M ∨ N)
12. (M ∨ N) ⊃ ~(M ∨ N)
13. (P ∨ Q) ≡ ~(P ∨ Q)
14. ~(P ∨ Q) ≡ ~(P & Q)

Este ejercicio también se puede hacer con las fórmulas del Ejercicio 3.1.

4.6 Equivalencia semántica

Para definir la equivalencia semántica entre dos fórmulas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ en términos de consistencia semántica, debemos construir un conjunto cuyo único miembro sea la fórmula ~($\mathcal{P}$ ≡ $\mathcal{Q}$). Según la definición que vimos en la sección 4.1, dos fórmulas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son semánticamente equivalentes si y sólo si {~($\mathcal{P}$ ≡ $\mathcal{Q}$)} es semánticamente inconsistente. Podemos expresar esta definición en términos de las propiedades de los árboles de verdad:

> Dos fórmulas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son semánticamente ***equivalentes en LP*** si y sólo si {~($\mathcal{P}$ ≡ $\mathcal{Q}$)} tiene un árbol de verdad cerrado.

Las siguientes dos fórmulas son semánticamente equivalentes:

(11) (B & C) ⊃ A
B ⊃ (C ⊃ A)

El árbol de verdad para el conjunto {~([(B & C) ⊃ A] ≡ [B ⊃ (C ⊃ A)])} prueba este resultado:

1	$\sim([(B \,\&\, C) \supset A] \equiv [B \supset (C \supset A)])$ ✓		MC
2	$(B \,\&\, C) \supset A$ ✓	$\sim[(B \,\&\, C) \supset A]$ ✓	1 $(\sim\equiv)$
3	$\sim[B \supset (C \supset A)]$ ✓	$B \supset (C \supset A)$ ✓	1 $(\sim\equiv)$
4	B		3 $(\sim\supset)$
5	$\sim(C \supset A)$ ✓		3 $(\sim\supset)$
6	C		5 $(\sim\supset)$
7	$\sim A$		5 $(\sim\supset)$
8	$\sim(B \,\&\, C)$ ✓ A ×		2 $(\supset)$
9	$\sim B$ × $\sim C$ ×		8 $(\sim\&)$
10		$B \,\&\, C$ ✓	2 $(\sim\supset)$
11		$\sim A$	2 $(\sim\supset)$
12		B	10 $(\&)$
13		C	10 $(\&)$
14		$\sim B$ × $C \supset A$ ✓	3 $(\supset)$
15		$\sim C$ × A ×	14 $(\supset)$

Todas las ramas están cerradas; por lo tanto, $\{\sim([(B \,\&\, C) \supset A] \equiv [B \supset (C \supset A)])\}$ es semánticamente inconsistente y las fórmulas "$(B \,\&\, C) \supset A$" y "$B \supset (C \supset A)$" son semánticamente equivalentes.

Ejercicio 4.5

Use el método de los árboles de verdad para determinar si los siguientes pares de fórmulas son semánticamente equivalentes.

1. $\sim(B \,\&\, A)$ $\sim B \,\&\, \sim A$
2. $\sim(B \,\&\, A)$ $\sim B \vee \sim A$
3. $(P \,\&\, Q) \supset R$ $(P \supset R) \,\&\, (Q \supset R)$
4. $(P \vee Q) \supset R$ $(P \supset R) \,\&\, (Q \supset R)$

5.	D & (E $\vee$ F)	(D & E) $\vee$ (D & F)
6.	D $\vee$ (E & F)	(D $\vee$ E) & (D $\vee$ F)
7.	N $\supset$ (O $\supset$ P)	(N $\supset$ O) $\supset$ P
8.	N $\supset$ (O $\equiv$ P)	(N $\supset$ O) $\equiv$ (N $\supset$ P)

Este ejercicio también se puede hacer con las fórmulas del Ejercicio 3.2.

4.7 Implicación y validez semántica

Recordemos que un conjunto Γ implica semánticamente a $\mathcal{P}$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\sim\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente. Podemos expresar este resultado utilizando las propiedades de los árboles de verdad:

> Un conjunto finito Γ de fórmulas de *LP* ***implica semánticamente*** una fórmula $\mathcal{P}$ si y sólo si el conjunto $\Gamma \cup \{\sim\mathcal{P}\}$ tiene un árbol de verdad cerrado.

De la misma manera, podemos utilizar el método de los árboles de verdad para probar la validez semántica de un argumento. Recordemos que un argumento es semánticamente válido si y sólo si el conjunto que contiene las premisas y la negación de la conclusión es semánticamente inconsistente. Por lo tanto:

> Un argumento de *LP* es ***semánticamente válido en LP*** si y sólo si el conjunto que contiene las premisas y la negación de la conclusión tiene un árbol de verdad cerrado.

Ilustraremos cada una de estas definiciones con un ejemplo. En el primero de ellos queremos determinar si la siguiente afirmación es cierta:

(12) $\{A \& B, C \supset \sim B, B \vee \sim B\} \models$ "$A \supset C$"

Inicialmente, debemos ampliar el conjunto añadiendo la negación de "$A \supset C$":

(12a) $\{A \& B, C \supset \sim B, B \vee \sim B, \sim(A \supset C)\}$

Ahora debemos construir un árbol de verdad para el nuevo conjunto. Si éste es cerrado, la relación de implicación se cumple.

Cap-4.pmd 105 20/06/07, 01:44 p.m.

1	A & B ✓			MC
2	C ⊃ ~B ✓			MC
3	B ∨ ~B ✓			MC
4	~(A ⊃ C) ✓			MC
5	A			1 (&)
6	B			1 (&)
7	A			4 (~⊃)
8	~C			4 (~⊃)
9	~C		~B ×	2 (⊃)
10	B	~B ×		3 (∨)

Como el árbol tiene una rama abierta completa, el conjunto **(12a)** es consistente. En consecuencia, {A & B, C ⊃ ~B, B ∨ ~B} no implica semánticamente a la fórmula "A ⊃ C". Podemos extraer del árbol de verdad la valuación bajo la cual los miembros del conjunto son verdaderos y la fórmula "A ⊃ C" es falsa:

$$\mathcal{V}(A) = \mathbf{V},\ \mathcal{V}(B) = \mathbf{V} \text{ y } \mathcal{V}(C) = \mathbf{F}$$

Consideremos ahora un argumento de *LP*:

(13) (~A ∨ ~B) ⊃ D
C & ~D
―――――――
~A

Para determinar si el argumento es semánticamente válido, creamos el conjunto que contiene a las premisas y a la negación de la conclusión:

(13a) {(~A ∨ ~B) ⊃ D, C & ~D, ~~A}

Cap-4.pmd 106 20/06/07, 01:44 p.m.

Aunque la conclusión sea una negación, debemos volver a negarla. Construiremos un árbol de verdad para este conjunto:

1	(~A ∨ ~B) ⊃ D ✓		MC
2	C & ~D ✓		MC
3	~~A ✓		MC
4	A		3 (~~)
5	C		2 (&)
6	~D		2 (&)
7	~(~A ∨ ~B) ✓	D	1 (⊃)
8	~~A ✓	×	7 (~∨)
9	~~B ✓		7 (~∨)
10	A		8 (~~)
11	B		9 (~~)

El árbol es abierto, así que el argumento **(13)** es semánticamente inválido. El árbol nos muestra que es posible extraer un contraejemplo al argumento, es decir, una valuación bajo la cual las premisas y la negación de la conclusión sean verdaderas. Esa valuación es la siguiente:

$$\mathcal{V}(A) = \mathbf{V},\ \mathcal{V}(B) = \mathbf{V},\ \mathcal{V}(C) = \mathbf{V} \text{ y } \mathcal{V}(D) = \mathbf{F}$$

Ejercicio 4.6

Use el método de los árboles de verdad para determinar si los siguientes argumentos son semánticamente válidos.

1. $$\begin{array}{l} A \,\&\, (B \supset C) \\ \hline (A \,\&\, C) \vee (A \,\&\, {\sim}B) \end{array}$$

2. $$\begin{array}{l} ({\sim}A \vee B) \supset (C \,\&\, D) \\ {\sim}({\sim}A \vee B) \\ \hline {\sim}(C \,\&\, D) \end{array}$$

3. $$\begin{array}{l} R \,\&\, (S \vee T) \\ ({\sim}T \vee U) \,\&\, (U \supset {\sim}U) \\ \hline R \,\&\, S \end{array}$$

4. $$\begin{array}{l} (S \equiv {\sim}T) \,\&\, T \\ [T \vee ((R \supset S) \,\&\, R)] \supset {\sim}S \\ \hline T \supset {\sim}S \end{array}$$

5. $$\begin{array}{l} (R \equiv Q) \vee {\sim}(Q \,\&\, P) \\ {\sim}R \supset {\sim}Q \\ {\sim}P \supset {\sim}(Q \,\&\, P) \\ \hline R \end{array}$$

6. $$\begin{array}{l} (P \supset Q) \supset P \\ (Q \supset P) \supset Q \\ \hline {\sim}P \vee {\sim}Q \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{l} C \,\&\, (E \vee K) \\ {\sim}K \supset H \\ (C \equiv K) \supset {\sim}K \\ {\sim}H \\ \hline F \,\&\, G \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{l} C \vee {\sim}(E \,\&\, F) \\ {\sim}E \\ {\sim}(C \vee F) \\ \hline C \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{l} J \supset (H \supset G) \\ {\sim}H \supset {\sim}J \\ I \,\&\, J \\ \hline G \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{l} (G \equiv H) \vee ({\sim}G \equiv H) \\ \hline ({\sim}G \equiv {\sim}H) \vee {\sim}(G \equiv H) \end{array}$$

11.
$$\begin{array}{l} M \supset (N \,\&\, O) \\ O \equiv N \\ {\sim}O \\ \hline {\sim}M \end{array}$$

12.
$$\begin{array}{l} N \vee (M \,\&\, {\sim}O) \\ (O \vee M) \equiv N \\ {\sim}N \vee M \\ \hline {\sim}(M \vee O) \end{array}$$

13.
$$\begin{array}{l} H \supset {\sim}H \\ (I \supset H) \supset I \\ \hline H \equiv {\sim}I \end{array}$$

14.
$$\begin{array}{l} K \supset J \\ J \supset L \\ L \supset M \\ \hline K \supset M \end{array}$$

15.
$$\begin{array}{l} [(C \vee D) \,\&\, E] \supset A \\ D \\ \hline E \supset A \end{array}$$

Este ejercicio también se puede hacer con los argumentos del Ejercicio 3.4.

Cap-4.pmd 108 20/06/07, 01:44 p.m.

5. Deducción natural en *LP*

En los capítulos anteriores hemos desarrollado técnicas para establecer las propiedades semánticas de fórmulas, conjuntos y argumentos. Aunque estas técnicas son relativamente fáciles de utilizar, difícilmente se podría afirmar que reflejan adecuadamente los razonamientos que llevamos a cabo cuando analizamos un argumento en la vida cotidiana o cuando evaluamos la consistencia del discurso de una persona. En la vida real no nos preocupamos por determinar todos los posibles valores de verdad que puedan tomar los enunciados en cuestión, como sucede en las tablas de verdad, ni tampoco formamos conjuntos de enunciados para determinar su consistencia semántica.

En este capítulo estudiaremos un sistema deductivo que refleja de una manera más fiel el tipo de razonamientos informales que llevamos a cabo en la vida diaria. De allí su nombre: *Sistema de Deducción Natural* (*SDN*).

A diferencia de los métodos que hemos desarrollado hasta ahora, el sistema de deducción natural es un *método sintáctico*, es decir, es un método que está basado en la estructura lógica o sintaxis de las fórmulas de *LP* sin tener en cuenta explícitamente sus posibles valuaciones. En general, un sistema deductivo consiste de una serie de transformaciones sintácticas de unas fórmulas en otras con base en una serie de reglas. En principio, es posible escoger cualquier tipo de reglas. Por ejemplo, podríamos construir un sistema deductivo en el que haya una regla transformativa que nos permita invertir el antecedente y el consecuente de una fórmula condicional bajo cualquier circunstancia. Dicha regla, sin embargo, sufriría de un defecto fundamental. Como vimos en el capítulo 1, lo que distingue el razonamiento correcto del incorrecto es la *preservación de la verdad*. Dada una serie de fórmulas verdaderas, o que se asumen como verdaderas, la lógica deductiva nos permite deducir sólo sus consecuencias verdaderas. Por esa razón, las reglas de transformación sintáctica en un sistema de deducción natural deben preservar la verdad a toda costa. Una regla que nos permitiera transformar cualquier fórmula de forma $\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$ en $\mathcal{Q} \supset \mathcal{P}$ violaría este principio.

Cap-5.pmd 109 13/07/07, 03:15 p.m.

5.1 Las reglas de derivación del sistema de deducción natural

Sintetizaremos las transformaciones sintácticas permitidas dentro del sistema de deducción natural utilizando una serie de ***reglas de inferencia o derivación***. Dichas reglas serán utilizadas para crear ***pruebas*** o ***derivaciones***, series finitas de fórmulas que nos permiten afirmar la verdad de una fórmula al demostrar cómo ésta es el resultado de la transformación sintáctica de una o más fórmulas que se asumen como verdaderas. Existen dos reglas de inferencia para cada operador lógico de *LP*, una para introducir el operador y otra para eliminarlo[1].

5.1.1 *Conjunción*

El primer par de reglas que estudiaremos nos permite introducir y eliminar una conjunción. Si asumimos que una conjunción $\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$ es verdadera, esa información es suficiente para inferir que cualquiera de sus dos componentes proposicionales inmediatos es verdadero:

Simplificación o eliminación de la conjunción (&E)

$$\begin{array}{r|l} & \mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q} \\ \blacktriangleright & \mathcal{P} \end{array} \qquad \text{o} \qquad \begin{array}{r|l} & \mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q} \\ \blacktriangleright & \mathcal{Q} \end{array}$$

La línea vertical se denomina ***línea de rango***, y su importancia será explicada un poco más adelante. La flecha indica cuál es la fórmula que puede ser inferida o derivada a partir de la información proporcionada.

La segunda regla nos permite construir o introducir una conjunción. Si sabemos que una fórmula $\mathcal{P}$ es verdadera y también sabemos que $\mathcal{Q}$ es verdadera, entonces su conjunción $\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$ también debe serlo. Es decir, cuando sabemos que dos fórmulas independientes son verdaderas, es posible derivar su conjunción:

Introducción de la conjunción (&I)

$$\begin{array}{r|l} & \mathcal{P} \\ & \mathcal{Q} \\ & \\ \blacktriangleright & \mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q} \end{array} \qquad \text{o} \qquad \begin{array}{r|l} & \mathcal{Q} \\ & \mathcal{P} \\ & \\ \blacktriangleright & \mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q} \end{array}$$

1. El primer sistema de deducción natural fue desarrollado simultánea e independientemente por Gerhard Gentzen (1934/35) y por Stanislaw Jaŝkowski (1934). La forma estándar de expresar las reglas y de construir derivaciones fue establecida por Frederic Brenton Fitch (1952). Existen otras formas de construir derivaciones, pero los "gráficos de Fitch" que utilizaremos en este capítulo son el método más conocido. Varios libros de texto contemporáneos utilizan estos gráficos, por ejemplo, Jacquette (2001) y Bergmann, Moor & Nelson (1998).

Examinemos un ejemplo de aplicación de estas dos reglas. Consideremos el siguiente argumento de *LP*:

(1) Q & (C ⊃ E)
(Q ∨ M) & N
E & (I & A)
———————
(Q & A) & N

Podemos mostrar que la conclusión del argumento se sigue de las premisas si asumimos que éstas son verdaderas y logramos derivar la conclusión utilizando las reglas de *SDN*:

1	Q & (C ⊃ E)	Suposición
2	(Q ∨ M) & N	Suposición
3	E & (I & A)	Suposición
	?	
	(Q & A) & N	

Queremos derivar la conjunción de “Q & A” y “N”. Para tal fin debemos obtener cada una de las fórmulas a partir de las suposiciones iniciales. La fórmula “N” es uno de los componentes proposicionales inmediatos de la segunda suposición, y podemos inferirla directamente en el paso 4:

1	Q & (C ⊃ E)	Suposición
2	(Q ∨ M) & N	Suposición
3	E & (I & A)	Suposición
4	N	2 (&E)
	(Q & A) & N	

En la columna de la derecha justificamos este paso indicando cuál fue la fórmula que sirvió de base para la inferencia, y cuál la regla utilizada.

No podemos derivar “Q & A” de la misma manera. La fórmula no existe *como tal* en las suposiciones iniciales y debemos *construirla* derivando primero “Q” y luego derivando “A”:

Cap-5.pmd 111 13/07/07, 03:15 p.m.

1	Q & (C ⊃ E)	Suposición
2	(Q ∨ M) & N	Suposición
3	E & (I & A)	Suposición
4	N	2 (&E)
5	Q	1 (&E)
6	A	**ERROR**
	?	
	(Q & A) & N	

Podemos obtener "Q" de la primera suposición por simplificación de la conjunción en el paso 5. Pero no podemos derivar "A" directamente en el paso 6. Las reglas del sistema sólo se aplican al operador lógico principal, y "A" no es uno de los componentes proposicionales inmediatos de la tercera suposición. Por eso debemos obtener primero "I & A" en el paso 6. Como "A" ahora sí es uno de los componentes proposicionales inmediatos, podemos inferirla en el paso 7. Finalmente, construimos la conjunción de "Q" y "A" en el paso 8, y así podemos derivar la conclusión del argumento:

1	Q & (C ⊃ E)	Suposición
2	(Q ∨ M) & N	Suposición
3	E & (I & A)	Suposición
4	N	2 (&E)
5	Q	1 (&E)
6	I & A	3 (&E)
7	A	6 (&E)
8	Q & A	5, 7 (&I)
9	(Q & A) & N	4, 8 (&I)

El orden en que derivemos las fórmulas "Q", "A" y "N" no es importante. Lo importante es que cada paso en la derivación esté plenamente justificado por las reglas, como se indica en la columna de la derecha.

5.1.2 *Condicional*

La siguiente regla que examinaremos es una de las formas de razonamiento más comunes en la vida diaria. Se trata de la regla que nos permite afirmar la consecuencia de una fórmula condicional cuando sabemos que el antecedente es verdadero:

Cap-5.pmd 112 13/07/07, 03:15 p.m.

Modus ponens o eliminación del condicional (⊃E)

$$
\begin{array}{l|l}
 & \mathcal{P} \supset \mathcal{Q} \\
 & \mathcal{P} \\
\blacktriangleright & \mathcal{Q}
\end{array}
$$

Esta regla, también conocida como "Modus Ponens", debe ser utilizada con cuidado. La regla sólo nos permite afirmar la verdad del consecuente, no la del antecedente. Si la fórmula condicional es verdadera y el consecuente es verdadero, no se sigue que el antecedente deba ser verdadero.

El siguiente ejemplo requiere la utilización de la regla para la eliminación del condicional. Consideremos el siguiente argumento:

(2) Armstrong ha entrenado y tiene un buen equipo.
Si Armstrong ha entrenado, ganará el Tour de France por décima vez.
____
Armstrong tiene un buen equipo y ganará el Tour de France por décima vez.

La siguiente es una derivación de la conclusión en el lenguaje *LP*:

1	E & Q	Suposición
2	E ⊃ G	Suposición
3	E	1 (&E)
4	G	2, 3 (⊃E)
5	Q	1 (&E)
6	Q & G	4, 5 (&I)

Así como existe una regla para inferir información de una fórmula condicional, también existe una regla para construir una fórmula condicional. La regla, que también se conoce como *prueba condicional*, es la siguiente:

Prueba condicional o introducción del condicional (⊃I)

$$
\begin{array}{l|l}
 & \begin{array}{|l} \mathcal{P} \\ \hline \\ \mathcal{Q} \end{array} \\
\blacktriangleright & \mathcal{P} \supset \mathcal{Q}
\end{array}
$$

La regla nos dice que si asumimos en una ***subderivación*** o ***prueba auxiliar*** que una fórmula $\mathcal{P}$ es verdadera, y bajo esa suposición podemos derivar $\mathcal{Q}$, entonces podemos afirmar $\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$ en la línea de rango inmediatamente a la izquierda de la subderivación. Consideremos un ejemplo:

Cap-5.pmd 113 13/07/07, 03:15 p.m.

(3) Si María nació en Brooklyn, entonces nació en Nueva York.
Si María nació en Nueva York, entonces nació en Estados Unidos.
Si María nació en Brooklyn, entonces nació en Estados Unidos.

Para demostrar que la conclusión se sigue de las premisas, podemos razonar de la siguiente manera. Asumamos que María nació en Brooklyn. De acuerdo con la primera premisa, se seguiría que María nació en Nueva York, y de acuerdo con la segunda, que nació en Estados Unidos. Por lo tanto, si se asume que María nació en Brooklyn, se sigue que nació en Estados Unidos. Debemos aclarar que no hemos demostrado que María haya nacido en Brooklyn, en Nueva York o en Estados Unidos. María podría haber nacido en cualquier lugar del mundo. Lo importante es que bajo el supuesto de que nació en Brooklyn, se sigue que nació en Estados Unidos. Y eso es lo que muestra la siguiente derivación:

1	$B \supset N$	Suposición
2	$N \supset E$	Suposición
3	B	Suposición
4	N	1, 3 ($\supset$E)
5	E	2, 4 ($\supset$E)
6	$B \supset E$	3-5 ($\supset$I)

La subderivación ocupa las líneas 3-5 de la derivación. Una subderivación se termina cuando interrumpimos su línea de rango y extraemos de ella una conclusión que se afirma en la línea de rango inmediatamente superior (la que está a la izquierda de la subderivación). Cuando una subderivación ha sido terminada, se desecha y sus contenidos se vuelven inaccesibles, es decir, no pueden ser usados en ninguna otra línea de la derivación. Por ejemplo, sería un error afirmar “B”, “N” o “E” en la línea 7 de la derivación anterior.

Una subderivación también puede ocurrir dentro de otra subderivación, como lo demuestra el siguiente ejemplo.

Cap-5.pmd 114 13/07/07, 03:15 p.m.

(4) $\dfrac{(G \& H) \supset K}{G \supset (H \supset K)}$

1	$(G \& H) \supset K$	Suposición
2	$\quad G$	Suposición
3	$\quad\quad H$	Suposición
4	$\quad\quad G \& H$	2, 3 (&I)
5	$\quad\quad K$	1, 4 (⊃E)
6	$\quad H \supset K$	3-5 (⊃I)
7	$G \supset (H \supset K)$	2-6 (⊃I)

En el paso 6 obtenemos el resultado de la segunda subderivación. Este resultado se afirma en la línea de rango inmediatamente superior, es decir, la de la primera subderivación. En el paso 7 obtenemos el resultado de la primera subderivación y lo afirmamos en la línea de rango principal. Sólo podemos afirmar que una fórmula se sigue de las suposiciones iniciales si la fórmula ocurre en la línea de rango principal. En este caso, las subderivaciones sólo fueron pasos intermedios para llegar a la fórmula "G ⊃ (H ⊃ K)".

Ejercicio 5.1

Complete las siguientes derivaciones.

1. Derive: C

1	$A \supset C$
2	$B \& A$

2. Derive: $A \vee C$

1	$(F \& D) \supset (A \vee C)$
2	$D \& (A \vee B)$
3	$F \& \sim E$

3. Derive: $X \supset Z$

1	$X \supset (Y \& Z)$

4. Derive: $(Z \& Y) \supset (W \& X)$

1	$(Y \& Z) \supset (X \& W)$

5. Derive: $(I \& F) \supset \sim H$

1	$I \supset (G \& \sim H)$

6. Derive: $H \equiv Y$

1	$(R \supset G) \supset (H \equiv Y)$
2	$A \& (A \supset G)$

5.1.3 *Negación*

Pasamos ahora a las reglas para la eliminación y la introducción de una negación. La idea en la que están basadas estas reglas es la siguiente: es posible demostrar que una fórmula es falsa, demostrando que si fuese verdadera, tendría consecuencias contradictorias. Esta estrategia comúnmente se conoce como una *reductio ad absurdum*. La siguiente es la regla para la introducción de la negación:

Reductio ad absurdum o introducción de la negación (~I)

$$
\begin{array}{l|l}
 & \begin{array}{|l} \underline{\mathcal{P}} \\ \mathcal{Q} \\ \sim\mathcal{Q} \end{array} \\
\blacktriangleright & \sim\mathcal{P}
\end{array}
$$

Supongamos, por ejemplo, que alguien hace las siguientes dos afirmaciones:

(5) Si me gané la lotería, soy feliz.
No soy feliz.

De esta información debe desprenderse que la persona no se ganó la lotería. La siguiente derivación lo demuestra:

1	$G \supset F$	Suposición
2	~F	Suposición
3	| G	Suposición
4	| F	1, 3 (⊃E)
5	| ~F	2 (R)
6	~G	3-5 (~I)

Inicialmente, asumimos que la persona se ganó la lotería. Bajo ese supuesto, y utilizando la información con la que contamos, encontramos que la persona sería feliz e infeliz al mismo tiempo, lo cual es absurdo. Por lo tanto concluimos que ese supuesto debe ser falso.

En la construcción de la subderivación en el ejemplo **(5)** utilizamos una de las suposiciones originales sin llevar a cabo ningún cambio en la fórmula (en la línea 5). La justificación para hacerlo reside en que si sabemos que una fórmula es verdadera, podemos reiterarla cuantas veces tengamos que hacerlo. Podemos resumir esta idea en una regla adicional:

Cap-5.pmd 116 13/07/07, 03:15 p.m.

Reiteración (R)

$$\begin{array}{r|l} & \mathcal{P} \\ & \\ \blacktriangleright & \mathcal{P} \end{array}$$

Esta regla se debe aplicar con cuidado. Nos permite reiterar una fórmula en la misma línea de rango donde ocurre originalmente, y en cualquier línea de rango inferior, es decir, cualquier subderivación que ocurra dentro de esa línea de rango, pero no en una línea de rango superior. En el ejemplo **(5)** sería incorrecto reiterar "F" en la línea de rango principal, pues la verdad de "F" depende enteramente de la suposición que da origen a la subderivación y sólo puede ser reiterada dentro de ese rango.

Consideremos otro ejemplo de aplicación de la regla para la introducción de la negación:

(6) Si los experimentos resultan positivos y los resultados son publicados, el científico será ascendido.
Los experimentos resultan positivos, pero el científico no es ascendido.
____
Por lo tanto, los resultados no fueron publicados.

La siguiente derivación demuestra que la conclusión se sigue de las premisas:

$$\begin{array}{r|l l}
1 & (E \,\&\, P) \supset A & \text{Suposición}\\
2 & E \,\&\, {\sim}A & \text{Suposición}\\
\hline
3 & \quad\vert\; P & \text{Suposición}\\
4 & \quad\vert\; E & \text{2 (\&E)}\\
5 & \quad\vert\; E \,\&\, P & \text{3, 4 (\&I)}\\
6 & \quad\vert\; A & \text{1, 5 }(\supset\text{E})\\
7 & \quad\vert\; {\sim}A & \text{2 (\&E)}\\
8 & {\sim}P & \text{3-7 (\textasciitilde I)}
\end{array}$$

Pasemos ahora a la regla para la eliminación de la negación. En esencia, la regla es idéntica a la regla para introducir la negación. La diferencia radica en que reducimos al absurdo la *negación* de la fórmula, es decir, demostramos que la fórmula tiene que ser verdadera porque si fuera falsa tendría consecuencias contradictorias.

Reductio ad absurdum o eliminación de la negación (~E)

$$\begin{array}{r|l} & \quad\vert\; {\sim}\mathcal{P} \\ & \quad\vert\; \mathcal{Q} \\ & \quad\vert\; {\sim}\mathcal{Q} \\ & \\ \blacktriangleright & \mathcal{P} \end{array}$$

El siguiente ejemplo utiliza la regla para la eliminación de la negación:

(7) ~S ⊃ O
O ⊃ S
―――――
S

1	~S ⊃ O	Suposición
2	O ⊃ S	Suposición
3	| ~S	Suposición
4	| O	1, 3 (⊃E)
5	| S	2, 4 (⊃E)
6	| ~S	3 (R)
7	S	3-6 (~E)

Frecuentemente, una de las fórmulas utilizadas para crear la contradicción es la suposición que genera la subderivación. En este ejemplo, bastó con reiterar "~S" en la línea 6 para obtener la contradicción, pues ya habíamos derivado "S" en la línea 5. Por otra parte, la contradicción en la subderivación no tiene que ser entre fórmulas atómicas, como lo demuestra el siguiente ejemplo.

(8) ~(M ∨ N) ⊃ ~~(M ∨ N)
―――――
M ∨ N

1	~(M ∨ N) ⊃ ~~(M ∨ N)	Suposición
2	| ~(M ∨ N)	Suposición
3	| ~~(M ∨ N)	1, 2 (⊃E)
4	| ~(M ∨ N)	2 (R)
5	M ∨ N	2-4 (~E)

Ejercicio 5.2
Complete las siguientes derivaciones.

1. Derive: ~A

1	~B & (A ⊃ B)

2. Derive: A

1	B & ~B

3. Derive: T

1	(~T ⊃ ~S) & (~S ⊃ S)

4. Derive: T & S

1	~(T & S) ⊃ (Q & ~R)
2	R

Cap-5.pmd 118 13/07/07, 03:15 p.m.

5. Derive: ~~M

1	~M ⊃ L
2	~M ⊃ ~L

6. Derive: P ∨ Q

1	~M & N
2	N ⊃ P
3	P ⊃ M

5.1.4 ***Disyunción***

Las siguientes dos reglas que estudiaremos nos permiten introducir y eliminar disyunciones. La regla para introducir una disyunción se basa en el siguiente razonamiento. Si sabemos que una fórmula $\mathcal{P}$ es verdadera, también sabemos que cualquier disyunción $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ en la que la fórmula $\mathcal{P}$ sea uno de los componentes proposicionales también será verdadera. El valor de verdad de $\mathcal{Q}$, el otro componente proposicional, no afecta el valor de verdad de la disyunción. Formalmente:

Adición o introducción de la disyunción (∨I)

	$\mathcal{P}$	o		$\mathcal{P}$
▶	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$		▶	$\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$

La utilidad de esta regla reside en que nos permite agregar una fórmula completamente nueva a una derivación, siempre y cuando la fórmula nueva forme una disyunción con alguna de las fórmulas que no hayan sido desechadas en la derivación. Para facilitar la aplicación de la regla, la fórmula nueva puede ser añadida antes o después de la fórmula original.

La regla para eliminar una disyunción es un poco más complicada que las anteriores. El problema reside en que la verdad de una disyunción no es suficiente para determinar cuál de los dos componentes proposicionales es verdadero, o si los dos lo son. Lo que la regla intenta mostrar es que, independientemente de cuál de los dos miembros de la disyunción sea verdadero, es posible derivar la misma fórmula a partir de cada uno de ellos:

Cap-5.pmd 119 29/08/07, 02:28 p.m.

Dilema constructivo o eliminación de la disyunción (∨E)

$$
\begin{array}{r|l}
 & \mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \\
 & \quad \begin{array}{|l} \mathcal{P} \\ \hline \mathcal{R} \end{array} \\
 & \quad \begin{array}{|l} \mathcal{Q} \\ \hline \mathcal{R} \end{array} \\
\blacktriangleright & \mathcal{R}
\end{array}
$$

La regla consiste de dos subderivaciones independientes pero simultáneas, cada una de las cuales demuestra que la fórmula $\mathcal{R}$ se puede derivar asumiendo la verdad de cada uno de los dos componentes proposicionales de la disyunción. Como $\mathcal{R}$ puede ser cualquier fórmula, en ocasiones $\mathcal{R}$ será uno de los dos componentes proposicionales de la disyunción. El siguiente ejemplo ilustra este punto:

(9) Derive: P

1	M ∨ P	Suposición
2	M ⊃ (S & N)	Suposición
3	N ⊃ P	Suposición
4	| M	Suposición
5	| S & N	2, 4 (⊃E)
6	| N	5 (&E)
7	| P	3, 6 (⊃E)
8	| P	Suposición
9	| P	8 (R)
10	P	1, 4-9 (∨E)

Es importante recordar que las dos subderivaciones indicadas por la regla para la eliminación de la disyunción son independientes. En el ejemplo anterior, sería un error afirmar "N" en la segunda subderivación. La verdad de "N" depende de una suposición que no hace parte de la segunda subderivación. También se debe tener en cuenta que una vez se obtiene "P" en la línea 10, toda la información contenida en las líneas 4-9 se desecha y no puede volver a ser utilizada.

Consideraremos ahora un ejemplo en el que la fórmula que se deriva utilizando la regla para la eliminación de la disyunción no es uno de los dos componentes proposicionales:

Cap-5.pmd 120 13/07/07, 03:15 p.m.

(10) Derive: D & (F ∨ G)

1	H ∨ I	Suposición
2	H ⊃ (D & F)	Suposición
3	I ⊃ (D & G)	Suposición
4	H	Suposición
5	D & F	2, 4 (⊃E)
6	D	5 (&E)
7	F	5 (&E)
8	F ∨ G	7 (∨ I)
9	D & (F ∨ G)	6, 8 (&I)
10	I	Suposición
11	D & G	3, 10 (⊃E)
12	D	11 (&E)
13	G	11 (&E)
14	F ∨ G	13 (∨ I)
15	D & (F ∨ G)	12, 14 (&I)
16	D & (F ∨ G)	1, 4-15 (∨E)

Ejercicio 5.3

1. Derive: A ∨ (C ∨ B)

1	C

2. Derive: ~A

1	(B ∨ C) ⊃ ~A
2	C

3. Derive: D

1	A ∨ B
2	A ⊃ D
3	B ⊃ D

4. Derive: F

1	~G ∨ F
2	~G ⊃ F

5. Derive: W

1	W ∨ W

6. Derive: T

1	M ∨ T
2	~T ⊃ ~M

5.1.5 *Bicondicional*

Finalizaremos el estudio de las reglas del sistema de deducción natural considerando el caso del bicondicional material. La regla para introducir un bicondicional está basada en la idea de que un bicondicional es la combinación de dos condicionales, es decir, $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ es equivalente a $(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q})$ & $(\mathcal{Q} \supset \mathcal{P})$. Así, si logramos derivar $\mathcal{Q}$ suponiendo $\mathcal{P}$, e independientemente logramos derivar $\mathcal{P}$ suponiendo $\mathcal{Q}$, podremos afirmar que $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$.

Introducción del bicondicional (≡I)

	$\mathcal{P}$
	$\mathcal{Q}$
	$\mathcal{Q}$
	$\mathcal{P}$
▶	$\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$

En el siguiente ejemplo utilizaremos la regla para la introducción del bicondicional:

(11) Derive: (~M & ~N) ≡ L

1	L ⊃ (~M & ~N)	Suposición
2	~M ⊃ (~N ⊃ L)	Suposición
3	~M & ~N	Suposición
4	~M	3 (&E)
5	~N ⊃ L	2, 4 (⊃E)
6	~N	3 (&E)
7	L	5, 6 (⊃E)
8	L	Suposición
9	~M & ~N	1, 8 (⊃E)
10	L ≡ (~M & ~N)	3-9 (≡I)

Al igual que en el caso de la eliminación de la disyunción, las dos subderivaciones indicadas por la regla para la introducción del bicondicional son independientes, es decir, la única información disponible para construir cada una de las subderivaciones es la que aparece en las líneas de rango superiores. Las subderivaciones no pueden compartir información entre ellas. En el ejemplo **(11)**, la única información disponible en cada subderivación es la que aparece en las dos suposiciones principales. Igual-

Cap-5.pmd 122 13/07/07, 03:15 p.m.

mente, cuando las dos subderivaciones arrojan el resultado esperado, se desechan y se vuelven inaccesibles en el resto de la derivación.

La última regla del sistema nos permite eliminar el bicondicional. Si sabemos que $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ es verdadero y además sabemos que uno de los dos componentes proposicionales es verdadero, podemos afirmar que el otro componente proposicional también es verdadero:

Eliminación del bicondicional (≡E)

	$\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$			$\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$
	$\mathcal{P}$	o		$\mathcal{Q}$
▶	$\mathcal{Q}$		▶	$\mathcal{P}$

Informalmente, podríamos decir que la regla para la eliminación del bicondicional es un *modus ponens* que funciona en ambos sentidos. El siguiente ejemplo utiliza esta nueva regla:

(12) Derive: ~Z

1	X ≡ ~Y	Suposición
2	(W ⊃ ~Y) & W	Suposición
3	X ≡ ~Z	Suposición
4	W	2 (&E)
5	W ⊃ ~Y	2 (&E)
6	~Y	4, 5 (⊃E)
7	X	1, 6 (≡E)
8	~Z	3, 7 (≡E)

Ejercicio 5.4

1. Derive: B

1	C ≡ (~A & B)
2	C

2. Derive: ~B ≡ A

1	(~B ⊃ A) & (A ⊃ ~B)

3. Derive: G & ~C

1	F & (G ≡ ~D)
2	~C & (F ≡ ~D)

4. Derive: F

1	C ≡ F
2	D ⊃ F
3	C ∨ D

Cap-5.pmd 123 17/07/07, 10:27 a.m.

5. Derive: $(J \equiv K) \;\&\; (K \equiv J)$

1	$(J \supset L) \;\&\; (L \supset K)$
2	$K \supset J$

6. Derive: U

1	$\sim T \supset U$
2	$T \vee M$
3	$\sim U \equiv M$
4	$M \supset \sim T$

5.2 Estrategias para construir derivaciones

Las derivaciones que utilizamos en la sección anterior sirvieron para ilustrar la aplicación de cada una de las reglas que definimos, y en cada ejemplo se indicaba cuál regla se debía utilizar. Sin embargo, en la mayoría de los casos no contamos con esa información y muchas veces no es obvio cuál deba ser la estrategia a seguir para intentar derivar una fórmula. En esta sección estudiaremos la forma en que se debe analizar la información contenida en las suposiciones principales para poder derivar más fácilmente una fórmula, y señalaremos los errores más comunes que se deben evitar. Es importante aclarar que a pesar de que este análisis es muy útil, no existe un procedimiento mecánico que nos lleve infaliblemente al resultado deseado.

Consideremos el siguiente ejemplo:

(13) Derive: $B \equiv A$

1	$F \;\&\; (\sim C \;\&\; D)$	Suposición
2	$(E \supset \sim G) \;\&\; [\sim C \supset (B \equiv A)]$	Suposición

La primera pregunta que debemos hacernos es si la fórmula que queremos derivar aparece literalmente dentro de las suposiciones principales. Si la respuesta es afirmativa, debemos examinar cuáles fórmulas tienen que ser verdaderas para poder llegar hasta la fórmula que queremos obtener. En este caso, la fórmula "$B \equiv A$" aparece en la segunda suposición como parte de una fórmula condicional, la cual a su vez hace parte de una conjunción. Para llegar hasta ella debemos eliminar primero la conjunción y luego el condicional. Comenzamos con la conjunción:

1	$F \;\&\; (\sim C \;\&\; D)$	Suposición
2	$(E \supset \sim G) \;\&\; [\sim C \supset (B \equiv A)]$	Suposición
3	$\sim C \supset (B \equiv A)$	2 (&E)

Para eliminar el condicional debemos obtener "$\sim C$", para así poder utilizar ($\supset$E). Pero sería incorrecto extraerla directamente de la primera suposición:

Cap-5.pmd 124 13/07/07, 03:15 p.m.

1	F & (~C & D)	Suposición	
2	(E ⊃ ~G) & [~C ⊃ (B ≡ A)]	Suposición	
3	~C ⊃ (B ≡ A)	2 (&E)	
4	~C	1 (&E)	**ERROR**

Las reglas que hemos estudiado se aplican a fórmulas enteras, no a los fragmentos que las constituyen. Para poder aplicar la regla (&E) a la fórmula "~C & D", ésta debe ser la única fórmula en la línea. Por eso debemos derivar "~C & D" de la primera suposición, y después sí podremos afirmar "~C". La derivación terminada sería la siguiente:

1	F & (~C & D)	Suposición
2	(E ⊃ ~G) & [~C ⊃ (B ≡ A)]	Suposición
3	~C ⊃ (B ≡ A)	2 (&E)
4	~C & D	1 (&E)
5	~C	4 (&E)
6	B ≡ A	3, 5 (⊃E)

En el siguiente ejemplo la fórmula que queremos derivar también aparece dentro de las suposiciones principales, por lo cual la estrategia más indicada (aunque no infalible) es intentar "extraerla". Para ese fin debemos detectar qué se debe derivar para poder llegar hasta la fórmula deseada.

(14) Derive: Z

1	~~P & (~Q ∨ R)	Suposición
2	~Q ⊃ Z	Suposición
3	Z ≡ (R ∨ S)	Suposición

Existen dos "caminos" para llegar a "Z". Los recorreremos en sentido inverso. El primer camino parte de la línea 3, donde "Z" hace parte de un bicondicional. Para eliminar el bicondicional hace falta afirmar que "R ∨ S" es verdadero, lo cual requiere que "R" o "S" sean verdaderas. "S" no aparece en ninguna otra suposición, y "R" hace parte de la disyunción "~Q ∨ R", así que el camino termina en esta fórmula. El segundo camino parte de la línea 2, donde "Z" es el consecuente de un condicional. Para eliminar el condicional, debemos derivar "~Q", y "~Q" hace parte de "~Q ∨ R". Como ambos caminos conducen a esta disyunción, la estrategia más indicada parece ser la eliminación de "~Q ∨ R" para obtener "Z" directamente. La siguiente es la derivación completa:

Cap-5.pmd 125 13/07/07, 03:15 p.m.

1	~~P & (~Q ∨ R)	Suposición
2	~Q ⊃ Z	Suposición
3	Z ≡ (R ∨ S)	Suposición
4	~Q ∨ R	1 (&E)
5	~Q	Suposición
6	Z	2, 5 (⊃E)
7	R	Suposición
8	R ∨ S	7 (∨I)
9	Z	3, 8 (≡E)
10	Z	4, 5-9 (∨E)

En el siguiente ejemplo la fórmula que queremos derivar no hace parte de la suposición principal, por lo cual la estrategia que seguimos en los dos ejemplos anteriores no nos es útil:

(15) Derive: A ⊃ (B ⊃ C)

1	(A & B) ⊃ C	Suposición

En lugar de "extraer" la fórmula que queremos derivar, tendremos que construirla a partir de un análisis de su estructura. Para poder construir la fórmula "A ⊃ (B ⊃ C)" debemos utilizar la regla para la introducción del condicional. Es decir, debemos suponer el antecedente y tratar de obtener el consecuente:

1	(A & B) ⊃ C	Suposición
2	A	Suposición
	?	
	?	
	B ⊃ C	?
	A ⊃ (B ⊃ C)	2-? (⊃I)

El problema inicial se ha reducido considerablemente, pues el reto ahora es derivar "B ⊃ C" utilizando las suposiciones en las líneas 1 y 2. Para derivar "B ⊃ C" seguimos el mismo camino trazado hasta ahora. Comenzamos por preguntarnos si "B ⊃ C" hace parte de las fórmulas en las líneas 1 y 2. Como la respuesta es negativa, no podemos "extraer" la fórmula sino que debemos construirla. Como de nuevo se trata de un condicional, volvemos a utilizar la regla para la introducción del condicional:

1	(A & B) ⊃ C	Suposición
2	A	Suposición
3	B	Suposición
	?	
	C	?
	B ⊃ C	3-? (⊃I)
	A ⊃ (B ⊃ C)	2-? (⊃I)

Una vez más, el problema se ha reducido. Ahora debemos encontrar una manera de derivar "C" a partir de las suposiciones en las líneas 1, 2 y 3. Repetimos el razonamiento anterior y nos preguntamos si "C" aparece como un componente de alguna de las fórmulas en estas líneas. En este caso la respuesta es afirmativa: "C" es el consecuente de "(A & B) ⊃ C", así que debemos tratar de "extraerlo". Para poder obtener "C", tenemos que obtener "A & B", y esta fórmula se puede obtener fácilmente a partir de las líneas 2 y 3. La derivación terminada es la siguiente:

1	(A & B) ⊃ C	Suposición
2	A	Suposición
3	B	Suposición
4	A & B	2, 3 (&I)
5	C	1, 4 (⊃E)
6	B ⊃ C	3-5 (⊃I)
7	A ⊃ (B ⊃ C)	2-6 (⊃I)

Es fundamental que las fórmulas y las subderivaciones citadas para justificar cada paso en la derivación sean ***accesibles***. Una fórmula o subderivación es accesible en una línea *n* si y sólo si esa fórmula o subderivación no ocurre en el rango de una suposición que ya haya sido desechada antes de la línea *n*. En términos más gráficos, las líneas de rango de las fórmulas y subderivaciones accesibles en la línea *n* deben estar a la izquierda de la fórmula en la línea *n*. Consideremos la siguiente derivación:

Cap-5.pmd 127 13/07/07, 03:15 p.m.

(16) Derive: M ⊃ N

1	~N ⊃ ~O	Suposición
2	~O ⊃ ~M	Suposición
3	M	Suposición
4	~N	Suposición
5	~O	1, 4 (⊃E)
6	~M	2, 5 (⊃E)
7	M	3 (R)
8	N	4-7 (~E)
9	M ⊃ N	3-8 (⊃I)

En la línea 5, las líneas 1 y 4 son accesibles pues no caen bajo el rango de ninguna suposición que haya sido desechada antes de esa línea. Del mismo modo, en la línea 7 citamos la línea 3 pues esta fórmula no cae bajo el rango de ninguna suposición que haya sido desechada antes de esa línea. Pero sería un error continuar la derivación utilizando la información en las líneas 3-8:

1	~N ⊃ ~O	Suposición	
2	~O ⊃ ~M	Suposición	
3	M	Suposición	
4	~N	Suposición	
5	~O	1, 4 (⊃E)	
6	~M	2, 5 (⊃E)	
7	M	3 (R)	
8	N	4-7 (~E)	
9	M ⊃ N	3-8 (⊃I)	
10	~O	5 (R)	**ERROR**

La razón por la cual no podemos usar ninguna de las líneas 3-8 en la línea 10 es que las fórmulas en estas líneas fueron obtenidas utilizando un supuesto adicional, a saber, que "M" es cierto. Pero en la línea 10 ya no operamos bajo ese supuesto, y no existe garantía alguna de que esas fórmulas se pueden derivar de las suposiciones principales.

Ejercicio 5.5

Complete las siguientes derivaciones.

1. Derive: (F & G) ⊃ H

   1 | F ⊃ (G ⊃ H)

2. Derive: ~G

   1 | G ⊃ (F & ~G)

Cap-5.pmd 128 13/07/07, 03:15 p.m.

3. Derive: $A \,\&\, \sim B$

1	$(A \,\&\, C) \,\&\, (\sim B \,\&\, D)$

4. Derive: B

1	$P \supset [S \equiv (A \,\&\, B)]$
2	$P \,\&\, S$

5. Derive: $\sim A$

1	$A \equiv B$
2	$\sim B$

6. Derive: $K \,\&\, L$

1	$\sim A \,\&\, \sim B$
2	A

7. Derive: $F \supset G$

1	$(F \,\&\, \sim G) \supset (\sim G \,\&\, H)$
2	$H \supset \sim F$

8. Derive: $F \equiv G$

1	$\sim F \,\&\, \sim G$

9. Derive: $F \vee (F \,\&\, \sim G)$

1	$\sim F \,\&\, \sim J$
2	$(\sim H \supset F) \vee J$
3	$H \supset G$
4	$G \supset (F \,\&\, \sim G)$

10. Derive: $H \supset (\sim F \,\&\, G)$

1	$H \supset (F \equiv G)$
2	$(I \vee G) \supset \sim F$
3	$(F \equiv G) \supset \sim I$
4	$\sim G \supset I$

11. Derive: $M \equiv (N \vee O)$

1	$(M \equiv N) \,\&\, (M \equiv O)$

12. Derive: M

1	$N \,\&\, (N \supset \sim\sim M)$

13. Derive: N

1	$\sim M \supset N$
2	$L \equiv N$
3	$\sim M \vee L$

14. Derive: $N \supset (L \supset \sim M)$

1	$(N \vee O) \,\&\, \sim M$

15. Derive: $(\sim W \,\&\, X) \equiv Z$

1	$Z \supset (\sim W \,\&\, X)$
2	$(\sim W \,\&\, X) \supset Y$
3	$Y \supset Z$

Cap-5.pmd 129 29/08/07, 02:28 p.m.

5.3 Conceptos básicos del sistema de deducción natural

Al estudiar la semántica del lenguaje *LP* en los capítulos anteriores, definimos una serie de propiedades *semánticas* que se aplicaban a fórmulas, conjuntos y argumentos. Las propiedades *sintácticas* que definiremos a continuación dentro del sistema de deducción natural reflejan dichas propiedades semánticas, como veremos a continuación.

5.3.1 *Derivabilidad en SDN*

El primer concepto sintáctico que estudiaremos es el de *derivabilidad en SDN* (Sistema de Deducción Natural):

> Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LP* es ***derivable en SDN*** de un conjunto de fórmulas Γ si y sólo si existe una derivación en la que todas las suposiciones principales sean miembros de Γ y $\mathcal{P}$ ocurra en el rango de esas suposiciones únicamente.

Para afirmar que $\mathcal{P}$ es derivable de Γ se utiliza el signo "$\vdash$" de la siguiente manera:

$$\Gamma \vdash \mathcal{P}$$

Probaremos que la siguiente afirmación es cierta[2]:

(17) $\{\sim C \vee A, C\} \vdash$ "$A \vee F$"

Para tal fin debemos construir una derivación en la cual los dos miembros del conjunto sean las únicas suposiciones principales, y la fórmula "$A \vee F$" ocurra en el rango de esas suposiciones únicamente. Consideremos la siguiente derivación:

Derive: $A \vee F$

1	$\sim C \vee A$	Suposición
2	C	Suposición
3	$\quad A$	Suposición
4	$\quad A \vee F$	3 ($\vee$ I)

Esta derivación no probaría el enunciado **(17)** pues la fórmula "$A \vee F$" ocurre en el rango de una suposición adicional, a saber, que "A" es verdad. Para que la prueba sea aceptable, "$A \vee F$" debe ocurrir en la línea de rango principal. La siguiente derivación sí prueba la afirmación:

2. El signo de la implicación sintáctica, al igual que el signo de la implicación semántica, no hacen parte de *LP* sino del metalenguaje. Así mismo, el enunciado **(17)** hace parte del metalenguaje, y por esa razón las fórmulas van entre comillas o entre corchetes. *Véase* la nota 4 del capítulo 3.

Cap-5.pmd 130 13/07/07, 03:15 p.m.

```
1  │ ~C ∨ A                 Suposición
2  │ C                      Suposición
   ├────────
3  │ │ ~C                   Suposición
   │ ├──────
4  │ │ │ ~A                 Suposición
   │ │ ├────
5  │ │ │  C                 2 (R)
6  │ │ │ ~C                 3 (R)
7  │ │ A                    4-6 (~E)
8  │ │ A ∨ F                7 (∨I)
9  │ │ A                    Suposición
   │ ├──────
10 │ │ A ∨ F                9 (∨I)
11 │ A ∨ F                  1, 3-10 (∨E)
```

Ejercicio 5.6

Construya una derivación para probar cada uno de los siguientes enunciados. Para mayor claridad, en este ejercicio omitimos las comillas.

1. {~(B & A), ~(B & A) ≡ C} ⊢ B ∨ C
2. {M & (N & ~P), (M ∨ S) ⊃ ~R} ⊢ ~R
3. {C ⊃ D, D ⊃ E} ⊢ C ⊃ E
4. {F ⊃ (G & H), ~H} ⊢ ~(F & I)
5. {T ≡ V, V ≡ X} ⊢ T ≡ X
6. {H ⊃ (I ⊃ J), K ⊃ I} ⊢ H ⊃ (K ⊃ J)
7. {N & ~(L ∨ M), [(L ∨ M) ∨ N] ⊃ J, (J ⊃ I) & (I ⊃ K)} ⊢ K
8. {~A ≡ B, C ⊃ A, B & C} ⊢ ~D
9. {Q ≡ R, Q ∨ R} ⊢ Q & R
10. {A} ⊢ B ⊃ [C ⊃ (D ⊃ A)]

5.3.2 *Validez*

El siguiente concepto que definiremos es el de validez en el sistema de deducción natural:

> Un argumento de *LP* es ***válido en SDN*** si y sólo si la conclusión del argumento es derivable del conjunto que contiene a las premisas como únicos elementos.

Cap-5.pmd 131 13/07/07, 03:16 p.m.

Probaremos que el siguiente argumento es válido en *SDN* construyendo una derivación en la que las suposiciones principales sean las premisas del argumento:

(18)

$$\begin{array}{l} (D \lor {\sim}F) \supset {\sim}E \\ {\sim}E \supset E \\ \hline {\sim}D \,\&\, F \end{array}$$

Derive: ~D & F

$$\begin{array}{r|l|l} 1 & (D \lor {\sim}F) \supset {\sim}E & \text{Suposición} \\ 2 & {\sim}E \supset E & \text{Suposición} \\ \hline 3 & \quad | \; D & \text{Suposición} \\ 4 & \quad | \; D \lor {\sim}F & 3\ (\lor I) \\ 5 & \quad | \; {\sim}E & 1, 4\ (\supset E) \\ 6 & \quad | \; E & 2, 5\ (\supset E) \\ 7 & {\sim}D & 3\text{-}6\ ({\sim}I) \\ 8 & \quad | \; {\sim}F & \text{Suposición} \\ 9 & \quad | \; D \lor {\sim}F & 8\ (\lor I) \\ 10 & \quad | \; {\sim}E & 1, 9\ (\supset E) \\ 11 & \quad | \; E & 2, 10\ (\supset E) \\ 12 & F & 8\text{-}11\ ({\sim}E) \\ 13 & {\sim}D \,\&\, F & 7, 12\ (\&I) \end{array}$$

Ejercicio 5.7

Pruebe que cada uno de los siguientes argumentos es válido en *SDN*:

1. $$\begin{array}{l} (A \supset B) \,\&\, {\sim}{\sim}D \\ (C \supset E) \,\&\, A \\ F \lor G \\ \hline {\sim}{\sim}D \,\&\, (C \supset E) \end{array}$$

2. $$\begin{array}{l} C \supset D \\ F \,\&\, C \\ \hline D \lor {\sim}E \end{array}$$

3. $$\begin{array}{l} F \equiv (F \supset G) \\ \hline F \supset G \end{array}$$

4. $$\begin{array}{l} (F \lor G) \supset (G \equiv H) \\ G \\ \hline G \,\&\, H \end{array}$$

5. $$\begin{array}{l} M \,\&\, N \\ {\sim}(M \,\&\, O) \\ \hline {\sim}O \end{array}$$

6. $$\begin{array}{l} ({\sim}M \lor O) \supset N \\ P \,\&\, {\sim}N \\ \hline M \end{array}$$

5.3.3 *Teoremas*

Cuando una fórmula $\mathcal{P}$ se deriva de un conjunto Γ, y este conjunto es el conjunto nulo o vacío, la fórmula se denomina un *teorema* del sistema:

> Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LP* es un ***teorema de SDN*** si y sólo si $\mathcal{P}$ es derivable del conjunto nulo o vacío.

Para afirmar en el metalenguaje que $\mathcal{P}$ es un teorema de *SDN*, utilizamos el signo de la implicación sintáctica:

$$\vdash \mathcal{P}$$

La definición de un teorema de *SDN* puede sonar extraña porque aparentemente podemos obtener una fórmula verdadera de la nada. Pero en realidad la fórmula derivada no sale "de la nada", sino que se construye utilizando las reglas del sistema. Estas reglas determinan cuáles fórmulas pueden ser construidas y cuáles no. La fórmula "K ⊃ [L ⊃ (K & L)]", por ejemplo, es un teorema del sistema, como lo demuestra la siguiente derivación:

(19) Derive: K ⊃ [L ⊃ (K & L)]

1	K	Suposición
2	L	Suposición
3	K & L	1, 2 (&I)
4	L ⊃ (K & L)	2-3 (⊃I)
5	K ⊃ [L ⊃ (K & L)]	1-4 (⊃I)

Ejercicio 5.8

Pruebe que las siguientes fórmulas de *LP* son teoremas de *SDN*:

1. M ⊃ (M ∨ N)
2. M ⊃ (N ⊃ M)
3. (M & ~M) ⊃ (N & ~N)
4. (M ≡ N) ⊃ (M ⊃ N)
5. (M ⊃ N) ⊃ [(O ⊃ M) ⊃ (O ⊃ N)]
6. (M & M) ≡ M
7. [(M ⊃ N) & ~N] ⊃ ~M
8. M ∨ ~M
9. M ⊃ [N ⊃ (M ⊃ N)]
10. ~M ⊃ [(N & M) ⊃ O]

Cap-5.pmd 133 13/07/07, 03:16 p.m.

5.3.4 *Equivalencia*

El siguiente concepto que definiremos es la equivalencia de dos fórmulas de *LP* en el sistema de deducción natural:

> Dos fórmulas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ de *LP* son ***equivalentes en SDN*** **s**i y sólo si $\mathcal{Q}$ es derivable de $\{\mathcal{P}\}$ y $\mathcal{P}$ es derivable de $\{\mathcal{Q}\}$.

Las siguientes dos fórmulas son equivalentes en *SDN*:

(20) A ≡ B

(21) ~A ≡ ~B

Para demostrarlo, construiremos dos derivaciones. En la primera, tomamos a “A ≡ B” como suposición principal y derivamos “~A ≡ ~B”:

Derive: ~A ≡ ~B

```
1  | A ≡ B              Suposición
   |-------
2  | | ~A               Suposición
   | |-----
3  | | | B              Suposición
   | | |---
4  | | | A              1, 3 (≡E)
5  | | | ~A             2 (R)
6  | | ~B               3-5 (~I)
7  | | ~B               Suposición
   | |-----
8  | | | A              Suposición
   | | |---
9  | | | B              1, 8 (≡E)
10 | | | ~B             7 (R)
11 | | ~A               8-10 (~I)
12 | ~A ≡ ~B            2-11 (≡I)
```


Cap-5.pmd 134 13/07/07, 04:37 p.m.

En la segunda derivación se invierte el procedimiento. Tomamos "~A ≡ ~B" como suposición principal, y derivamos "A ≡ B":

Derive: A ≡ B

1	~A ≡ ~B	Suposición
2	A	Suposición
3	~B	Suposición
4	~A	1, 3 (≡E)
5	A	2 (R)
6	B	3-5 (~E)
7	B	Suposición
8	~A	Suposición
9	~B	1, 8 (≡E)
10	B	7 (R)
11	A	8-10 (~E)
12	A ≡ B	2-11 (≡I)

Ejercicio 5.9

Pruebe que los siguientes pares de fórmulas de *LP* son equivalentes en *SDN*:

1.	D & (E & F)	(D & E) & F
2.	D	~~D
3.	D & D	D ∨ D
4.	D ⊃ E	~E ⊃ ~D
5.	D ≡ E	E ≡ D

5.3.5 *Inconsistencia*

El último concepto que definiremos es la inconsistencia de un conjunto dentro del sistema de deducción natural:

> Un conjunto Γ de fórmulas de *LP* es ***inconsistente en SDN*** si y sólo si una fórmula $\mathcal{P}$ y su negación, ~$\mathcal{P}$, son derivables de Γ.

El siguiente conjunto es inconsistente en *SDN*:

(22) {F ⊃ ~G, ~F ⊃ ~H, (~F ∨ G) & H}

Para probar su inconsistencia, debemos tomar los miembros del conjunto como suposiciones principales y derivar una fórmula y su contraria en la línea de rango principal. La dificultad reside en que no sabemos con antelación cuáles son las fórmulas que debemos derivar. Nuestra primera opción es buscar, entre las fórmulas que forman las suposiciones principales, dos fórmulas opuestas. En este ejemplo, “H” y “~H” ocurren dentro de fórmulas más complejas, así que intentaremos derivarlas:

1	F ⊃ ~G	Suposición
2	~F ⊃ ~H	Suposición
3	(~F ∨ G) & H	Suposición
4	~F ∨ G	3 (&E)
5	| ~F	Suposición
6	| ~H	2, 5 (⊃E)
7	| G	Suposición
8	| | F	Suposición
9	| | ~G	1, 8 (⊃E)
10	| | G	7 (R)
11	| ~F	8-10 (~I)
12	| ~H	2, 11 (⊃E)
13	~H	4, 5-12 (∨E)
14	H	3 (&E)

La fórmula “~H” derivada en la línea 13 es la negación de la fórmula “H” derivada en la línea 14, y ambas fórmulas ocurren en el rango de las suposiciones principales. Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto es inconsistente en *SDN*.

Si un conjunto de fórmulas de *LP* es inconsistente en *SDN*, cualquier fórmula de *LP* es derivable del conjunto. Podemos probar esta afirmación del siguiente modo. Supongamos que un conjunto de fórmulas es inconsistente en *SDN*. Entonces debe haber una derivación en la cual todas las suposiciones principales sean miembros del conjunto y una fórmula $\mathcal{P}$ y su negación, ~$\mathcal{P}$, ocurran en el rango de esas suposiciones. Si $\mathcal{P}$ ocurre en la línea *i* de la derivación, y ~$\mathcal{P}$ ocurre en la línea *j*, podemos derivar cualquier fórmula $\mathcal{Q}$ de *LP* a partir de la línea *n* de la siguiente manera:

Cap-5.pmd 136 13/07/07, 03:16 p.m.

i	$\mathcal{P}$	
j	$\sim\mathcal{P}$	
n	$\sim\mathcal{Q}$	Suposición
$n+1$	$\mathcal{P}$	i (R)
$n+2$	$\sim\mathcal{P}$	j (R)
$n+3$	$\mathcal{Q}$	n - $n+2$ (~E)

En breve, si tanto $\mathcal{P}$ como $\sim\mathcal{P}$ son derivables de un conjunto Γ entonces cualquier otra fórmula de *LP* es derivable en tan sólo cuatro pasos más. Ésta es la principal razón por la que una persona racional debe evitar tener creencias inconsistentes: desde el punto de vista de un conjunto inconsistente de creencias, cualquier cosa es demostrable.

Ejercicio 5.10

Pruebe que los siguientes conjuntos de fórmulas son inconsistentes en *SDN*:

1. {(R ∨ Q) ⊃ Q, P ⊃ R, P & ~Q}
2. {L ⊃ ~L, ~L ⊃ L}
3. {Q ≡ (P & ~P), ~Q ⊃ (P & ~P)}
4. {L ≡ ~(L ≡ L), L}
5. {~P, ~Q, ~(Q ≡ P)}
6. {~K ⊃ ~M, M ⊃ (K ⊃ N), (L & M) & ~N}
7. {(~Q ⊃ ~R) & (Q ⊃ R), R ⊃ ~Q, ~(P & ~R), P ≡ (~Q ∨ R)}

Finalizaremos esta sección con una serie de ejercicios de mayor grado de dificultad. Es aconsejable resolver los ejercicios 5.6 - 5.10 antes de intentar resolver el ejercicio 5.11.

Ejercicio 5.11

A. Construya una derivación para probar cada una de las siguientes afirmaciones:

1. {N ⊃ O, ~N ⊃ ~O} ⊢ N ≡ O
2. {A ⊃ B} ⊢ ~B ⊃ ~A
3. {A ∨ B, ~B} ⊢ A
4. {Y ∨ (Y ∨ Y)} ⊢ Y
5. {~(Y ⊃ X), ~(X ⊃ Z)} ⊢ W
6. {~(E ∨ F), E ≡ ~(F ≡ ~D)} ⊢ D

Cap-5.pmd 137 13/07/07, 03:16 p.m.

7. $\{\sim(B \supset C), \sim(A \supset B)\} \vdash \sim D$
8. $\{M \equiv (\sim N \vee O), N \supset O\} \vdash M$
9. $\{(A \vee B) \vee C\} \vdash A \vee (B \vee C)$
10. $\{N \vee \sim M, \sim N \vee \sim M\} \vdash \sim M$
11. $\{[\sim(D \supset F) \,\&\, \sim A] \equiv [E \supset (B \,\&\, \sim C)], (D \supset F) \vee A\} \vdash [E \supset (B \,\&\, \sim C)] \supset G$
12. $\{(J \supset L) \supset K, (J \supset L) \vee \sim K\} \vdash \sim K \equiv \sim(J \supset L)$
13. $\{F \equiv G\} \vdash (H \equiv F) \equiv (H \equiv G)$
14. $\{[B \vee (D \vee E)] \,\&\, (B \equiv C), D \supset A, A \supset \sim D\} \vdash B \vee E$
15. $\{(\sim D \equiv B) \,\&\, (C \supset A), A \supset (D \,\&\, B)\} \vdash (A \vee B) \supset \sim C$
16 $\{\sim(P \equiv Q)\} \vdash \sim P \equiv Q$

B. Pruebe que cada uno de los siguientes argumentos es válido en *SDN*:

1.
$$\begin{array}{l} (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C) \\ \hline A \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{l} M \equiv \sim M \\ \hline N \equiv \sim O \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{l} A \supset \sim\sim B \\ \sim\sim A \\ \hline B \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{l} M \equiv N \\ N \equiv \sim O \\ \hline \sim(M \equiv O) \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{l} \sim C \,\&\, D \\ B \supset C \\ B \vee A \\ \hline A \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{l} O \vee (M \equiv N) \\ \sim N \\ M \\ \hline O \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{l} B \supset A \\ [B \equiv (A \,\&\, B)] \supset [C \,\&\, \sim(A \,\&\, D)] \\ \sim(A \,\&\, D) \equiv (C \,\&\, \sim D) \\ \hline \sim D \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{l} (S \,\&\, P) \supset \sim M \\ Q \supset (M \,\&\, \sim M) \\ N \supset [M \,\&\, (S \,\&\, P)] \\ \hline \sim Q \equiv \sim N \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{l} A \vee \sim(\sim B \vee D) \\ \sim(\sim B \vee D) \supset \sim A \\ \hline \sim A \equiv \sim(\sim B \vee D) \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{l} (\sim M \vee N) \vee O \\ O \supset \sim P \\ \hline (M \,\&\, P) \supset N \end{array}$$

11.
$$\begin{array}{l} C \vee B \\ \sim B \vee A \\ \sim A \\ \hline C \end{array}$$

12.
$$\begin{array}{l} N \vee M \\ \sim M \equiv (L \vee O) \\ (O \,\&\, P) \vee [O \,\&\, (K \supset O)] \\ \hline N \end{array}$$

Cap-5.pmd 138 13/07/07, 03:16 p.m.

C. Pruebe que las siguientes fórmulas de *LP* son teoremas de *SDN*:

1. $\sim[(F \& G) \& \sim(F \& G)]$
2. $F \equiv \sim\sim F$
3. $(F \equiv \sim F) \supset \sim(F \equiv \sim F)$
4. $[(F \supset G) \supset F] \supset F$
5. $(F \supset G) \vee (G \supset F)$
6. $(F \equiv G) \equiv [(F \supset G) \& (G \supset F)]$
7. $[F \supset (G \supset H)] \equiv [(F \supset G) \supset (F \supset H)]$
8. $[(F \vee G) \supset H] \equiv [(F \supset H) \& (G \supset H)]$
9. $[(F \equiv G) \supset H] \supset [\sim(F \& G) \vee H]$
10. $\sim([H \vee (F \vee \sim G)] \& (G \& [(F \vee H) \supset \sim G]))$

D. Pruebe que los siguientes pares de fórmulas de *LP* son equivalentes en *SDN*:

1.	$F \supset G$	$\sim F \vee G$
2.	$F \& \sim F$	$G \& \sim G$
3.	$F \& \sim G$	$\sim(F \supset G)$
4.	$(G \& F) \vee H$	$(G \vee H) \& (F \vee H)$
5.	$F \equiv G$	$(F \& G) \vee (\sim F \& \sim G)$
6.	$\sim(F \equiv G)$	$(F \& \sim G) \vee (\sim F \& G)$

E. Pruebe que los siguientes conjuntos de fórmulas son inconsistentes en *SDN*:

1. $\{(M \supset N) \& (\sim M \supset N), (N \supset B) \& (N \supset \sim B)\}$
2. $\{(A \vee C) \supset (B \& \sim D), (B \vee C) \supset D, \sim C \supset A\}$
3. $\{\sim C \& \sim(A \vee \sim B), A \vee (B \supset C)\}$
4. $\{S \& (Q \vee P), (\sim P \vee R) \& (R \supset \sim R), \sim Q\}$
5. $\{X, [(X \equiv Z) \equiv (Y \& \sim Y)] \equiv Z\}$

5.4* *SDN**

El sistema de deducción natural desarrollado hasta aquí está basado únicamente en una serie de reglas que nos permiten introducir y eliminar cada uno de los conectores lógicos. En el proceso de aprendizaje, la simplicidad del sistema es una ventaja, pues nos permite entender cómo, a partir de una conjunto limitado de reglas, es posible crear derivaciones de gran complejidad. Por razones prácticas, sin embargo, es deseable ampliar este sistema añadiendo nuevas reglas que nos ahorran tiempo y esfuerzo. La adición de estas reglas a *SDN* genera un nuevo sistema que llamaremos *SDN**. Los dos sistemas son lógicamente equivalentes pues todo lo que puede ser derivado utilizando las nuevas reglas, puede ser derivado con las reglas originales de *SDN*.

Las reglas adicionales se pueden dividir en dos tipos: las reglas de inferencia y las reglas de equivalencia. Las primeras nos permiten *derivar* una fórmula a partir de otras fórmulas, como sucede en todas las reglas estudiadas hasta ahora. Las segundas nos permiten *reemplazar* una fórmula por otra lógicamente equivalente, incluso cuando esta fórmula hace parte de una fórmula más compleja.

Reglas de inferencia de *SDN**

Modus Tollens (MT)

$$\begin{array}{r|l} & \mathcal{P} \supset \mathcal{Q} \\ & {\sim}\mathcal{Q} \\ \blacktriangleright & {\sim}\mathcal{P} \end{array}$$

Silogismo Hipotético (SH)

$$\begin{array}{r|l} & \mathcal{P} \supset \mathcal{Q} \\ & \mathcal{Q} \supset \mathcal{R} \\ \blacktriangleright & \mathcal{P} \supset \mathcal{R} \end{array}$$

Silogismo Disyuntivo (SD)

$$\begin{array}{r|l} & \mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \\ & {\sim}\mathcal{P} \\ \blacktriangleright & \mathcal{Q} \end{array} \qquad \text{o} \qquad \begin{array}{r|l} & \mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \\ & {\sim}\mathcal{Q} \\ \blacktriangleright & \mathcal{P} \end{array}$$

Reglas de equivalencia de *SDN**

Conmutación (Conm)

$$\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q} \;::\; \mathcal{Q} \,\&\, \mathcal{P}$$
$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \;::\; \mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$$

Asociación (Asoc)

$$\mathcal{P} \,\&\, (\mathcal{Q} \,\&\, \mathcal{R}) \;::\; (\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q}) \,\&\, \mathcal{R}$$
$$\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) \;::\; (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R}$$

Doble Negación (DN)

$$\mathcal{P} \;::\; {\sim\sim}\mathcal{P}$$

Implicación (Impl)

$$\mathcal{P} \supset \mathcal{Q} \;::\; {\sim}\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$$

Transposición (Trans)

$$\mathcal{P} \supset \mathcal{Q} \;::\; {\sim}\mathcal{Q} \supset {\sim}\mathcal{P}$$

Exportación (Export)

$$\mathcal{P} \supset (\mathcal{Q} \supset \mathcal{R}) \;::\; (\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q}) \supset \mathcal{R}$$

De Morgan (DeM)

$${\sim}(\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q}) \;::\; {\sim}\mathcal{P} \vee {\sim}\mathcal{Q}$$
$${\sim}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \;::\; {\sim}\mathcal{P} \,\&\, {\sim}\mathcal{Q}$$

Idempotencia (Idem)

$$\mathcal{P} \;::\; \mathcal{P} \,\&\, \mathcal{P}$$
$$\mathcal{P} \;::\; \mathcal{P} \vee \mathcal{P}$$

Cap-5.pmd 140 13/07/07, 03:16 p.m.

Distribución (Distr)	*Equivalencia* (Equiv)
$\mathcal{P}$ & $(\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$: : $(\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P}$ & $\mathcal{R})$	$\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$: : $(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q})$ & $(\mathcal{Q} \supset \mathcal{P})$
$\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q}$ & $\mathcal{R})$: : $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ & $(\mathcal{P} \vee \mathcal{R})$	$\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$: : $(\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}) \vee (\sim\mathcal{P}$ & $\sim\mathcal{Q})$

Las reglas de equivalencia permiten el reemplazo de sólo uno de los componentes proposicionales de una fórmula. Por ejemplo, podemos reemplazar sólo la primera fórmula de la siguiente disyunción utilizando una de las reglas de De Morgan:

(23) ~(Y & Z) ∨ W

(23a) (~Y ∨ ~Z) ∨ W

Pero también podemos aplicar las reglas de equivalencia a la fórmula completa. Por ejemplo, utilizando la regla de Implicación podemos transformar la fórmula **(22)** en una fórmula equivalente:

(23b) (Y & Z) ⊃ W

En el siguiente ejemplo pondremos en práctica varias de las nuevas reglas. Probaremos que el siguiente argumento es válido en *SDN**:

(24) (J & G) ∨ (H & ~I)
I ⊃ ~(J & F)
―――――――――
I ⊃ ~F

Derive: I ⊃ ~F

1	(J & G) ∨ (H & ~I)	Suposición
2	I ⊃ ~(J & F)	Suposición
3	I	Suposición
4	~(J & F)	2, 3 (⊃E)
5	~J ∨ ~F	4 (DeM)
6	~~I	3 (DN)
7	~H ∨ ~~I	6 (∨I)
8	~(H & ~I)	7 (DeM)
9	J & G	1, 8 (SD)
10	J	9 (&E)
11	~~J	10 (DN)
12	~F	5, 11 (SD)
13	I ⊃ ~F	3-12 (⊃I)

Cap-5.pmd 141 13/07/07, 03:16 p.m.

En los pasos 5, 6, 8 y 11 utilizamos reglas de equivalencia, y en el resto de la derivación reglas de inferencia. Examinaremos ahora un ejemplo un poco más complejo. Probaremos que el siguiente conjunto es inconsistente en *SDN**:

(25) {[(F ⊃ G) ∨ (~F ⊃ G)] ⊃ H, (A & H) ⊃ ~A, A ∨ ~H}

1	[(F ⊃ G) ∨ (~F ⊃ G)] ⊃ H	Suposición
2	(A & H) ⊃ ~A	Suposición
3	A ∨ ~H	Suposición
4	~H	Suposición
5	~[(F ⊃ G) ∨ (~F ⊃ G)]	1, 4 (MT)
6	~(F ⊃ G) & ~(~F ⊃ G)	5 (DeM)
7	~(F ⊃ G)	6 (&E)
8	~(~F ∨ G)	7 (Impl)
9	~~F & ~G	8 (DeM)
10	~~F	9 (&E)
11	~(~F ⊃ G)	6 (&E)
12	~(~~F ∨ G)	11 (Impl)
13	~~~F & ~G	12 (DeM)
14	~~~F	13 (&E)
15	H	4-14 (~E)
16	A	Suposición
17	A & H	15, 16 (&I)
18	~A	2, 17 (⊃E)
19	A	16 (R)
20	~A	16-19 (~I)
21	~H	3, 20 (SD)

Ejercicio 5.12

Pruebe que cada una de los siguientes argumentos es válido en *SDN**:

1. [(G & I) ∨ J] ∨ ~F
F & [(J ∨ G) ⊃ H]
――――――――
H ∨ K

2. ~(E & A) ⊃ ~(D ⊃ C)
(D ⊃ C) ∨ (B ⊃ C)
~E & ~C
――――――――
~B

3. [D ∨ (S ≡ ~R)] ⊃ T
(T ⊃ S) ∨ (T ⊃ ~D)
R & ~S
――――――――
D ⊃ ~T

4. ~H ∨ I
~(J & ~H)
K ⊃ ~I
――――――――
J ⊃ ~(K ∨ ~I)

Cap-5.pmd 142 13/07/07, 03:16 p.m.

5. $\sim P \supset \sim(A \vee G)$
   $(P \,\&\, \sim I) \supset (O \,\&\, D)$
   ———
   $(\sim I \,\&\, \sim D) \supset \sim A$

6. $A \supset [P \vee \sim(G \vee D)]$
   $\sim D \supset G$
   ———
   $\sim P \supset \sim A$

7. $(T \equiv \sim S) \,\&\, (\sim S \equiv C)$
   ———
   $[(T \,\&\, C) \,\&\, \sim S] \vee [(S \,\&\, \sim C) \,\&\, \sim T]$

8. $(T \,\&\, \sim S) \supset A$
   $\sim B \supset \sim S$
   $\sim S \vee C$
   $C \supset R$
   ———
   $\sim A \supset [T \supset (R \,\&\, B)]$

Cap-5.pmd 143 13/07/07, 03:16 p.m.

Romanas.pmd 6 13/07/07, 03:25 p.m.

SEGUNDA PARTE

LA LÓGICA DE PRIMER ORDEN

6. Introducción a la lógica de predicados

La lógica proposicional es un sistema formal relativamente simple que nos permite representar gran parte de la estructura y el contenido del español, nuestro lenguaje natural. Sin embargo, la simplicidad de la lógica proposicional, que desde un punto de vista estructural es una virtud, se convierte en una limitación si consideramos que hay una gran cantidad de información que debe ser ignorada en el análisis de un texto. El problema reside en que, al tomar a los enunciados como las unidades mínimas de análisis, se excluyen detalles dentro de éstos que afectan la validez de las inferencias que llevamos a cabo. Consideremos un ejemplo. El siguiente argumento aparentemente es lógicamente válido:

(1) A todas las hermanas de Victoria les gustan todos los pintores italianos. A Claudia no le gusta Rafael, y Rafael es un pintor italiano. Por lo tanto, Claudia no es hermana de Victoria.

Sin embargo, si intentamos simbolizar este pasaje en el lenguaje *LP*, obtenemos un argumento semánticamente inválido:

(1a)

$$\begin{array}{l} G \\ \sim C \ \& \ R \\ \hline \sim V \end{array}$$

La simbolización en *LP* ignora las relaciones lógicas basadas en la información en el interior de los enunciados. La sintaxis de *LP* no nos permite mostrar que existe una relación lógica entre el hecho de que a alguien le guste Rafael, el hecho de que Rafael sea un pintor italiano y el hecho de que a alguien le gusten los pintores italianos.

Otra de las limitaciones del lenguaje *LP* reside en que las fórmulas atómicas que constituyen el lenguaje se limitan a representar enunciados cuyo sujeto es un individuo particular. Así, aunque el enunciado:

(2) Todos los países del mundo tienen acceso al mar, o no lo tienen.

Cap-6.pmd 147 13/07/07, 03:18 p.m.

es una verdad lógica, para poder representarla en el lenguaje *LP* tendríamos que especificar, para cada país, que éste tiene o no tiene acceso al mar. Por ejemplo, para Bolivia tendríamos que utilizar la fórmula "B", que representa el enunciado "Bolivia tiene acceso al mar", y formar la disyunción con su negación: "B ∨ ~B". Tras llevar a cabo el mismo proceso con cada uno de los países del mundo, tendríamos que proceder a formar la conjunción de todas estas fórmulas:

(2a) [(A ∨ ~A) & (B ∨ ~B)] & (C ∨ ~C) & ...

En el caso de los países del mundo, estamos hablando de un conjunto finito. Pero cuando la clase de cosas de la que estamos hablando es infinita, la conjunción también lo será.

En este capítulo desarrollaremos un nuevo lenguaje que nos permitirá sacar a la luz las relaciones lógicas que dependen de la información en el interior de los enunciados, y hacer afirmaciones acerca de clases finitas e infinitas de cosas y no solamente acerca de individuos. Por razones que se entenderán después, llamaremos a este lenguaje *Lógica Cuantificada* (*LC*). El lenguaje *LC* es una ***extensión*** del lenguaje *LP*, lo cual quiere decir que *LC* contiene i) todas las fórmulas de *LP* y ii) nuevas fórmulas que pueden ser construidas utilizando nuevos símbolos y nuevas reglas de formación.

Es importante tener en cuenta que incluso utilizando este nuevo lenguaje no será posible simbolizar absolutamente todos los argumentos expresables en un lenguaje natural. A lo largo de los próximos capítulos iremos viendo algunas de las limitaciones de *LC* y algunos de los remedios que han sido sugeridos por lógicos, filósofos y científicos de la computación.

6.1 Introducción informal a *LC*

Para poder entender la estructura interna de un enunciado debemos introducir varios conceptos fundamentales. Comenzaremos con el estudio de los términos singulares y generales.

6.1.1 *Términos singulares*

Un ***término singular*** es cualquier palabra o frase que designe o denote o se refiera a una cosa individual. Los términos singulares más comunes son los ***nombres propios***. Palabras como "Woody Allen", "Tintoretto" o "Buenos Aires" siempre son utilizadas para hacer referencia a una persona u objeto individual. Además de los nombres propios, hay otra clase de términos singulares conocidos como ***descripciones definidas***. "El fundador de Lima", "el inventor del microscopio" y "el actual rey de España" son ejemplos de descripciones definidas. Una descripción definida debe describir exactamente a un individuo. La frase “una hermana de Raquel” no es una descripción definida, pero “la hermana de Raquel” sí lo es, porque afirma implícitamente que Raquel sólo tiene una hermana.

El objeto designado por un nombre o una descripción definida depende en gran parte del contexto. El nombre propio “Elvis Presley” generalmente designa a un cantante de Rocanrol, pero alguien puede haber bautizado a su loro “Elvis Presley”, en cuyo caso el nombre designa a un animal, no a una persona. Del mismo modo, la descripción “la persona con la que está hablando Raquel” designa a diferentes personas en diferentes ocasiones. Al analizar un enunciado que contenga un nombre o una descripción definida debemos asumir un contexto específico de tal modo que las variaciones contextuales no cambien el objeto denotado. Además, en lo que sigue siempre asumiremos que existe un contexto en el cual los términos singulares denotan algún objeto concreto[1].

A menudo un *pronombre* remplaza a un término singular en una oración. En esos casos, la referencia de los pronombres se determina a partir del nombre propio o de la descripción que están remplazando. Por ejemplo, en el enunciado:

(3) Si Sandra hubiera estudiado anoche, entonces <u>ella</u> no se estaría lamentando.

la referencia de la palabra “ella” se establece a partir de la referencia de “Sandra” en el antecedente del condicional.

6.1.2 *Términos generales*

A diferencia de los términos singulares, palabras como “pintor”, “dipsómano”, “alto” o “tigre” no sirven para referirse a un individuo en particular. Su función es esencialmente clasificatoria: sirven para representar ***propiedades*** (cualidades, atributos o características) que uno o más individuos pueden tener en común. Llamaremos a tales expresiones ***términos generales*** porque son utilizados para caracterizar una clase general de individuos, a saber, los individuos que poseen la propiedad en cuestión.

Un término general puede ocurrir en el predicado de un enunciado en forma de sustantivo (“Rafael es un artista”), de verbo (“Rafael está pintando”) y de adjetivo (“Las obras de Rafael son conmovedoras”). Aunque los términos generales son utili-

1. Muchos términos singulares no tienen designación. Por ejemplo, una descripción como “el actual rey de Francia” no designa nada en el mundo real porque no existe ninguna persona que corresponda a esa descripción en la actualidad. En la sección final del capítulo nos ocuparemos de este tipo de descripciones definidas. Del mismo modo, nombres como “Don Quijote”, “Sherlock Holmes” o “Superman” tampoco designan a algún individuo. El problema de los nombres propios que carecen de denotación es bastante más complejo debido a sus implicaciones filosóficas, y no será estudiado en este libro. David Lewis explica el problema y sus implicaciones en su artículo “Truth in Fiction” (1978), el cual contiene referencias a la extensa literatura sobre el tema.

zados para designar clases de individuos, es posible imaginar clases de cosas que no existen. Por ejemplo, "unicornio" es un término general así ningún individuo posea la propiedad de ser un unicornio.

Además de su función clasificatoria, los términos generales también sirven para expresar ***relaciones***. Consideremos el siguiente enunciado:

(4) Rafael es más alto que Tintoretto.

El enunciado afirma que Rafael pertenece a la clase de cosas que son más altas que Tintoretto. Pero desde otro punto de vista, el enunciado afirma que la pareja conformada por Rafael y Tintoretto pertenece a la clase de parejas en las que el primer miembro es más alto que el segundo. En otras palabras, el enunciado **(4)** expresa una *relación* entre dos individuos a través del término general "más alto que".

Un término general puede relacionar más de dos individuos, como en el siguiente enunciado:

(5) Florencia está entre Milán y Roma.

Las relaciones entre dos individuos son relaciones diádicas; entre tres individuos, relaciones triádicas; y así sucesivamente.

6.1.3 *Enunciados singulares*

Con la ayuda de los anteriores conceptos, pasamos a definir dos tipos diferentes de enunciados, los enunciados singulares y los enunciados generales. Comenzaremos con los primeros.

El tipo más simple de ***enunciado singular*** sólo contiene dos partes:

1. Un ***sujeto*** en el que sólo ocurre un término singular que denota un individuo.
2. Un ***predicado*** que contiene un término general que le atribuye una propiedad al individuo designado por el término singular que aparece en el sujeto.

Los siguientes son ejemplos de este tipo de enunciados singulares:

(6) Rafael es un pintor.
(7) Edgar es dipsómano.
(8) El primer hombre en llegar a la luna era estadounidense.

Cap-6.pmd 150 22/08/07, 08:51 a.m.

Los sujetos y los predicados en cada caso son:

Sujetos	Predicados
Rafael	________ es un pintor
Edgar	________ es dipsómano
El primer hombre en llegar a la luna	________ era estadounidense

El espacio en blanco en el predicado representa el lugar que ocupa el término singular. En general, un predicado puede ser entendido como el resultado de eliminar de un enunciado uno o más términos singulares.

El siguiente tipo de enunciado singular que consideraremos está formado por dos o más términos singulares y un término general que expresa una relación. Los siguientes son ejemplos de este segundo tipo de enunciados singulares:

(9) Tintoretto es más alto que Rafael.

(10) Aristóteles fue alumno de Platón.

(11) Mendoza está entre Santiago de Chile y Buenos Aires.

En este tipo de enunciados no podemos hacer una simple separación en sujeto y predicado. Si un predicado es lo que resulta de eliminar uno o más términos singulares, el predicado en el enunciado **(11)** podría ser cualquiera de los siguientes:

________ está entre Santiago de Chile y Buenos Aires.
Mendoza está entre ______________ y Buenos Aires.
Mendoza está entre Santiago de Chile y ___________.
Mendoza está entre ______________ y ___________.
________ está entre Santiago de Chile y ___________.
________ está entre ______________ y Buenos Aires.
________ está entre ______________ y ___________.

En estos casos debemos limitarnos a señalar los términos singulares y hacer una lista de los posibles predicados. Los tres primeros son predicados ***monádicos*** porque sólo tienen un espacio en blanco. Los siguientes tres son predicados ***diádicos***. El último es un predicado ***triádico***. En general, un predicado con *n* espacios en blanco es un predicado de grado *n*. Más adelante estudiaremos cómo tomar una decisión acerca de cuál predicado utilizar como base del análisis de un enunciado que expresa una relación.

Cap-6.pmd 151 13/07/07, 03:18 p.m.

6.1.4 *Enunciados generales*

Hay enunciados que hacen una afirmación, no acerca de un individuo en particular, sino acerca de una clase de individuos. Consideremos el siguiente enunciado:

(12) Todos los pintores son dipsómanos.

El enunciado **(12)** no es un enunciado singular porque no se refiere a un pintor en particular. Lo que afirma el enunciado es que todo aquel individuo que tenga la propiedad de ser pintor, también tiene la propiedad de ser dipsómano. El sujeto del enunciado, si podemos usar esa expresión, es un individuo indeterminado. Y los predicados involucrados son:

______________ es un pintor

______________ es un dipsómano

Este tipo de enunciados serán llamados ***enunciados generales***. Los enunciados generales casi siempre están antecedidos de, o contienen, palabras como "todos", "algunos", "alguien", "cada", "ninguno", términos que llamaremos ***cuantificadores***.

Existen dos tipos de cuantificadores, el cuantificador ***existencial*** y el cuantificador ***universal***. Dependiendo del tipo de cuantificador que ocurra en el enunciado, éste será un ***enunciado general existencial*** o un ***enunciado general universal***. A continuación examinaremos brevemente cada uno de ellos.

Consideremos los siguientes enunciados:

(13) Alguien está mintiendo.

(14) Alguien es más rico que Bill Gates.

(15) Algunos mamíferos vuelan.

Los términos subrayados son cuantificadores existenciales. En la lógica cuantificada, el significado de las palabras subrayadas es equivalente al de la frase "al menos uno". En el enunciado **(13)**, el cuantificador nos indica que, dado un grupo de individuos al que llamaremos el ***universo del discurso***, al menos uno de ellos tiene la propiedad de ser un mentiroso. El enunciado **(14)** nos dice que al menos un individuo en el universo del discurso tiene la relación "ser más rico que" con Bill Gates. El enunciado **(15)** nos dice que la clase de los mamíferos y la clase de las cosas que vuelan tienen al menos un elemento en común. En otras palabras, hay al menos un individuo que tiene ambas propiedades.

Consideremos ahora tres enunciados que contienen cuantificadores universales:

(16) Todos son impermeables.

(17) Guillermo les debe dinero a todos.

(18) Cada oso tiene pelo.

En el enunciado **(16)**, afirmamos que todos los individuos del universo del discurso poseen la propiedad en cuestión: impermeabilidad. El enunciado **(17)**, por su parte, afirma que Guillermo tiene la relación "deber dinero a" con todos los individuos del universo del discurso. Finalmente, el enunciado **(18)** afirma que la clase de los osos está totalmente incluida en la clase de las cosas que tienen pelo, es decir, que cualquier individuo que sea oso también tiene pelo[2].

Ejercicio 6.1

Identifique los términos singulares, los cuantificadores y todos los posibles predicados en cada uno de los siguientes enunciados.

1. Santiago es arquitecto.
2. Gonzalo es amable.
3. Santiago ama a Claudia.
4. Marco Pérez es profesor en la Universidad de Buenos Aires.
5. Santiago de Chile está al sur de Lima y al norte de Concepción.
6. 2 es menor que 8.
7. 3 por 4 es igual a 2 por 6.
8. Marta y Edgardo son los padres de Martín y Andrea.
9. Algunas estrellas son supernovas.
10. Algunos números naturales son pares.

6.2 Introducción formal al lenguaje *LC*

Pasamos ahora a considerar la simbolización en el lenguaje *LC* de los elementos estructurales identificados en la sección anterior. Utilizaremos como ejemplo inicial el enunciado **(6)**:

2. No todos los enunciados generales están antecedidos explícitamente por un cuantificador. Los siguientes enunciados dicen lo mismo que los enunciados **(12)** y **(18)**, respectivamente, sin usar un cuantificador:

(12a) Los pintores son dipsómanos.

(18a) El oso tiene pelo.

Cap-6.pmd 153 13/07/07, 03:18 p.m.

(6) Rafael es un pintor.

En la lógica proposicional, la simbolización de este enunciado sería una letra proposicional como "R". Pero en vez de considerar el enunciado como una unidad sellada, analizaremos su contenido de la siguiente manera. Tomaremos el término singular "Rafael" y le asignaremos la letra minúscula "r". El resultado es:

(6a) r es un pintor.

Ahora le asignaremos la letra mayúscula "P" al predicado "__________ es pintor". El resultado es:

(6b) rP

Finalmente, invertimos el orden[3]:

(6c) Pr

La fórmula **(6c)** es la simbolización en *LC* del enunciado **(6)**. La letra "r" en **(6c)** es un ejemplo de una ***constante individual* de *LC***. Las constantes individuales son utilizadas para simbolizar nombres propios[4]. Utilizaremos letras minúsculas de la "a" a la "v" como constantes de *LC*. La letra "P" en **(6c)** es un ejemplo de un ***predicado* de *LC***. Los predicados de *LC* representan las propiedades y relaciones expresadas en un enunciado. Utilizaremos letras mayúsculas de la "A" a la "Z" como predicados de *LC*. Así, la fórmula **(6c)** afirma que el objeto denotado por la constante "r" tiene la propiedad expresada por el predicado "P"; en otras palabras, que Rafael tiene la propiedad de ser pintor.

Para especificar la interpretación que queremos darle a los predicados y constantes de *LC* debemos introducir una ***guía de simbolización***. Para indicar que el predicado es de grado *n*, utilizaremos *n* ***variables individuales***, letras minúsculas de la "w" a la "z" en bastardilla, escritas inmediatamente después del predicado. Así, en el ejemplo **(6)**, la guía de simbolización es:

P*x*: *x* es un pintor
r: Rafael

3. La inversión en el orden del sujeto y el predicado es el resultado de un accidente histórico. Gottlob Frege, uno de los inventores de la lógica cuantificada a finales del siglo XIX, pensaba que los predicados eran funciones que producían valores de verdad al ser aplicadas a objetos. Como los símbolos para las funciones en matemáticas generalmente se escriben antes de los nombres de las cosas a las que se aplican, Frege adoptó esta convención matemática.

4. Aunque los términos singulares incluyen tanto a los nombres propios como a las descripciones definidas, utilizaremos constantes sólo para simbolizar los primeros. Los enunciados que contienen descripciones definidas requieren un análisis bastante más complejo que los enunciados que sólo contienen nombres propios y pronombres. Por esa razón pospondremos su análisis hasta la última sección del capítulo.

Cap-6.pmd 154 13/07/07, 03:18 p.m.

Expresiones como "P*x*" y "E*yz*" serán llamadas ***funciones proposicionales***, pues aunque en sí mismas no simbolizan un enunciado, sí lo hacen cuando la variable individual es sustituida por una constante individual.

Al igual que sucedía en *LP*, para representar un predicado escogeremos una letra que nos recuerde el contenido del predicado. Por ejemplo, para representar "*x* ama a *y*" lo más natural es escribir la fórmula "A*xy*". Finalmente, la guía de simbolización debe especificar cuál es el universo del discurso, el cual abreviaremos como "UD". Consideremos el siguiente ejemplo de una guía de simbolización:

UD:	Personas en el salón de clase de Adriana				
G*xy*:	A *x* le gusta *y*	a:	Adriana	h:	Horacio
M*xy*:	*x* es mayor que *y*	r:	Rebeca	s:	Susana
P*x*:	*x* es pusilánime				

Utilizando esta guía, simbolizaremos los siguientes enunciados en *LC*:

(19) A Susana le gusta Horacio.
(20) A Horacio le gusta Susana.
(21) Rebeca es pusilánime.
(22) Horacio es mayor que Susana y Susana es mayor que Adriana.
(23) A Susana le gusta Horacio pero a Horacio le gusta Rebeca.
(24) Si a Susana le gusta Horacio, entonces Susana es mayor que Horacio.
(25) Si Adriana es pusilánime, entonces Rebeca no es pusilánime.

Corresponden a:

(19a) Gsh
(20a) Ghs
(21a) Pr
(22a) Mhs & Msa
(23a) Gsh & Ghr
(24a) Gsh ⊃ Msh
(25a) Pa ⊃ ~Pr

Utilizaremos la misma guía de simbolización para establecer los enunciados en español simbolizados por las siguientes expresiones de *LC*:

(26) Grh ⊃ Gra
(27) Ghr & ~Grh

Cap-6.pmd 155 13/07/07, 03:18 p.m.

(28) Mrh & ~Mrs

(29) Msh ⊃ Ghs

(30) (Gah ∨ Gas) ⊃ (Gah & Gas)

Corresponden a:

(26a) Si a Rebeca le gusta Horacio, entonces a Rebeca le gusta Adriana.

(27a) A Horacio le gusta Rebeca, pero a Rebeca no le gusta Horacio.

(28a) Rebeca es mayor que Horacio pero Rebeca no es mayor que Susana.

(29a) Si Susana es mayor que Horacio, entonces a Horacio le gusta Susana.

(30a) Si a Adriana le gusta Horacio o Susana, entonces a Adriana le gustan Horacio y Susana.

Utilizando los elementos de *LC* considerados hasta el momento, podemos simbolizar algunas frases cuantificadas:

(31) Todos son pusilánimes.

(32) A Adriana le gusta alguien.

(33) A Adriana le gustan todos.

Estos enunciados corresponden a las siguientes fórmulas de *LC*:

(31a) (Pa & Ph) & (Pr & Ps)

(32a) (Gaa ∨ Gah) ∨ (Gar ∨ Gas)

(33a) (Gaa & Gah) & (Gar & Gas)

En las fórmulas **(32a)** y **(33a)** debemos incluir el caso en el que Adriana se gusta a sí misma porque los cuantificadores "alguien" y "todos" se aplican a todos los miembros del universo del discurso, incluyendo a Adriana.

Cuando un enunciado contiene cuantificadores y el universo del discurso no es muy grande, como en el ejemplo anterior, es posible crear conjunciones y disyunciones que incluyan a todos los miembros de ese universo. Pero cuando el universo del discurso es demasiado grande, es muy difícil utilizar el mismo recurso. Y cuando el universo del discurso es infinito, es simplemente imposible[5].

Por esa razón, el lenguaje *LC* incluye dos símbolos, "∀" y "∃", para representar el cuantificador universal y el cuantificador existencial, respectivamente. Un ***cuan-***

5. El lenguaje *LC* no admite fórmulas infinitas, y aun si lo hiciera, es imposible hacer una afirmación cuantificada acerca de los números reales en *LC* utilizando una conjunción infinita de fórmulas porque hay más números reales que constantes individuales de *LC*.

tificador de LC es uno de estos símbolos seguido de una variable individual y escrito entre paréntesis. Así, "$(\forall x)$" y "$(\exists x)$" son cuantificadores de *LC*. La variable del cuantificador representa los individuos indeterminados sobre los que rige el cuantificador. Los elementos del universo del discurso se denominan los ***valores de las variables***, pues las variables representan indiscriminadamente a todos y cada uno de ellos.

Si volvemos a los enunciados **(31)**-**(33)** del ejemplo anterior, podemos simbolizarlos ahora sin necesidad de utilizar conjunciones y disyunciones. Escribiremos el cuantificador de *LC* seguido inmediatamente por la función proposicional correspondiente al predicado.

(31b) $(\forall x)\mathrm{P}x$

(32b) $(\exists y)\mathrm{Ga}y$

(33b) $(\forall y)\mathrm{Ga}y$

La fórmula **(31b)** afirma que todos los miembros del universo del discurso, en este caso las personas en el salón de clase de Adriana, satisfacen el predicado "*x* es pusilánime". La **(32b)** afirma que existe al menos una persona en ese universo de discurso que le gusta a Adriana, es decir, que hay alguien que satisface el predicado "A *x* le gusta *y*" cuando la *x* es reemplazada por "a", la constante que representa a Adriana. Finalmente, la fórmula **(33b)** afirma que todas las personas en el salón de clase de Adriana satisfacen este último predicado.

La simbolización anterior no es la única posible. Si consideramos que afirmar que todos los miembros de un universo de discurso satisfacen un predicado es lo mismo que afirmar que no existe ninguno que no lo haga, podemos simbolizar los enunciados **(31)** y **(33)** como:

(31c) $\sim(\exists x)\sim\mathrm{P}x$

(33c) $\sim(\exists y)\sim\mathrm{Ga}y$

Del mismo modo, afirmar que existe un miembro del universo del discurso que satisface un predicado es lo mismo que negar que ninguno lo hace. Así, el enunciado **(32)** se puede simbolizar como:

(32c) $\sim(\forall y)\sim\mathrm{Ga}y$

Consideremos algunos otros ejemplos utilizando la misma guía de simbolización de los ejemplos anteriores.

(34) A nadie le gusta Adriana.

(35) A Adriana no le gusta nadie.

(36) A Adriana no le gustan todos.

(37) A alguien le gusta Susana.

(38) Nadie es mayor que sí mismo.

corresponden a las siguientes fórmulas:

(34a) $\sim(\exists x)\mathrm{G}x\mathrm{a}$ o $(\forall x)\sim\mathrm{G}x\mathrm{a}$

(35a) $\sim(\exists w)\mathrm{Ga}w$ o $(\forall w)\sim\mathrm{Ga}w$

(36a) $\sim(\forall y)\mathrm{Ga}y$ o $(\exists y)\sim\mathrm{Ga}y$

(37a) $(\exists z)\mathrm{G}z\mathrm{s}$ o $\sim(\forall z)\sim\mathrm{G}z\mathrm{s}$

(38a) $\sim(\exists x)\mathrm{M}xx$ o $(\forall x)\sim\mathrm{M}xx$

Es necesario hacer varias aclaraciones. En primer lugar, al especificar los predicados en la guía de simbolización no importa cuál variable utilicemos. La guía de simbolización del ejemplo anterior incluía el siguiente predicado:

P*x*: *x* es pusilánime

Hubiéramos podido representar este predicado como:

P*w*: *w* es pusilánime

sin alterar el sentido del predicado. En segundo lugar, la variable utilizada en la simbolización de un enunciado no tiene que ser la misma utilizada en la guía de simbolización. Así utilicemos "P*x*" para simbolizar "*x* es pusilánime", podemos simbolizar el enunciado "Todos son pusilánimes" como "$(\forall y)\mathrm{P}y$". Finalmente, al simbolizar un predicado debemos usar una variable diferente para cada espacio en blanco del predicado. La única excepción es cuando un predicado poliádico se usa en sentido reflexivo; por ejemplo, para poder afirmar que alguien se gusta a sí mismo en el ejemplo anterior, debemos utilizar la fórmula "G*xx*".

Cerraremos esta sección considerando algunos ejemplos de enunciados cuantificados que incorporan los conectores lógicos estudiados en capítulos anteriores.

(39) Si Rebeca es pusilánime, todos lo son.

(40) Todos son pusilánimes o ninguno lo es.

(41) A Horacio le gustan todos pero a Susana no.

(42) A Rebeca le gusta Susana si y sólo si a todos les gusta Susana.

(43) A Horacio le gustan todos y a Susana no le gusta nadie.

corresponden a:

(39a) $\mathrm{Pr} \supset (\exists y)\mathrm{P}y$

(40a) $(\forall x)\mathrm{P}x \vee (\forall x)\sim\mathrm{P}x$

Cap-6.pmd 158 13/07/07, 03:18 p.m.

(41a) $(\forall y)Ghy \,\&\, \sim(\forall y)Gsy$

(42a) $Grs \equiv (\forall w)Gws$

(43a) $(\forall y)Ghy \,\&\, \sim(\exists y)Gsy$

Como vimos en los ejemplos anteriores, todos los cuantificadores universales se pueden cambiar por cuantificadores existenciales, y viceversa, siempre y cuando ajustemos los signos de negación:

(39a) $Pr \supset \sim(\exists y)\sim Py$

(40a) $\sim(\exists x)\sim Px \vee \sim(\exists x)Px$

(41a) $\sim(\exists y)\sim Ghy \,\&\, (\exists y)\sim Gsy$

(42a) $Grs \equiv \sim(\exists w)\sim Gws$

(43a) $\sim(\exists y)\sim Ghy \,\&\, (\forall y)\sim Gsy$

Dado el carácter intercambiable de los cuantificadores, sería posible tener sólo uno de ellos en el lenguaje *LC*. Sin embargo, el uso de dos cuantificadores simplifica y hace un poco más natural la simbolización de enunciados.

Ejercicio 6.2

A. Simbolice los siguientes enunciados en *LC* utilizando la guía de simbolización provista.

UD: Álvaro, Bárbara, Constanza, Daniela, Elías, Huaraz, Ibarra, Jalisco, Key West, Lima, Manaos, Nazca

Nxy:	x nació en y	e:	Elías
Sxy:	x está al sur de y	h:	Huaraz
Vxy:	x vive en y	i:	Ibarra
Mxy:	x es mayor que y	j:	Jalisco
a:	Álvaro	k:	Key West
b:	Bárbara	l:	Lima
c:	Constanza	m:	Manaos
d:	Daniela	n:	Nazca

1. Álvaro nació en Jalisco.
2. Bárbara no nació en Huaraz.
3. Todos nacieron en Lima.
4. Ninguno nació en Key West.
5. Nazca está al sur de Lima, Lima está al sur de Manaos y Manaos está al sur de Jalisco.

6. Ibarra no está al sur ni de Nazca ni de Lima.
7. Key West está al sur de Lima si y sólo si Jalisco está al sur de Manaos.
8. Bárbara vive en Jalisco sólo si Daniela lo hace.
9. Todos nacieron en Key West pero ninguno vive allá.
10. Bárbara es mayor que Constanza y Constanza es mayor que Álvaro, pero ni Bárbara ni Constanza son mayores que Elías.
11. Daniela es mayor que Elías sólo si es mayor que Álvaro.
12. Álvaro no es el mayor.

B. Simbolice los siguientes enunciados en *LC* utilizando la guía de simbolización provista.

UD: Andrea, Bernardo, Claudia, David y Enrique

E*x*:	*x* es escritor	a:	Andrea
F*x*:	*x* es famoso	b:	Bernardo
I*x*:	*x* es ingenioso	c:	Claudia
G*xy*:	A *x* le gusta *y*	d:	David
I*xy*:	*x* se inspira en *y*	e:	Enrique
V*xy*:	*x* envidia a *y*		
M*xy*:	*x* imita a *y*		

1. Andrea es una escritora ingeniosa, pero no es famosa.
2. Claudia es una escritora famosa, pero no es ingeniosa.
3. Enrique es un famoso e ingenioso escritor.
4. Bernardo es un escritor que no es ni famoso ni ingenioso.
5. Si Bernardo es ingenioso, también lo son David y Andrea.
6. Andrea es una escritora ingeniosa, Bernardo es ingenioso pero no es escritor, y ninguno de los dos es famoso.
7. Andrea se inspira en Enrique pero envidia a Claudia.
8. Andrea se inspira en sí misma y en Claudia, pero envidia tanto a Bernardo como a David.
9. Claudia ni se inspira en, ni envidia a Andrea, pero se inspira y envidia a David.
10. Ni a David ni a Bernardo les gusta Claudia, pero a Claudia le gustan los dos.
11. A Claudia le gusta Bernardo si y sólo si Bernardo imita a Claudia y es famoso.
12. A Andrea le gustan Bernardo y David, pero no imita a ninguno de los dos.
13. Si David imita a Claudia y Claudia imita a Andrea, entonces David imita a Andrea.
14. Si a Bernardo le gusta David y viceversa, entonces ellos se imitan.

Cap-6.pmd 160 13/07/07, 03:18 p.m.

15. Si Claudia se inspira en Bernardo y Bernardo se inspira en Andrea, entonces Claudia envidia e imita a Andrea.
16. Si Claudia no es ni escritora, ni famosa ni ingeniosa, no inspira a nadie.
17. Sólo David es famoso.
18. Sólo David es famoso e ingenioso.

C. Establezca una guía de simbolización para cada uno de los siguientes pasajes y simbolice cada una de los enunciados.

1. Arturo y Cristóbal son alpinistas, pero ninguno de los dos ha subido al Everest. Lina es alpinista, ha subido al Everest y al K2, y además es buena nadadora. Ni Arturo ni Cristóbal son buenos nadadores. Aunque no es alpinista y es buena nadadora, a Juana le gusta Cristóbal.
2. Pedro es equilibrista y malabarista. William es mago, y aunque Guillermo también quiere serlo, no lo es. Todos viven en un trailer. Esteban también es un mago, y aunque David es un payaso, también quiere ser mago. Manuel es el trapecista y el domador de leones. Ninguno de ellos quiere abandonar el circo.
3. A Camila y a César les gusta jugar bolos pero ninguno de los dos tiene bola propia. Carlos tiene bola propia pero no le gusta jugar. Ana es buena jugadora y además le gusta jugar. Todos son buenos jugadores pero sólo Carlos y Ana tienen zapatos de bolos propios. Ana tiene más técnica que los demás y César es el más fuerte.
4. García, Moreno, Pérez y Chávez son senadores. Moreno y Pérez son de la costa, mientras García y Chávez son de la capital. Pérez obtuvo más votos que los demás a pesar de ser el más joven. Todos fueron reelegidos, pero ninguno lo merecía.

D. Simbolice los siguientes enunciados en *LC* utilizando la guía de simbolización provista.

UD:	Las flores en un jarrón		
Mx:	x es una margarita	Sx:	x es una rosa
Rx:	x es roja	Bx:	x es blanca

1. Ninguna de las flores es una rosa.
2. Algunas flores son rojas.
3. Todas las flores son margaritas.
4. Algunas de las flores no son margaritas.
5. Algunas de las flores son blancas y algunas son rojas.
6. Si todas las flores son rojas, ninguna es una margarita.

Cap-6.pmd 161 13/07/07, 03:18 p.m.

7. Si algunas flores son rojas, algunas son rosas.
8. Si ninguna flor es roja, todas son blancas.
9. Todas son rojas si y sólo si ninguna es blanca.
10. O todas son margaritas o todas son rosas.

E. Simbolice los siguientes enunciados en *LC* utilizando la guía de simbolización provista.

UD: Los músicos de una orquesta

P*x*:	*x* practica todos los días	f:	Francisco
D*x*:	*x* toca desafinado	j:	Javier

1. Si Javier no practica todos los días, toca desafinado.
2. O nadie practica todos los días o Javier practica todos los días.
3. Si Francisco practica todos los días, todos practican todos los días.
4. No todo el mundo practica todos los días, pero Francisco lo hace.
5. Si Francisco no practica todos los días, nadie lo hace.
6. Algunos, pero no todos los músicos, practican todos los días.
7. Francisco practica todos los días si Javier lo hace, y si Francisco lo hace, todos lo hacen.
8. Nadie toca desafinado si Javier no toca desafinado, pero si lo hace, todos lo hacen.
9. Ninguno practica todos los días pero no todos tocan desafinado.
10. Si todos practican todos los días, ninguno toca desafinado.

6.3 Sintaxis formal de *LC*

Antes de continuar con simbolizaciones más complejas, debemos entender a cabalidad la estructura o sintaxis de *LC*. Comenzaremos especificando el ***vocabulario de LC***:

Letras proposicionales de LC: Letras romanas mayúsculas de la "A" a la "Z" con o sin subíndices numéricos[6]:

$$A, B, C, ..., Z, A_1, B_1, C_1, ..., Z_1, ...$$

6. Las letras proposicionales de *LC* son las mismas letras proposicionales de *LP*. El conjunto de fórmulas de *LP* es un subconjunto del conjunto de fórmulas de *LC*.

Cap-6.pmd 162 13/07/07, 03:18 p.m.

Predicados de LC: Letras romanas mayúsculas de la "A" a la "Z" con superíndices numéricos, y con o sin subíndices numéricos. El superíndice indica el grado del predicado.

$$A^1,\ B^1,\ C^1, ..., Z^1, ..., A^1_1, A^1_2, ...$$

Términos individuales de LC: Éstos se dividen en dos clases:

Constantes individuales de LC: Letras romanas minúsculas de la "a" a la "v" con o sin subíndices numéricos:

$$a, b, c, ..., v, a_1, b_1, c_1, ..., v_1, ...$$

Variables individuales de LC: Letras romanas minúsculas, en bastardilla, de la "w" a la "z" con o sin subíndices numéricos:

$$w, x, y, z, w_1, x_1, y_1, z_1, ...$$

Operadores lógicos:	$\sim\ \&\ \vee\ \supset\ \equiv\ \exists\ \forall$
Signos de puntuación:	( )
Numerales:	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Definiremos una ***expresión de LC*** como una secuencia de elementos del vocabulario de *LC*. Las siguientes son expresiones de *LC*:

$8)()((A^{74} \supset w_{689}(($
$(A \equiv B_1C\ \&((«xy$
$\exists c \vee ((RT))$

pero las siguientes no lo son:

$(A + 4)$
$(\forall x)(6\% \supset B)$
$E@ \equiv (\exists x)Tx$

En las definiciones siguientes, usaremos las metavariables $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, ..., cuyos valores son las expresiones de *LC*. Usaremos una "a" en negrilla (**a**) como metavariable cuyos valores son las constantes individuales de *LC*, y una "x" en negrilla (**x**) como metavariable cuyos valores son las variables de *LC*.

Cuantificador de LC: Un cuantificador de *LC* es una expresión de *LC* de la forma $(\forall \mathbf{x})$ o $(\exists \mathbf{x})$. La primera expresión es un cuantificador universal y la segunda un cuantificador existencial.

Fórmula atómica de LC: Toda expresión de *LC* que sea una letra proposicional, o un predicado de *LC* de grado *n* seguido de *n* términos individuales de *LC*, es una fórmula atómica de *LC*.

Cap-6.pmd 163 13/07/07, 03:18 p.m.

Fórmula de LC:

1. Todas las fórmulas atómicas de *LC* son fórmulas de *LC*.
2. Si $\mathcal{P}$ es una fórmula, también lo es ~$\mathcal{P}$.
3. Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son fórmulas, también lo son ($\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$), ($\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$), ($\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$) y ($\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$).
4. Si $\mathcal{P}$ es una fórmula de *LC* en la que la variable **x** ocurre al menos una vez, y en la que no hay ningún cuantificador que utilice esa variable, entonces ($\forall$**x**)$\mathcal{P}$ y ($\exists$**x**)$\mathcal{P}$ son fórmulas de *LC*.
5. Nada más es una fórmula de *LC* a menos que pueda ser formada por la aplicación reiterada de las cláusulas 1-4.

Las reglas de formación 1, 2 y 3 son idénticas a las de la lógica proposicional, excepto que la definición de una fórmula atómica es diferente. Además de las letras proposicionales, las fórmulas atómicas ahora también incluyen expresiones como "Fab", "F*xy*" y Fa*z*", es decir, predicados seguidos de constantes, variables o una combinación de las dos. Adoptaremos la convención de omitir los superíndices numéricos de los predicados. También omitiremos los paréntesis al comienzo y al final de una fórmula siempre y cuando la fórmula no haga parte de otra fórmula. Finalmente, admitiremos paréntesis cuadrados para simplificar la lectura de las fórmulas de *LC*.

La regla 4 hace la salvedad de que sólo se puede agregar un cuantificador de **x** a una fórmula si la fórmula contiene esa variable. Sin esta salvedad, podríamos construir fórmulas como "($\forall$*x*)Tab" en las que el cuantificador es absolutamente superfluo. La regla 4 también hace la salvedad de que la variable que va a ser cuantificada no puede estar ya cuantificada. De este modo se evita que existan dos cuantificadores diferentes cuantificando la misma variable, creando así la posibilidad de que surjan ambigüedades. Por ejemplo, si no existiese dicha salvedad, podríamos cuantificar existencialmente la variable "*x*" en la fórmula "($\forall$*x*)T*x*a". El resultado, "($\exists$*x*)($\forall$*x*)T*x*a", no admite una interpretación unívoca.

Consideremos algunos ejemplos para entender cómo deben aplicarse estas definiciones sintácticas. No todas las siguientes expresiones son fórmulas de *LC*:

(44) Amn*x*

(45) ~(Amn*x* & B*zy*)

(46) Amn*x* $\vee$ ~~B*zy*

(47) Bcd $\supset$ ($\forall$*x*)(D*x* $\supset$ F*x*h)

(48) Bc*x* $\supset$ ~($\forall$*x*)(D*x* $\supset$ F*x*h)

(49) ($\forall$*x*)(Bc*x* $\supset$ ~($\forall$*x*)(D*x* $\supset$ F*x*h))

(50) ($\forall$*z*)(Bc*x* $\supset$ ~($\forall$*x*)(D*x* $\supset$ F*x*h))

(51) ($\forall$*z*)(Bc*z* $\supset$ ~(*x*)(D*x* $\supset$ F*x*h))

Cap-6.pmd 164 13/07/07, 03:18 p.m.

Las expresiones **(49)** y **(50)** no son fórmulas de *LC*. En la expresión **(49)**, la fórmula regida por el primer cuantificador de "*x*" ya contiene otro cuantificador de "*x*". Por lo tanto, de acuerdo con la cláusula 4, no es una fórmula de *LC*. En la expresión **(50)** se soluciona este problema al cambiar la variable del primer cuantificador, pero se genera un nuevo problema: el cuantificador de "*z*" rige una fórmula que no tiene ninguna "*z*". De nuevo, de acuerdo con la cláusula 4, la expresión no es una fórmula de *LC*.

Definiremos ahora las nociones de ***operador lógico principal*** *y* ***subfórmula****:*

1. Si $\mathcal{P}$ es una fórmula atómica de *LC*, $\mathcal{P}$ no contiene ningún operador lógico y $\mathcal{P}$ es la única subfórmula de $\mathcal{P}$.
2. Si $\mathcal{P}$ es una fórmula de *LC* de la forma ~$\mathcal{Q}$. entonces la negación antes de la fórmula $\mathcal{Q}$ es el operador lógico principal de $\mathcal{P}$, y $\mathcal{Q}$ es la subfórmula inmediata de $\mathcal{P}$.
3. Si $\mathcal{P}$ es una fórmula de *LC* de la forma ($\mathcal{Q}$ & $\mathcal{R}$), ($\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}$), ($\mathcal{Q} \supset \mathcal{R}$) o ($\mathcal{Q} \equiv \mathcal{R}$), entonces el operador lógico que aparece entre $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{R}$ es el operador lógico principal de $\mathcal{P}$. $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{R}$ son las subfórmulas inmediatas de $\mathcal{P}$.
4. Si $\mathcal{P}$ es una fórmula de *LC* de la forma ($\forall$**x**)$\mathcal{Q}$ o ($\exists$**x**)$\mathcal{Q}$, entonces el cuantificador que ocurre antes de $\mathcal{Q}$ es el operador lógico principal de $\mathcal{P}$, y $\mathcal{Q}$ es la subfórmula inmediata de $\mathcal{P}$.
5. Si $\mathcal{P}$ es una fórmula de *LC*, entonces cada subfórmula de una subfórmula de $\mathcal{P}$ es una subfórmula de $\mathcal{P}$.

Consideremos una vez más las expresiones **(44)** – **(51)**. Excluimos la **(49)** y la **(50)**, pues no son fórmulas de *LC*:

	Fórmula	*Subfórmula*	*Operador lógico principal*
(44)	Amn*x*	Amn*x*	*Ninguno*
(45)	~(Amn*x* & B*zy*)		~
		Amn*x* & B*zy*	&
		Amn*x*	*Ninguno*
		B*zy*	*Ninguno*
(46)	Amn*x* ∨ ~~B*zy*		∨
		Amn*x*	*Ninguno*
		~~B*zy*	~
		~B*zy*	~
		B*zy*	*Ninguno*

Cap-6.pmd 165 13/07/07, 03:18 p.m.

(47) Bcd ⊃ (∀*x*)(D*x* ⊃ F*x*h)		⊃
	Bcd	*Ninguno*
	(∀*x*)(D*x* ⊃ F*x*h)	(∀*x*)
	D*x* ⊃ F*x*h	⊃
	D*x*	*Ninguno*
	F*x*h	*Ninguno*
(48) Bc*x* ⊃ ~(∀*x*)(D*x* ⊃ F*x*h)		⊃
	Bc*x*	*Ninguno*
	~(∀*x*)(D*x* ⊃ F*x*h)	~
	(∀*x*)(D*x* ⊃ F*x*h)	(∀*x*)
	D*x* ⊃ F*x*h	⊃
	D*x*	*Ninguno*
	F*x*h	*Ninguno*
(51) (∀*z*)(Bc*z* ⊃ ~(∀*x*)(D*x* ⊃ F*x*h))		(∀*z*)
	Bc*z* ⊃ ~(∀*x*)(D*x* ⊃ F*x*h)	⊃
	Bc*z*	*Ninguno*
	~(∀*x*)(D*x* ⊃ F*x*h)	~
	(∀*x*)(D*x* ⊃ F*x*h)	(∀*x*)
	D*x* ⊃ F*x*h	⊃
	D*x*	*Ninguno*
	F*x*h	*Ninguno*

Utilizando las nociones de subfórmula y operador lógico principal, definiremos el rango de un cuantificador:

Rango de un cuantificador: El rango de un cuantificador en una fórmula $\mathcal{P}$ de *LC* es la subfórmula $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{P}$ en la cual el cuantificador es el operador lógico principal.

Consideremos la fórmula "(∀*x*)F*x*a". El operador lógico principal es "(∀*x*)" y el rango de este cuantificador es "(∀*x*)F*x*a". Consideremos ahora la fórmula "(∀*x*)F*x*a ⊃ Gb". En esta fórmula, el operador lógico principal no es el cuantificador sino el condicional. El cuantificador sólo es el operador lógico principal del antecedente del condicional. Por lo tanto, su rango es "(∀*x*)F*x*a".

Finalmente, introduciremos las nociones de variable libre, variable ligada y fórmula cerrada:

Variable ligada: Una variable **x** en una fórmula $\mathcal{P}$ es una variable ligada si y sólo si está bajo el rango de un cuantificador de **x**.

Variable libre: Una variable **x** en una fórmula $\mathcal{P}$ es una variable libre si y sólo si no es una variable ligada.

Cap-6.pmd 166 13/07/07, 03:18 p.m.

Fórmula cerrada de LC: Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LC* es una fórmula cerrada de *LC* si y sólo si ninguna de las variables en $\mathcal{P}$ es una variable libre. Una fórmula no cerrada es una fórmula abierta.

La mayor parte de las fórmulas que estudiaremos en los siguientes capítulos son fórmulas cerradas. La razón es muy sencilla: sólo es posible asignarle un valor de verdad a una fórmula cerrada. Una fórmula abierta como "A*x*", por ejemplo, es como el enunciado incompleto "_____ es alemán". Para poder asignarle un valor de verdad necesitamos saber a quién nos estamos refiriendo, y esto sólo es posible si el espacio en blanco es ocupado por un término singular o por un cuantificador. Del mismo modo, la fórmula "A*x*" sólo es verdadera o falsa si la "*x*" está cuantificada o es reemplazada por una constante.

Ejercicio 6.3

Determine cuáles de las siguientes expresiones son *fórmulas* de *LC*. Si no lo son, explique por qué no. Si lo son, determine si son *fórmulas cerradas*.

1. $\mathrm{Tdg} \vee \mathrm{Qdt}$
2. $\mathrm{Mn}x \;\&\; (x)\mathrm{P}x$
3. $(\forall y)\mathrm{K}y\mathrm{n} \;\&\; \mathrm{Ga}z$
4. $(\exists z)(\mathrm{E}x)(\mathrm{R}zx \equiv \mathrm{R}xz)$
5. $(\exists \mathrm{t})\mathrm{F}zx \;\&\; \mathrm{F}xz\mathrm{t}$
6. $(\exists x)\mathrm{H}z\mathrm{ah}$
7. $(\forall z)(\mathrm{T}z \;\&\; {\sim}\mathrm{Gr}z) \equiv (\forall z)\mathrm{E}z\mathrm{a}$
8. $(\exists x)(\mathrm{F}x \;\&\; (\forall x)(\mathrm{P}x \supset \mathrm{G}x)]$
9. ${\sim}(\forall \mathrm{x})(\mathrm{A}x \supset \mathrm{F}x)$
10. $(\forall x)(\mathrm{A}x \supset (\exists z)\mathrm{N}zx)$
11. $(\forall x)(\exists y)\mathrm{J}xz$
12. $(\exists x)[(\forall y)\mathrm{A}xy \supset (\exists y)\mathrm{A}yx]$
13. $({\sim}\mathrm{Tan} \;\&\; \mathrm{Pen}) \supset (\exists y)\mathrm{F}yy$
14. $(\forall \mathrm{a})\mathrm{F}x\mathrm{a}y$
15. $\mathrm{Qg}w \vee (\exists w)\mathrm{Gq}w$
16. $(\exists z)(\mathrm{R}z\mathrm{b} \vee (\exists z)\mathrm{Ga}z)$
17. $(\forall x){\sim}(\forall y)\mathrm{B}yx$
18. $(\exists x)(\forall y){\sim}\mathrm{B}yx\mathrm{b}$
19. $(\forall x)(\mathrm{G}x \;\&\; \mathrm{F}x) \supset (\exists x)(\mathrm{Bg} \;\&\; \mathrm{F}x)$
20. $(\forall x)[(\exists y)\mathrm{B}xy \vee \mathrm{B}xx]$
21. ${\sim}(\exists x)\mathrm{P}x \;\&\; (\forall \mathrm{s})\mathrm{Ps}$
22. ${\sim}\mathrm{Pa}x \supset (\forall y)\mathrm{W}y\mathrm{r}$
23. $({\sim}(\exists x)\mathrm{F}x \vee (\exists w){\sim}\mathrm{G}w) \supset \mathrm{M}yy$
24. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\mathrm{M}xyz$
25. $(\exists x)(\forall z)(\mathrm{G}x\mathrm{a}z \vee {\sim}{\sim}\mathrm{Ha}z\mathrm{b})$
26. $(\forall z)\mathrm{A}z \supset {\sim}(\exists w)({\sim}\mathrm{A}w \;\&\; {\sim}\mathrm{B}w\mathrm{a}z)$
27. $(\forall y)[\mathrm{S}y \supset (\exists y)({\sim}\mathrm{G}y \supset {\sim}\mathrm{N}yx)]$
28. ${\sim}[{\sim}(\forall x){\sim}\mathrm{A}x \vee (\forall x){\sim}\mathrm{A}x]$
29. $(\mathrm{Fb} \equiv \mathrm{Ha}) \vee (\forall z)({\sim}\mathrm{D}z \;\&\; {\sim}\mathrm{H}z\mathrm{a})$
30. $(\forall x)(\mathrm{B}x \;\&\; {\sim}\mathrm{B}x) \equiv (\mathrm{Lt} \;\&\; {\sim}\mathrm{Lt})$

Cap-6.pmd 167 13/07/07, 03:18 p.m.

6.4 Enunciados categóricos

En el primer capítulo estudiamos brevemente los fundamentos de la silogística aristotélica. La base de la lógica de Aristóteles son los enunciados categóricos, es decir, enunciados que afirman o niegan que una clase o categoría de cosas está incluida en otra clase o categoría, total o parcialmente. Por ejemplo, el enunciado: "Todos los filósofos fuman pipa" afirma la inclusión total de la clase de los filósofos en la clase de los fumadores de pipa. En general, existen cuatro formas en que una clase puede o no estar incluida en otra:

1. Si todos los miembros de una clase son también miembros de la segunda, decimos que la primera está incluida en la segunda.
2. Si al menos un miembro de la primera clase es también miembro de la segunda, decimos que la primera está parcialmente incluida en la segunda.
3. Si al menos un miembro de la primera clase no es miembro de la segunda, decimos que la primera no está incluida en la segunda.
4. Si las dos clases no tienen ningún miembro en común, las dos clases se excluyen mutuamente.

Estas relaciones son afirmadas o negadas en un enunciado categórico. Como resultado, existen cuatro formas estándar en que éstas son expresadas, como lo ilustra el siguiente ejemplo:

(52) Todos los plomeros son flacos.

(53) Algunos plomeros son flacos.

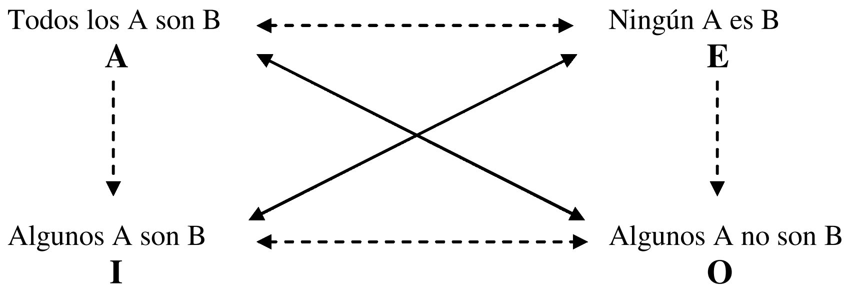
(54) Algunos plomeros no son flacos.

(55) Ningún plomero es flaco.

El enunciado **(52)** es ***universal afirmativo***, mientras que el **(55)** es ***universal negativo***. Corresponden, respectivamente, a la inclusión total de una clase en otra y a la exclusión mutua. El enunciado **(53)** es ***particular afirmativo***. La oración "Algunos plomeros son flacos" expresa la inclusión parcial de la clase de los plomeros en la clase de los flacos, pero la oración ni afirma ni niega su inclusión total. En algunos contextos la oración tiene la connotación de que no todos los plomeros son flacos, sólo algunos. Pero estrictamente hablando, lo único que la tercera oración afirma es que las dos clases tienen al menos un miembro en común. Esa interpretación estricta es la que adoptaremos. Finalmente, el enunciado **(54)** es ***particular negativo***. Al igual que en el caso anterior, la oración ni niega ni afirma la exclusión total de las dos clases. Se limita tan sólo a afirmar que al menos un miembro de la primera clase no está incluido en la segunda.

Cap-6.pmd 168 13/07/07, 03:18 p.m.

Como vimos en el primer capítulo, los cuatro tipos de enunciados se organizan en un "cuadro de oposiciones" de la siguiente manera:



Las letras **A** e **I** se le asignan a los enunciados afirmativos, mientras **E** y **O** a los negativos. Los enunciados **A** y **O**, al igual que los **I** y **E** son contradictorios entre sí porque si el primero es verdadero, el segundo tiene que ser falso y viceversa. Según Aristóteles, los enunciados tipo **A** y **E** son contrarios porque no es posible que los dos sean verdaderos, y los enunciados tipo **I** y **O** son subcontrarios, porque no es posible que los dos sean falsos. Además, según Aristóteles, si un enunciado tipo **A** es verdadero, también lo es el correspondiente enunciado tipo **I**, y si un enunciado tipo **E** es verdadero, también lo es el correspondiente enunciado tipo **O**. Como veremos en un momento, en *LC* sólo se cumple la relación de contradicción.

Debemos determinar inicialmente cómo simbolizar estos cuatro tipos de enunciados en *LC*. Comenzaremos con un ejemplo de un enunciado tipo **A**:

(56) Todos los cerdos son omnívoros.

Si asumimos que el UD son los seres vivos, lo que el enunciado afirma es que todos los seres vivos que pertenecen a la clase de los cerdos también pertenecen a la clase de los omnívoros. Es decir, el enunciado afirma la inclusión total de una clase en otra. Consideremos las siguientes dos intentos de simbolizar este enunciado en *LC*:

(56a) $(\forall y)\mathrm{C}y \ \& \ (\forall y)\mathrm{O}y$

(56b) $(\forall y)(\mathrm{C}y \ \& \ \mathrm{O}y)$

La fórmula **(56a)** afirma que todos los elementos del UD son cerdos y que todos los elementos del UD son omnívoros, lo cual es falso y no corresponde a lo que dice el enunciado original. La fórmula **(56b)** afirma que todos los elementos del UD son tanto cerdos como omnívoros. De nuevo, es una afirmación falsa y no corresponde al enunciado "Todos los cerdos son omnívoros". Lo que necesitamos es una fórmula de *LC* que logre referirse a todos los miembros del UD sin hacer de todos ellos cerdos u omnívoros. La solución es crear una relación condicional: si un elemento del UD pertenece a la clase de los cerdos, entonces pertenece a la clase de los omnívoros:

Cap-6.pmd 169 13/07/07, 03:18 p.m.

(56c) $(\forall y)(Cy \supset Oy)$

Esta fórmula ni niega ni afirma que todos los elementos del UD sean cerdos ni que todos sean omnívoros. Sólo afirma que si un elemento del UD es un cerdo, también será omnívoro. Es importante señalar que la afirmación se refiere, no sólo a los cerdos, sino a las abejas, los tiburones, los tigres, las mariposas y cualquier otro elemento del UD.

Como vimos en la sección 6.2, un cuantificador universal siempre se puede transformar en un cuantificador existencial, y viceversa. Por lo tanto, el enunciado **(56)** también se puede expresar como:

(56d) $\sim(\exists y)(Cy \ \& \ \sim Oy)$

Esta fórmula afirma que no existe un elemento del UD para el cual sea verdadero que "Cy & ~Oy", es decir, un elemento que sea cerdo y que no sea omnívoro.

Haciendo uso del análisis de los enunciados tipo **A** será más fácil encontrar la simbolización adecuada para los demás tipos de enunciados categóricos. Consideremos un ejemplo de un enunciado tipo **E**:

(57) Los curas no toman ron.

El enunciado afirma que si un elemento del UD es un cura, éste no pertenece a la clase de seres que toman ron. Por eso utilizamos de nuevo el condicional:

(57a) $(\forall x)(Cx \supset \sim Rx)$

El enunciado anterior es semánticamente equivalente al enunciado "Ningún cura toma ron", es decir, no existe un cura que tome ron:

(57b) $\sim(\exists x)(Cx \ \& \ Rx)$

Consideremos ahora los enunciados tipo **I**, que afirman la inclusión parcial de una clase en otra. Por ejemplo, asumiendo que el UD son todas las cosas, el enunciado:

(58) Algunos trenes funcionan con vapor.

afirma que existe al menos una cosa que pertenece a la clase de los trenes y que también pertenece a la clase de las cosas que funcionan con vapor. Las siguientes fórmulas de *LC* no son simbolizaciones apropiadas:

(58a) $(\exists x)Tx \ \& \ (\exists x)Vx$

(58b) $(\exists x)(Tx \supset Vx)$

El problema con la primera fórmula es que afirma la existencia de al menos un tren y de al menos una cosa que funciona a vapor, *pero no necesariamente la misma cosa*. A pesar de que la variable que utilizamos es la misma, los dos cuantificadores son independientes el uno del otro. El problema con la segunda fórmula es que puede ser verdadera así no existan los trenes a vapor. Como el operador lógico principal de la fórmula cuantificada es un condicional, la fórmula es verdadera si el antecedente es falso, i.e. si no existen los trenes, y *a fortiori*, si no existen los trenes a vapor.

Para simbolizar un enunciado tipo **I** en *LC* necesitamos poder afirmar que existe un elemento del UD que posee las dos propiedades, o que pertenece a las dos clases. El siguiente enunciado afirma exactamente eso:

(58c) $(\exists x)(\mathrm{T}x \;\&\; \mathrm{V}x)$

Como en los casos anteriores, un enunciado tipo **I** también se puede simbolizar utilizando el cuantificador universal. Afirmar que hay un elemento del UD que es a la vez un tren y una cosa que funciona a vapor es equivalente a negar que ningún tren funciona a vapor:

(58d) $\sim(\forall x)(\mathrm{T}x \supset \sim\mathrm{V}x)$

Finalmente, consideremos un ejemplo de un enunciado tipo **O**, aquél que afirma que al menos un miembro de una clase no está incluido en otra clase:

(59) Algunos filósofos no tienen sentido del humor.

Asumiendo que el UD son las personas, el enunciado afirma que existe una persona que es filósofo y que no pertenece a la clase de las personas que tienen sentido del humor. La fórmula correspondiente en *LC* es una fórmula existencial de la siguiente forma:

(59a) $(\exists x)(\mathrm{F}x \;\&\; \sim\mathrm{H}x)$

La correspondiente fórmula universal afirma que no es cierto que todos los miembros de la clase de los filósofos estén incluidos en la clase de las personas con sentido del humor:

(59b) $\sim(\forall x)(\mathrm{F}x \supset \mathrm{H}x)$

Podemos generalizar estos resultados y añadir más detalles al cuadro de oposiciones presentado anteriormente:

Cap-6.pmd 171 13/07/07, 03:18 p.m.

Todos los A son B	Ningún A es B
$(\forall \mathbf{x})(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q})$	$(\forall \mathbf{x})(\mathcal{P} \supset \sim\mathcal{Q})$
A	**E**
$(\exists \mathbf{x})(\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q})$	$(\exists \mathbf{x})(\mathcal{P} \,\&\, \sim\mathcal{Q})$
Algunos A son B	Algunos A no son B
I	**O**

La relación de contradicción se cumple en *LC*, es decir, los siguientes pares de fórmulas son semánticamente equivalentes:

$(\forall \mathbf{x})(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q})$	y	$\sim(\exists \mathbf{x})(\mathcal{P} \,\&\, \sim\mathcal{Q})$
$(\forall \mathbf{x})(\mathcal{P} \supset \sim\mathcal{Q})$	y	$\sim(\exists \mathbf{x})(\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q})$
$(\exists \mathbf{x})(\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q})$	y	$\sim(\forall \mathbf{x})(\mathcal{P} \supset \sim\mathcal{Q})$
$(\exists \mathbf{x})(\mathcal{P} \,\&\, \sim\mathcal{Q})$	y	$\sim(\forall \mathbf{x})(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q})$

Como anotamos antes, según Aristóteles los enunciados tipo **A** y **E** son contrarios, i.e. no pueden ser ambos verdaderos. Esta relación no se cumple en *LC*. Si el antecedente de la fórmula condicional en ambos tipos de fórmulas es falso, las correspondientes fórmulas cuantificadas **A** y **E** serán verdaderas. Por ejemplo, los enunciados "Todos los japoneses mayores de 150 años tienen ojos azules" y "Ninguno de los japoneses mayores de 150 años tiene ojos azules" se simbolizarían como "$(\forall x)(\mathrm{J}x \supset \mathrm{A}x)$" y "$(\forall x)(\mathrm{J}x \supset \sim\mathrm{A}x)$", respectivamente. Como "Jx" es falso, las dos fórmulas pueden ser verdaderas al mismo tiempo. La diferencia entre la lógica aristotélica y el lenguaje *LC* radica en que en este último se permiten predicados que no son satisfechos por ningún elemento del universo del discurso, mientras que para Aristóteles la predicación sólo era posible si existía un sujeto de predicación, es decir, si existía un elemento del universo del discurso que poseyera el predicado en cuestión.

Del mismo modo, según Aristóteles los enunciados tipo **I** y **O** son subcontrarios, i.e. no pueden ser ambos falsos. Esta relación tampoco se cumple en *LC*. Si el primer componente de la conjunción que ocurre en las fórmulas tipo **I** y **O** es falso, las correspondientes fórmulas cuantificadas serán falsas. Por ejemplo, los enunciados "Existen japoneses mayores de 150 años que tienen ojos azules" y "Existen japoneses mayores de 150 años que no tienen ojos azules" se pueden simbolizar como "$(\exists x)(\mathrm{J}x \,\&\, \mathrm{A}x)$" y "$(\exists x)(\mathrm{J}x \,\&\, \sim\mathrm{A}x)$", respectivamente. Como "Jx" es falsa, las dos fórmulas pueden ser falsas al mismo tiempo.

Cap-6.pmd 172 13/07/07, 03:18 p.m.

Aristóteles también creía que si un enunciado tipo **A** es verdadero, también lo es el enunciado correspondiente tipo **I**, y si un enunciado tipo **E** es verdadero, también lo es el enunciado correspondiente tipo **O**. Estas relaciones tampoco se cumplen en *LC*, lo cual parece un poco contraintuitivo. Si "Todas las ciudades tienen una cárcel" es verdadera, sería de esperar que "Algunas ciudades tienen una cárcel" también lo sea. La razón por la cual no se cumple esta relación es, de nuevo, que en *LC* se permiten predicados que no son satisfechos por ningún miembro del universo del discurso.

El permitir predicados vacíos tiene enormes ventajas, en particular al formular una hipótesis en un contexto científico. Por ejemplo, si un biólogo sabe que en un recipiente sellado hay un cultivo de bacterias de tipo desconocido, y que el recipiente ha estado herméticamente sellado durante un periodo considerable de tiempo, puede afirmar razonablemente[7]:

(60) Todas las bacterias aeróbicas están muertas.

Esta afirmación es cierta incluso si en el recipiente no hay bacterias aeróbicas, pues un enunciado tipo **A** se refiere a la totalidad del universo del discurso, no sólo a la clase de las bacterias aeróbicas. El enunciado sólo afirma condicionalmente que si algo es una bacteria aeróbica, entonces está muerta. Sin embargo, el biólogo no puede decir razonablemente:

(61) Algunas bacterias aeróbicas están muertas.

Este enunciado afirma implícitamente que la clase de bacterias aeróbicas no es una clase vacía, y el biólogo no tiene la información requerida para defenderla razonablemente. Es por esta razón que la verdad de un enunciado tipo **A** no implica la verdad del enunciado tipo **I** correspondiente. Por razones análogas, la verdad de un enunciado tipo **E** tampoco implica la verdad del enunciado tipo **O** correspondiente.

Terminaremos esta sección con algunas aclaraciones acerca de cómo simbolizar correctamente enunciados categóricos. Consideremos el siguiente enunciado:

(62) Sólo los ciudadanos pueden votar.

Este enunciado corresponde a uno de los cuatro tipos de enunciados categóricos. Sin embargo, no utiliza ninguno de los cuantificadores que hemos estudiado hasta el momento. El enunciado no es equivalente a:

(63) Todos los ciudadanos pueden votar.

ni tampoco a:

(64) Algún ciudadano puede votar.

7. Este ejemplo es tomado de Bergmann, Moor & Nelson (1998: 281).

Cap-6.pmd 173 13/07/07, 03:18 p.m.

Por lo tanto, cualquiera de las siguientes simbolizaciones sería incorrecta:

(63a) $(\forall x)(Cx \supset Vx)$

(64a) $(\exists x)(Cx \ \& \ Vx)$

Para simbolizar correctamente el enunciado **(62)** debemos recordar la diferencia entre "Si $\mathcal{P}$, entonces $\mathcal{Q}$" y "$\mathcal{Q}$ sólo si $\mathcal{P}$". En el primer caso, $\mathcal{P}$ es el antecedente del condicional, pero en el segundo se convierte en consecuente. Lo que afirma el enunciado **(62)** es que alguien puede votar sólo si esa persona es un ciudadano. En consecuencia, tener el derecho a votar es el antecedente del condicional universal. La simbolización correcta es:

(62a) $(\forall x)(Vx \supset Cx)$

Ahora bien, podemos unir el enunciado **(62)** y el **(63)** para formar el siguiente enunciado:

(65) Sólo los ciudadanos pueden votar, pero todos pueden hacerlo.

La forma más directa de simbolizar este enunciado es creando la conjunción de las fórmulas **(62a)** y **(63a)**:

(65a) $(\forall x)(Vx \supset Cx) \ \& \ (\forall x)(Cx \supset Vx)$

Pero considerando que el bicondicional $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ es la conjunción de los condicionales $\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q} \supset \mathcal{P}$, podemos simbolizar el enunciado **(65)** como:

(65b) $(\forall x)(Vx \equiv Cx)$

Otro caso cuya simbolización no es inmediatamente obvia es aquél en el cual introducimos una excepción a un enunciado universal afirmativo. Consideremos el siguiente ejemplo:

(66) Todos los ciudadanos, excepto los naturalizados, pueden aspirar a la Presidencia.

Para calificar la clase de cosas a la que nos estamos refiriendo, debemos introducir dicha información en el antecedente del condicional universalmente cuantificado. Así, la simbolización del enunciado **(66)** es la siguiente:

(66a) $(\forall x)[(Cx \ \& \ {\sim}Nx) \supset Px]$

La fórmula afirma que cualquier cosa que posea la propiedad de ser ciudadano y carezca de la propiedad de ser un ciudadano naturalizado, también posee la propiedad de ser elegible a la Presidencia.

Ejercicio 6.4

A. Simbolice los siguientes enunciados en *LC*, e indique si se trata de un enunciado tipo **A**, **E**, **I** u **O.**

UD: Los cuadros en un museo

E*x*:	*x* fue pintado por un español	R*x*:	*x* es un retrato
H*x*:	*x* fue pintado por un holandés	P*x*:	*x* es un paisaje
I*x*:	*x* fue pintado por un inglés	A*x*:	*x* es abstracto
B*x*:	*x* es un bodegón	G*x*:	*x* es figurativo
C*x*:	*x* es colorido	Mx:	*x* es monocromático

1. Todos los retratos fueron pintados por un español.
2. Todos los paisajes son coloridos.
3. Algunos paisajes no son coloridos.
4. Ningún retrato es abstracto.
5. Algunos cuadros pintados por españoles son monocromáticos.
6. Todos los cuadros coloridos fueron pintados por un holandés.
7. Ningún cuadro figurativo fue pintado por un inglés.
8. Algunos bodegones son figurativos.
9. Todos los cuadros pintados por holandeses son figurativos.
10. Algunos bodegones no son coloridos.

B. Simbolice los siguientes enunciados en *LC*.

UD: Los peces en un acuario

A*y*:	*y* es azul	N*y*:	*y* nada rápidamente
R*y*:	*y* es rojo	P*y*:	*y* tiene parásitos
M*y*:	*y* es amarillo	V*y*:	*y* vive en el fondo del acuario

1. Todos los peces rojos tienen parásitos.
2. Todos los peces azules viven en el fondo del acuario.
3. Ninguno de los peces azules nada rápidamente.
4. Algunos peces rojos nadan rápidamente.
5. Algunos peces tienen parásitos pero no todos.
6. Algunos peces viven en el fondo del acuario y otros no.
7. Algunos peces son azules, algunos son rojos, pero ninguno es azul y rojo.
8. Los peces rojos tienen parásitos y los amarillos nadan rápidamente.
9. Sólo los peces rojos nadan rápidamente.

Cap-6.pmd 175 13/07/07, 03:18 p.m.

10. Todos los peces que nadan rápidamente son amarillos, pero no todos los peces amarillos nadan rápidamente.
11. Todos los peces tienen parásitos, algunos nadan rápidamente y otros viven en el fondo del acuario.
12. Todos los peces son rojos o todos son amarillos o todos son azules.
13. Todos los peces, excepto los amarillos, nadan rápidamente.
14. Algunos peces nadan rápidamente, otros no, pero todos los peces del acuario son amarillos.
15. Algunos peces viven en el fondo del acuario y otros nadan rápidamente, pero ninguno vive en el fondo del acuario y nada rápidamente.

C. Construya un guía de simbolización para cada uno de los siguientes sorites y traduzca los enunciados a *LC*.

1. Ningún pato baila el vals. Ningún oficial se niega nunca a bailar el vals. Todas mis aves son patos. Por lo tanto, ninguna de mis aves es un oficial.
2. Toda persona en su sano juicio puede aprender lógica. Ningún lunático puede ser parte de un jurado. Ninguno de tus hijos puede aprender lógica. Por lo tanto, ninguno de tus hijos puede ser parte de un jurado.
3. Ninguna persona experimentada es incompetente. Jenkins siempre mete la pata. Ninguna persona competente mete la pata. Por lo tanto, Jenkins es una persona inexperimentada.
4. Nadie lee el *Times* a menos que sea alguien educado. Ningún topo puede leer. Aquellos que no pueden leer no son educados. Por lo tanto, ningún topo lee el *Times*.
5. Todos los picaflores son multicolores. Ningún pájaro grande vive del néctar. Los pájaros que no viven del néctar no son multicolores. Por lo tanto, ningún picaflor es grande.
6. Todos los objetos antiguos en esta repisa están rotos. Ningún jarro en esta repisa es nuevo. Ninguna de las cosas rotas en esta repisa puede contener agua. Por lo tanto, ningún jarro en la repisa puede contener agua.
7. Ninguna fruta verde es saludable. Todas estas manzanas son saludables. Ninguna fruta que haya crecido en la sombra está madura. Por lo tanto, estas manzanas crecieron en el sol.
8. Ninguno de los nombres en esta lista es inapropiado para el galán de la novela. Los nombres que comienzan con una vocal son siempre melodiosos. Ningún nombre que comience con una consonante es apropiado para el galán de la novela. Por lo tanto, todos los nombres en la lista son melodiosos.
9. Nadie que realmente aprecie a Beethoven habla cuando Brendel toca la sonata “Claro de luna”. Los conejillos de indias no saben nada de música. Nadie

Cap-6.pmd 176 13/07/07, 03:18 p.m.

que no sepa nada de música se queda callado cuando Brendel toca la sonata "Claro de luna". Por lo tanto, los conejillos de indias nunca aprecian a Beethoven.

10. Las flores de colores siempre tienen olor. No me gustan las flores que no crecen al aire libre. Ninguna de las flores que crecen al aire libre carece de color. Por lo tanto, ninguna flor que carezca de olor me place.

6.5 Enunciados categóricos complejos

Los enunciados categóricos que hemos estudiado hasta ahora sólo contienen pares de predicados monádicos. Naturalmente, es posible construir enunciados categóricos con un mayor número de predicados y con predicados de grado más alto. Comenzaremos considerando la predicación simultánea de una propiedad de los miembros de dos clases diferentes. Consideremos el siguiente enunciado:

(67) Las serpientes del desierto son peligrosas pero las del páramo no.

En este enunciado es claro que estamos predicando dos cosas opuestas acerca de los miembros de dos clases distintas de objetos. Si asumimos que el UD son las serpientes, la simbolización correcta es:

(67a) $(\forall x)(\mathrm{D}x \supset \mathrm{P}x)\ \&\ (\forall x)(\mathrm{M}x \supset {\sim}\mathrm{P}x)$

Pero si queremos decir que no sólo las serpientes del desierto son peligrosas sino también que hay otros tipos de serpientes peligrosas, debemos elegir la simbolización correcta con cuidado. Consideremos el siguiente enunciado:

(68) Las serpientes del desierto y las acuáticas son peligrosas.

Sería un error simbolizar el enunciado como:

(68a) $(\forall x)[(\mathrm{D}x\ \&\ \mathrm{A}x) \supset \mathrm{P}x]$

pues lo que afirma la fórmula es que las serpientes que son tanto del desierto como acuáticas son peligrosas. Una forma de mantener separadas las serpientes del desierto de las acuáticas es creando una fórmula universal para cada una:

(68b) $(\forall x)(\mathrm{D}x \supset \mathrm{P}x)\ \&\ (\forall x)(\mathrm{A}x \supset \mathrm{P}x)$

Sin embargo, existe una forma más sencilla de construir una fórmula equivalente, a saber, listando todas las clases de individuos acerca de los cuales vamos a predicar algo utilizando una disyunción en vez de una conjunción. Así, el enunciado **(68)** también se puede simbolizar como:

Cap-6.pmd 177 13/07/07, 03:18 p.m.

(68c) $(\forall x)[(Dx \vee Ax) \supset Px]$[8]

En el ejemplo **(67)** asumimos que el UD eran las serpientes. La razón para escoger ese universo del discurso es meramente práctica. Si hubiéramos escogido a los animales como UD, al referirnos a las serpientes de páramo, por ejemplo, tendríamos que especificar que estamos hablando de serpientes y además de animales de páramo. Así, el enunciado **(67)** tendría que ser simbolizado como:

(67b) $(\forall x)[(Sx \ \& \ Dx) \supset Px] \ \& \ (\forall x)[(Sx \ \& \ Mx) \supset {\sim}Px]$

y el **(68)** como:

(68e) $(\forall x)([(Sx \ \& \ Dx) \vee (Sx \ \& \ Ax)] \supset Px)$

En general, es conveniente siempre adoptar el UD más estrecho posible. Un UD muy amplio nos obligará a introducir más predicados, mientras que un UD demasiado estrecho puede borrar diferencias importantes entre los individuos a los que nos estamos refiriendo. El contexto debe ser la guía para determinar qué tan estrecho o qué tan amplio debe ser el UD.

Consideraremos una serie de ejemplos de predicación múltiple utilizando la siguiente guía de simbolización:

UD: Cocineros en un restaurante de Nueva York

J*x*:	*x* maneja bien la parrilla	a:	Abel
S*x*:	*x* es somalí	c:	Caín
C*x*:	*x* es croata	j:	Josué
M*x*:	*x* es mexicano	n:	Noé
Z*x*:	*x* tiene buena sazón		
H*x*:	*x* es hábil con el cuchillo		
P*x*:	*x* es un principiante		

(69) Los cocineros mexicanos son hábiles con el cuchillo y tienen buena sazón.
$(\forall x)[Mx \supset (Hx \ \& \ Zx)]$

(70) Hay cocineros principiantes que manejan bien la parrilla y otros que son hábiles con el cuchillo.

$(\exists x)(Px \ \& \ Jx) \ \& \ (\exists x)(Px \ \& \ Hx)$

8. Como la disyunción en la lógica clásica es inclusiva, el antecedente de la fórmula **(68c)** admite la posibilidad de que haya serpientes acuáticas del desierto. Si existieran tales criaturas, ¡ciertamente serían peligrosas! Pero si queremos excluir la posibilidad de que existan, debemos agregar al antecedente del condicional la negación de la conjunción de las dos clases. Así, la fórmula **(68c)** se convertiría en:

(68d) $(\forall x)([(Dx \vee Ax) \ \& \ {\sim}(Dx \ \& \ Ax)] \supset Px)$

Cap-6.pmd 178 13/07/07, 03:19 p.m.

(71) Hay principiantes croatas y mexicanos con buena sazón.

$(\exists x)[(Px \ \& \ Cx) \ \& \ Zx] \ \& \ (\exists x)[(Px \ \& \ Mx) \ \& \ Zx]$

(72) Caín y Abel son cocineros principiantes somalíes, y todos los cocineros principiantes somalíes tienen buena sazón.

$[(Pc \ \& \ Sc) \ \& \ (Pa \ \& \ Sa)] \ \& \ (\forall x)[(Px \ \& \ Sx) \supset Zx)]$

(73) Los cocineros croatas y somalíes tienen buena sazón, pero Josué y Noé, que son mexicanos, no la tienen.

$(\forall x)[(Cx \vee Sx) \supset Zx] \ \& \ [(Mj \ \& \ Mn) \ \& \ (\sim Zj \ \& \ \sim Zn)]$

Pasamos ahora a considerar ejemplos de enunciados categóricos que contienen relaciones diádicas y de grado superior. Analicemos el siguiente enunciado utilizando la guía de simbolización del Ejercicio 6.2 - B:

UD: Andrea, Bernardo, Claudia, David y Enrique

E*x*:	*x* es escritor	a:	Andrea
F*x*:	*x* es famoso	b:	Bernardo
I*x*:	*x* es ingenioso	c:	Claudia
G*xy*:	A *x* le gusta *y*	d:	David
I*xy*:	*x* se inspira en *y*	e:	Enrique
V*xy*:	*x* envidia a *y*		
M*xy*:	*x* imita a *y*		

(74) David imita a todos aquellos que imitan tanto a Claudia como a Bernardo.

Para poder entender la estructura de un enunciado, en ocasiones es mejor parafrasearlo primero en *logiñol*, una mezcla de lógica y español. Subrayando las partes lógicamente significativas, el enunciado se podría leer de la siguiente manera:

(74a) Para <u>cada</u> persona es cierto que <u>si</u> la persona imita a Claudia <u>y</u> a Bernardo, <u>entonces</u> David imita a esa persona.

Con esta ayuda, podemos ver que el enunciado es de tipo **A**. La simbolización adecuada es la siguiente:

(74b) $(\forall x)[(Mxc \ \& \ Mxb) \supset Mdx]$

Consideremos un segundo ejemplo:

(75) Todos los que se inspiran en David, también se inspiran en Enrique o en Andrea.

Cap-6.pmd 179 13/07/07, 03:19 p.m.

El enunciado es claramente tipo **A**: $(\forall \mathbf{x})(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q})$. La complicación reside en que el consecuente es un enunciado disyuntivo. La simbolización correcta es:

(75a) $(\forall x)[\mathrm{I}x\mathrm{d} \supset (\mathrm{I}x\mathrm{e} \vee \mathrm{I}x\mathrm{a})]$

Consideremos algunos otros ejemplos acerca de este grupo de individuos:

(76) A Enrique le gustan todos los escritores que les gustan a David y a Claudia.

(77) Claudia envidia a Enrique y se inspira en todos los escritores en los que él se inspira.

De nuevo se trata de dos enunciados tipo **A**. Podemos parafrasear el **(76)** de la siguiente manera:

(76a) Para cada persona es cierto que si esa persona es un escritor y es del gusto tanto de David como de Claudia, esa persona es del gusto de Enrique.

(76b) $(\forall z)([\mathrm{E}z \ \& \ (\mathrm{Gd}z \ \& \ \mathrm{Gc}z)] \supset \mathrm{Ge}z)$

En el **(77)**, el enunciado tipo **A** está unido a un enunciado atómico. La simbolización correcta es:

(77a) $\mathrm{Vce} \ \& \ (\forall y)[(\mathrm{E}y \ \& \ \mathrm{Ie}y) \supset \mathrm{Ic}y)]$

Aunque aparentemente los siguientes dos enunciados son diferentes, en realidad se trata del mismo enunciado expresado de dos maneras distintas:

(78) Cualquiera que se inspire en Claudia se inspira en Andrea.
Todos los que se inspiran en Claudia se inspiran en Andrea.

Ambos enunciados se simbolizan como:

(78a) $(\forall x)(\mathrm{I}x\mathrm{c} \supset \mathrm{I}x\mathrm{a})$

Los siguientes dos enunciados afirman cosas muy distintas:

(79) Si a alguien le gusta David, a Bernardo le gusta David.

(80) Si a todos les gusta David, a Bernardo le gusta David.

El enunciado **(80)** afirma que una consecuencia lógica de que a todos les guste David es que a Bernardo le guste, pues David hace parte del universo del discurso. El enunciado **(79)** afirma que si existe un conjunto no vacío de personas a las que les gusta David, Bernardo estará entre ellas. Por lo tanto el primer enunciado es un condicional cuyo antecedente es un enunciado existencial, mientras que el segundo es un condicional cuyo antecedente es un enunciado universal:

(79a) $(\exists x)\mathrm{G}x\mathrm{d} \supset \mathrm{Gbd}$

(80a) $(\forall x)\mathrm{G}x\mathrm{d} \supset \mathrm{Gbd}$

La palabra "alguien" es un cuantificador que puede ser utilizado de diferentes formas. Comparemos los siguientes enunciados:

(81) Si *alguien* envidia a David, a él o ella le gusta Andrea.

(82) Si *alguien* envidia a David, a *alguien* le gusta Andrea.

En el primer enunciado, la persona que envidia a David es claramente la misma a la que le gusta Andrea, mientras que en la segunda, la persona que envidia a David no es necesariamente la misma a la que le gusta Andrea. Por eso la fórmula **(82a)** contiene dos cuantificadores diferentes, mientras que en la fórmula **(81a)** el cuantificador rige tanto al antecedente como al consecuente de la fórmula condicional:

(81a) $(\forall x)(\mathrm{V}x\mathrm{d} \supset \mathrm{G}x\mathrm{a})$

(82a) $(\exists x)\mathrm{V}x\mathrm{d} \supset (\exists x)\mathrm{G}x\mathrm{a}$

La clave está en determinar si el pronombre en el consecuente se refiere a la(s) misma(s) persona(s) mencionada(s) en el antecedente.

Finalizaremos esta sección considerando una dificultad adicional que se presenta al intentar simbolizar enunciados que contienen verbos como "buscar", "desear", "cazar", "imaginar" y otros similares. Consideremos, por ejemplo, el siguiente enunciado:

(83) El Rey Arturo está cazando unicornios.

Si "C*xy*" es "*x* caza *y*", "a" es el Rey Arturo, y "U*x*" es "*x* es un unicornio", podríamos pensar que la simbolización adecuada es:

(83a) $(\exists y)(\mathrm{U}y \ \& \ \mathrm{Ca}y)$

Pero esto sería un error. El problema no es que el predicado "Ux" sea vacío, pues el lenguaje *LC* admite predicados que no se aplican a ningún miembro del UD. El problema, más bien, es que esta fórmula nos compromete, a través del uso del cuantificador existencial, a aceptar la existencia de al menos un unicornio, lo cual es absurdo.

La correspondiente fórmula universal tampoco es aceptable:

(83b) $(\forall y)(\mathrm{U}y \supset \mathrm{Ca}y)$

El problema en este caso no es que nos comprometamos con la existencia de los unicornios. El problema es que la afirmación es demasiado débil. Como los unicornios no existen, el antecedente del enunciado es falso, y en consecuencia el enunciado es verdadero así el Rey Arturo esté durmiendo plácidamente en su cama y no cazando criaturas mitológicas.

La solución reside en utilizar el predicado unitario C*x*: "*x* está cazando unicornios". De este modo, el enunciado se puede simbolizar simplemente como:

(83c) Ca

Consideremos otro ejemplo para señalar una dificultad adicional:

(84) El rey Arturo está buscando un escudero fiel.

Si interpretamos "B*xy*" como "*x* busca *y*" y "E*x*" como "*x* es un escudero fiel", podríamos pensar que la simbolización adecuada es:

(84a) $(\exists y)(\mathrm{E}y \; \& \; \mathrm{Ba}y)$

Esta fórmula sería correcta si el Rey Arturo ya supiera quién es el escudero fiel que está buscando y simplemente ignore dónde está. Pero si lo único que el Rey Arturo desea es encontrar un escudero fiel sin pensar en nadie en particular, la fórmula **(84a)** no es una simbolización adecuada. De nuevo, el enunciado nos compromete con la existencia de un escudero fiel y es perfectamente posible que no haya ninguno.

Supongamos ahora que hay tres escuderos fieles que quieren ser escogidos por el rey. Al rey sólo le interesa contratar a uno de ellos, no a todos. Por lo tanto, sería un error simbolizar el enunciado utilizando un cuantificador universal:

(84b) $(\forall y)(\mathrm{E}y \supset \mathrm{Ba}y)$

De nuevo, la solución reside en utilizar el predicado unitario E*x*: "*x* está buscando un escudero fiel". Así, la simbolización correcta es:

(84c) Ea

En general, si no es claro si el objeto que se busca, se desea o se espera hace parte del universo del discurso, lo mejor es utilizar un predicado monádico. Las *lógicas intensionales*[9] se ocupan en más detalle de este tipo de casos.

9. De la palabra "intensión", un término técnico utilizado en filosofía para designar el sentido de una expresión, en oposición a su referencia.

Cap-6.pmd 182 13/07/07, 03:19 p.m.

Ejercicio 6.5

A. Simbolice los siguientes enunciados en *LC*.

UD:	Perros en un criadero		
C*y*:	*y* es un cachorro	U*y*:	*y* tiene pulgas
V*y*:	*y* es un perro viejo	A*y*:	*y* es agresivo
P*y*:	*y* es un pastor alemán	N*y*:	*y* nunca ladra
L*y*:	*y* es un labrador	t:	Trotsky
T*y*:	*y* es un terrier		

1. Los labradores nunca ladran.
2. Ningún pastor alemán tiene pulgas.
3. Algunos de los cachorros son terriers.
4. Un pastor alemán siempre es agresivo.
5. Sólo los labradores viejos son agresivos.
6. Todos los cachorros son pastores alemanes y labradores.
7. No todos los labradores y los terriers son agresivos.
8. Los cachorros que nunca ladran no existen.
9. Un labrador es agresivo sólo si tiene pulgas.
10. Algunos, pero no todos los labradores son cachorros.
11. Si alguno es agresivo, Trotsky lo es.
12. Si alguno tiene pulgas, entonces es un labrador o un pastor alemán.
13. Si alguno nunca ladra, no tiene pulgas.
14. Trotsky no es un cachorro pero nunca ladra.
15. Ningún cachorro es a la vez agresivo y pulgoso.
16. Todos son cachorros, pero no todos son labradores.
17. Si todos los labradores son cachorros, ninguno es agresivo.
18. Algunos terriers tienen pulgas, pero nunca ladran.
19. Algunos terriers viejos son agresivos a pesar de que no tienen pulgas.
20. Trotsky está viejo, tiene pulgas y es agresivo.

Cap-6.pmd 183 13/07/07, 03:19 p.m.

B. Simbolice los siguientes enunciados en *LC*.

UD:	Niños en un jardín infantil		
Ix:	x es inquieto	Vxy:	x es vecino de y
Sx:	x siempre tiene sueño	Mxy:	x es mejor estudiante que y
Ex:	x es extranjero	j:	Jaimito
Hx:	x es hijo único	l:	Laura
Tx:	x tiene gafas	t:	Teresita
Cx:	x es caprichoso		

1. Los niños con gafas siempre tienen sueño.
2. Los vecinos de Teresita son extranjeros.
3. Los hijos únicos son caprichosos, pero los niños con gafas no.
4. Los niños caprichosos son mejores estudiantes que Teresita.
5. Laura es vecina de un niño con gafas.
6. Los extranjeros caprichosos son inquietos.
7. Laura es mejor estudiante que algunos niños caprichosos e inquietos.
8. Los niños con gafas y los caprichosos son mejores estudiantes que Jaimito.
9. Algunos niños extranjeros, pero no todos, siempre tienen sueño.
10. Teresita es vecina de todos los vecinos de Laura o Jaimito.
11. Cualquier hijo único que sea vecino de Laura es caprichoso pero no tiene gafas.
12. Jaimito, los niños con gafas y los hijos únicos son mejores estudiantes que Teresita.
13. Laura es mejor estudiante que todos los que son mejores estudiantes que Jaimito.
14. Un niño tiene gafas si y sólo si es vecino de Jaimito.
15. Jaimito no es inquieto, pero es caprichoso.

C. Construya un guía de simbolización para cada uno de los siguientes argumentos y traduzca los enunciados a *LC*.

1. Si algo es caro, es valioso y raro. Aquello que es valioso es deseable y precioso. Por lo tanto, si algo es valioso o caro, debe ser tanto raro como precioso.
2. Las naranjas y las manzanas son saludables. No todo lo que es saludable es insípido, ni todo lo delicioso es adictivo. Gerardo odia las manzanas aunque son deliciosas y saludables. Por lo tanto, Gerardo odia todo lo que es delicioso y saludable.
3. Los artistas son caprichosos y tercos, pero lo mismo no se puede decir de las demás personas. Las personas que usan estereotipos son odiosas e ignorantes. Por eso los artistas son odiosos e ignorantes.
4. Las cebras y las jirafas son animales salvajes. No todos los animales salvajes son peligrosos y carnívoros. Tarzán sólo persigue animales salvajes carnívoros. Por lo tanto, Tarzán no persigue ni cebras ni jirafas.

6.6 Enunciados con cuantificación múltiple

Algunos de los enunciados que hemos simbolizado hasta ahora han requerido el uso de dos o más cuantificadores. Sin embargo, en todos los casos se ha tratado de cuantificadores con rangos independientes. En esta sección consideraremos casos en los que dos o más cuantificadores tienen rangos sobrepuestos. Consideremos el siguiente enunciado:

(85) Todos admiran a todos.

Para simbolizar correctamente este enunciado será necesario utilizar dos cuantificadores, uno para los que admiran y otro para los admirados. Supongamos que "A*xy*" representa el predicado "*x* admira a *y*" y supongamos que el UD es la humanidad. La simbolización correcta del enunciado es:

(85a) $(\forall x)(\forall y)\mathrm{A}xy$

Consideremos ahora el siguiente enunciado:

(86) Alguien admira a alguien.

El enunciado debe ser simbolizado utilizando dos cuantificadores existenciales:

(86a) $(\exists x)(\exists y)\mathrm{A}xy$

También es posible combinar cuantificadores existenciales y universales. Consideremos los siguientes enunciados:

(87) Todos admiran a alguien.

(88) Alguien es admirado por todos.

Los enunciados se pueden simbolizar respectivamente como:

(87a) $(\forall x)(\exists y)\mathrm{A}xy$

(88a) $(\exists y)(\forall x)\mathrm{A}xy$

Es importante aclarar que la fórmula **(87a)** no dice que todas las personas admiren a la misma persona. La fórmula sería cierta así Bernardo sólo admire a Andrea y Claudia sólo admire a Enrique. Lo importante es que cada una de las personas admire a alguien. Lo contrario ocurre en la fórmula **(88a)**. En este caso sí estamos afirmando que hay una persona específica que es admirada por todos. La moraleja es que el orden de los cuantificadores es de suma importancia.

Cap-6.pmd 185 13/07/07, 03:19 p.m.

Comparemos ahora las siguientes dos fórmulas:

(88a) $(\exists y)(\forall x)Axy$

(89a) $(\exists y)(\forall x)Ayx$

La primera fórmula, como ya vimos, es la simbolización de "Alguien es admirado por todos". La segunda fórmula, por el contrario, simboliza el siguiente enunciado:

(89) Hay alguien que admira a todos.

Aunque en las fórmulas **(88a)** y **(89a)** el cuantificador existencial ocurre primero, lo importante es el lugar que ocupa en el predicado la variable sobre la que rige. Del mismo modo, hay una gran diferencia entre el enunciado **(89)** y el siguiente enunciado:

(90) Todos son admirados por alguien.

el cual se puede simbolizar como:

(90a) $(\forall x)(\exists y)Ayx$

En el enunciado **(89)** todos son admirados por la misma persona. En el **(90)** todos tienen un admirador, pero no necesariamente la misma persona.

En general, cuando todos los cuantificadores son universales, o cuando todos son existenciales, el orden en que éstos aparecen es irrelevante. Los siguientes dos enunciados, y sus simbolizaciones correspondientes, son lógicamente equivalentes:

(91) Alguien admira a alguien.
Alguien es admirado por alguien.

(91a) $(\exists x)(\exists y)Axy$
$(\exists y)(\exists x)Axy$

Del mismo modo, el orden de las variables en un predicado también es irrelevante en estos casos:

(91b) $(\exists x)(\exists y)Axy$
$(\exists x)(\exists y)Ayx$

Lo mismo no ocurre cuando se mezclan cuantificadores existenciales y universales, como vimos en los ejemplos **(87)** – **(90)**.

Una de las formas de evitar confusiones cuando un enunciado de *LC* contiene más de un cuantificador es haciendo una paráfrasis en una mezcla de lógica y español:

$(\exists x)(\exists y)$...	Existe un x y existe un y tales que ...
$(\forall x)(\forall y)$...	Para todo x y para todo y ...
	Para cada x y para cada y ...

Cap-6.pmd 186 13/07/07, 03:19 p.m.

$(\exists x)(\forall y)$...	Existe un *x* tal que para todo *y* ...
	Existe un *x* tal que para cada *y* ...
$(\forall x)(\exists y)$...	Para todo *x* existe un *y* tal que ...
	Para cada *x* existe un *y* tal que ...

En los ejemplos anteriores asumimos que el UD eran las personas. Si quisiéramos que la verdad de estos enunciados estuviera limitada a un grupo específico de personas sin cambiar el UD, necesitaríamos un predicado para especificar que nos referimos sólo a ese grupo de personas. Supongamos que queremos referirnos sólo a los ganadores del premio Nobel. Asumiendo que "N*x*" es "*x* ganó el premio Nobel", reconsideremos los siguientes enunciados:

(85) Todos admiran a todos.

(86) Alguien admira a alguien.

(87) Todos admiran a alguien.

(88) Alguien es admirado por todos.

(89) Hay alguien que admira a todos.

(90) Todos son admirados por alguien.

Las simbolizaciones correctas en *LC* son:

(85b)	$(\forall x)[\mathrm{N}x \supset (\forall y)(\mathrm{N}y \supset \mathrm{A}xy)]$	o	$(\forall x)(\forall y)[(\mathrm{N}x \,\&\, \mathrm{N}y) \supset \mathrm{A}xy]$
(86b)	$(\exists x)[\mathrm{N}x \,\&\, (\exists y)(\mathrm{N}y \,\&\, \mathrm{A}xy)]$	o	$(\exists x)(\exists y)[(\mathrm{N}x \,\&\, \mathrm{N}y) \,\&\, \mathrm{A}xy]$
(87b)	$(\forall x)[\mathrm{N}x \supset (\exists y)(\mathrm{N}y \,\&\, \mathrm{A}xy)]$	o	$(\forall x)(\exists y)[\mathrm{N}x \supset (\mathrm{N}y \,\&\, \mathrm{A}xy)]$
(88b)	$(\exists x)[\mathrm{N}x \,\&\, (\forall y)(\mathrm{N}y \supset \mathrm{A}xy)]$	o	$(\exists x)(\forall y)[\mathrm{N}x \,\&\, (\mathrm{N}y \supset \mathrm{A}xy)]$
(89b)	$(\forall x)[\mathrm{N}x \supset (\exists y)(\mathrm{N}y \,\&\, \mathrm{A}yx)]$	o	$(\forall x)(\exists y)[\mathrm{N}x \supset (\mathrm{N}y \,\&\, \mathrm{A}yx)]$
(90b)	$(\exists x)[\mathrm{N}x \,\&\, (\forall y)(\mathrm{N}y \supset \mathrm{A}yx)]$	o	$(\exists x)(\forall y)[\mathrm{N}x \,\&\, (\mathrm{N}y \supset \mathrm{A}yx)]$

Aunque las dos simbolizaciones son correctas en cada caso, mientras estudiamos cómo traducir enunciados del español a *LC* trataremos de mantener el cuantificador lo más cerca posible de la variable que éste cuantifica. Más adelante veremos cómo extender y contraer el rango de un cuantificador, y veremos que hay razones teóricas para preferir la simbolización de la columna derecha.

Cap-6.pmd 187 13/07/07, 03:19 p.m.

Consideremos ahora los siguientes enunciados acerca del siguiente grupo de personas:

UD: Tenistas

Zx:	x es zurdo	Gxy:	x le ha ganado a y
Sx:	x tiene un buen servicio	Sxy:	x sirve mejor que y
Rx:	x tiene un buen revés	Rxy:	x tiene mejor revés que y
Wx:	x ha ganado Wimbledon	a:	Andre Agassi
Ux:	x ha ganado el US Open	m:	John McEnroe

(91) Los tenistas zurdos sirven mejor que los tenistas que tienen un buen revés.

Para facilitar la simbolización, haremos inicialmente una paráfrasis del enunciado subrayando las palabras lógicamente relevantes:

(91a) Para <u>cada</u> tenista es cierto que <u>si</u> es zurdo, <u>entonces</u> para <u>cualquier</u> tenista es cierto que <u>si</u> tiene buen revés, <u>entonces</u> el primero sirve mejor que él.

Ahora transformaremos esta paráfrasis en una simbolización en *LC*:

(91b) $(\forall x)[\mathrm{Z}x \supset (\forall y)(\mathrm{R}y \supset \mathrm{S}xy)]$

Ahora consideremos el siguiente enunciado:

(92) Todos los que han ganado Wimbledon le han ganado a alguien que ha ganado el US Open.

De nuevo haremos una paráfrasis:

(92a) Para <u>cada</u> tenista es cierto que <u>si</u> ha ganado Wimbledon, <u>entonces</u> <u>existe</u> alguien que ha ganado el US Open <u>y</u> al que han derrotado.

Ahora transformaremos esta paráfrasis en una simbolización en *LC*:

(92b) $(\forall x)[\mathrm{W}x \supset (\exists y)(\mathrm{U}y \ \& \ \mathrm{G}xy)]$

Finalmente consideraremos los siguientes enunciados y sus respectivas paráfrasis y simbolización en *LC*:

(93) Agassi ganó Wimbledon y cualquier ganador de Wimbledon sirve mejor y tiene mejor revés que cualquier ganador del US Open.

Agassi ganó Wimbledon <u>y</u> para <u>cada</u> tenista es cierto que <u>si</u> ganó Wimbledon, <u>entonces</u> para <u>cualquier</u> tenista es cierto que <u>si</u> ganó el US Open, <u>entonces</u> el primero sirve mejor <u>y</u> tiene mejor revés que él.

$\mathrm{Wa} \ \& \ (\forall x)(\mathrm{W}x \supset (\forall y)[\mathrm{U}y \supset (\mathrm{S}xy \ \& \ \mathrm{R}xy)])$

(94) McEnroe tiene un buen revés y un buen servicio, pero no hay nadie que tenga un mejor revés y servicio que Agassi.

McEnroe tiene un buen revés y un buen servicio, pero no existe un tenista tal que tenga mejor revés y mejor servicio que Agassi.

$(\mathrm{Rm} \ \& \ \mathrm{Sm}) \ \& \ \sim(\exists x)(\mathrm{R}x\mathrm{a} \ \& \ \mathrm{S}x\mathrm{a})$

(95) Siempre hay algún zurdo con un mejor servicio que cualquier derecho con un buen servicio.

Para cada tenista es cierto que si tiene un buen servicio y no es zurdo, entonces existe algún tenista que es zurdo y tiene un mejor servicio que el primero.

$(\forall x)[(\mathrm{S}x \ \& \ \sim\mathrm{Z}x) \supset (\exists y)(\mathrm{Z}y \ \& \ \mathrm{S}yx)]$

(96) Nadie ha ganado el US Open a menos que le haya ganado a alguien que haya ganado Wimbledon.

Para cada tenista es cierto que no ha ganado el US Open, o ha ganado el US Open y existe algún tenista que ha ganado Wimbledon y al que le ha ganado.

$(\forall x)(\sim\mathrm{U}x \vee [\mathrm{U}x \ \& \ (\exists y)(\mathrm{W}y \ \& \ \mathrm{G}xy)])$

(97) Ningún ganador del US Open tiene mejor revés que un zurdo que haya ganado Wimbledon.

No existe un tenista que haya ganado el US Open y que tenga mejor revés que algún tenista que sea zurdo y que haya ganado Wimbledon.

$\sim(\exists x)(\mathrm{U}x \ \& \ (\exists y)[(\mathrm{Z}y \ \& \ \mathrm{W}y) \ \& \ \mathrm{R}xy])$

Haciendo uso de la cuantificación múltiple también podemos simbolizar fácilmente el argumento **(1)** con el que comenzamos el capítulo:

(1) A todas las hermanas de Victoria les gustan todos los pintores italianos. A Claudia no le gusta Rafael, y Rafael es un pintor italiano. Por lo tanto, Claudia no es hermana de Victoria.

Comenzamos estableciendo una guía de simbolización:

UD: Personas

Px:	x es un pintor	r:	Rafael
Ix:	x es italiano	v:	Victoria
Hxy:	x es hermana de y	c:	Claudia
Gxy:	A x le gusta y		

Cap-6.pmd 189 13/07/07, 03:19 p.m.

La simbolización del argumento en *LC* es:

(1a) $(\forall x)[(\mathrm{P}x \ \&\ \mathrm{I}x) \supset (\forall y)(\mathrm{H}y\mathrm{v} \supset \mathrm{G}yx)]$
$\sim\mathrm{Gcr} \ \&\ (\mathrm{Pr} \ \&\ \mathrm{Ir})$
$\sim\mathrm{Hcv}$

Consideraremos ahora una serie de ejemplos sobre los números enteros positivos a partir de la siguiente guía de simbolización:

UD: Números enteros positivos

Px:	x es par	Rx:	x es primo	a:	1
Ix:	x es impar	Mxy:	x es mayor que y	b:	2

(98) Los enteros positivos no tienen un límite superior.

Podemos comenzar parafraseando el enunciado de la siguiente manera:

(98a) Para <u>cada</u> número entero positivo <u>existe</u> un número entero positivo mayor que el primero.

La simbolización correcta es:

(98b) $(\forall x)(\exists y)\mathrm{M}yx$

Si cambiamos el orden de los cuantificadores cambiamos por completo el sentido de la fórmula:

(99) $(\exists y)(\forall x)\mathrm{M}yx$

Esta fórmula dice que existe un número entero positivo mayor que todos los números enteros positivos, lo cual es falso.

También podemos simbolizar el siguiente enunciado análogo:

(100) Los enteros positivos tienen un límite inferior.

En el conjunto de los números enteros positivos no existe un número menor que 1. Como no tenemos un predicado para "*x* es menor que *y*", debemos expresar esta idea diciendo que no existe ningún número entero positivo tal que 1 sea mayor que él:

(100a) $\sim(\exists x)\mathrm{Ma}x$

Como el enunciado **(100)** no especifica que el número 1 sea el límite inferior, debemos convertir esta fórmula en una más general:

(100b) $(\exists x)\sim(\exists y)\mathrm{M}xy$

Es decir, existe un número x tal que para ningún número y es cierto que x sea mayor que y.

Consideremos ahora el siguiente enunciado:

(101) 2 es el menor de los números primos.

El enunciado es en realidad la conjunción de dos enunciados: "2 es un número primo" y "No hay un número primo menor que 2". A su vez, el segundo enunciado es equivalente a: "No existe ningún número entero positivo tal que 2 sea mayor que él". La simbolización completa es:

(101a) $\text{Rb} \;\&\; {\sim}(\exists y)(\text{R}y \;\&\; \text{Mb}y)$

Ejercicio 6.6

A. Simbolice los siguientes enunciados en *LC* usando la siguiente guía de simbolización:

UD: Personas

Ex:	x es un enfermero	Cx:	x está cansado
Mx:	x es un médico	Axy:	x es amigo de y
Tx:	x tiene turnos nocturnos	Pxy:	x es paciente de y
Ux:	x trabaja en Urgencias	Jxy:	x es jefe de y
Hx:	x está herido	d:	Daniel

1. Ningún enfermero es jefe de un enfermero.
2. Todos los heridos son pacientes de algún médico.
3. No todos los enfermeros son amigos de algún médico.
4. Algunos médicos son jefes de algunos médicos.
5. No todos los pacientes de los médicos que trabajan en Urgencias están heridos.
6. No todos los jefes de los enfermeros son médicos.
7. No todos los médicos que tienen turnos nocturnos están cansados.
8. Los médicos cansados no tienen ni pacientes ni amigos.
9. Los médicos que tienen pacientes tienen amigos.
10. Algunos enfermeros no tienen jefe pero tienen turnos nocturnos.
11. Daniel es médico y jefe de un médico.
12. Daniel es enfermero y es amigo de todos los pacientes de los enfermeros.
13. Daniel no es amigo de ninguno de los enfermeros pero es el jefe de todos ellos.
14. Daniel no es amigo de ningún médico que sea jefe de un enfermero.

B. Simbolice los siguientes enunciados en *LC* usando la siguiente guía de simbolización:

UD:	Empleados de un circo		
D*xy*:	*x* le debe dinero a *y*	R*x*:	*x* toca el redoblante
V*xy*:	*x* es más viejo que *y*	T*x*:	*x* es un taquillero
D*x*:	*x* es un domador	Y*x*:	*x* es un payaso
E*x*:	*x* es un equilibrista	j:	El Gran Jursich
M*x*:	*x* es mago	u:	Ulises Lima
O*x*:	*x* es un director de orquesta		

1. Todos los domadores son más viejos que algún payaso, y algún payaso es más viejo que todos los domadores.
2. Ningún domador es más viejo que alguno de los equilibristas.
3. Cualquier taquillero que le deba dinero a algún equilibrista es un payaso.
4. Ningún payaso es más viejo que algún director de orquesta, pero algunos domadores sí.
5. No todos los payasos son magos, pero todos los magos son payasos.
6. Ninguna persona que toque el redoblante es mago, pero algunos directores de orquesta sí.
7. Todos los taquilleros que también son payasos son más viejos que algunos taquilleros que no son payasos.
8. Al menos un taquillero que no es payaso es más viejo que todos los payasos que también son taquilleros.
9. Todos los domadores que tocan el redoblante son más viejos que los domadores que no tocan el redoblante.
10. Algunos equilibristas les deben dinero a todos los taquilleros, y algunos taquilleros les deben dinero a todos los equilibristas.
11. Hay un taquillero que es domador y les debe dinero a todos los domadores que tocan el redoblante.
12. Cualquiera que les deba dinero a todos es un mago, un taquillero o un director de orquesta.
13. Todos le deben dinero a alguien, pero los taquilleros que no son domadores les deben dinero a todos.
14. Todos les deben dinero a los payasos que tocan el redoblante, y el Gran Jursich le debe dinero a Ulises Lima.
15. Ulises Lima le debe dinero a todos aquellos que le deben dinero al Gran Jursich.

C. Simbolice los siguientes enunciados en *LC* usando la siguiente guía de simbolización:

UD: Números enteros positivos

Px:	x es par	Ixy:	x por y es impar
Ix:	x es impar	Rxy:	x por y es primo
Rx:	x es primo	a:	1
Mxy:	x es mayor que y	b:	2
Pxy:	x por y es par		

1. Un número par por un número par es par.
2. El producto de dos números primos nunca es primo.
3. Si el producto de dos números enteros positivos es par, al menos uno de ellos es par.
4. Si el producto de dos números enteros positivos es impar, los dos son impares.
5. Ningún número entero positivo multiplicado por 2 es impar.
6. Si un número entero positivo es mayor que otro, y éste es mayor que un tercero, el primero es mayor que el tercero.
7. Un número entero positivo es par si y sólo si no hay ningún número entero positivo que al ser multiplicado por ese número par dé un número impar.
8. Un número entero positivo es impar si y sólo si al multiplicarlo por un impar el resultado es impar.

6.7 La forma normal prenexa de una fórmula de *LC*

En esta sección estudiaremos uno de los temas más importantes en la traducción de enunciados del español al lenguaje *LC*: la extensión del rango de un cuantificador. En el ejemplo de los tenistas simbolizamos el enunciado:

(95) Siempre hay algún zurdo con un mejor servicio que cualquier derecho con un buen servicio.

como:

(95a) $(\forall x)[(Sx \ \& \ {\sim}Zx) \supset (\exists y)(Zy \ \& \ Syx)]$

Pero también hubiéramos podido simbolizar el enunciado como:

(95b) $(\forall x)(\exists y)[(Sx \ \& \ {\sim}Zx) \supset (Zy \ \& \ Syx)]$

La diferencia obvia es que en la fórmula **(95b)** el rango del cuantificador de "*y*" ha sido extendido para cubrir el antecedente del condicional. Esta extensión no cambia ni

Cap-6.pmd 193 13/07/07, 03:19 p.m.

el sentido ni el valor de verdad del enunciado original. Cuando una fórmula se escribe con *todos* los cuantificadores al comienzo se dice que la fórmula está en ***forma normal prenexa***:

> Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LC* está en ***forma normal prenexa*** si y sólo si (i) todos los cuantificadores de $\mathcal{P}$ están al comienzo de la fórmula, (ii) ninguno de los cuantificadores está negado, y (iii) el rango de todos los cuantificadores se extiende hasta el final de la fórmula. La subfórmula de $\mathcal{P}$ que no contiene cuantificadores es la *matriz* de $\mathcal{P}$.

Cuando una fórmula está en forma normal prenexa y todos los cuantificadores son universales, se dice que la fórmula está en ***forma normal skolem***.

Existen varias razones teóricas para preferir fórmulas en forma normal prenexa. En matemáticas se clasifica a los conjuntos de acuerdo con su jerarquía aritmética y analítica, la cual está determinada por la complejidad de las fórmulas en forma prenexa que los definen. Algunos sistemas automatizados de prueba sólo funcionan cuando las fórmulas están escritas en forma prenexa. Y finalmente, muchos de los teoremas más importantes de la lógica, entre ellos el teorema de la completitud de la lógica de primer orden de Gödel (1929, 1930), requieren que todas las fórmulas estén escritas en forma prenexa. Por todas estas razones, cualquier persona que esté interesada en profundizar en el estudio de la lógica debe aprender a formar el equivalente en forma normal prenexa de una fórmula. A continuación veremos cómo se puede extender el rango de los cuantificadores para transformar cualquier fórmula en su equivalente en forma prenexa.

Es muy fácil equivocarse al intentar extender el rango de un cuantificador. Extenderemos el rango del cuantificador de "*x*" en la siguiente fórmula:

(102) $(\exists x)\mathrm{I}x \supset (\exists y)\mathrm{M}y\mathrm{a}$

La siguiente *no* es una transformación adecuada de la fórmula:

(102a) $(\exists x)(\mathrm{I}x \supset (\exists y)\mathrm{M}y\mathrm{a})$

Si interpretamos los predicados y la constante según la siguiente guía de simbolización, la fórmula **(102)** es falsa mientras que la **(102a)** es verdadera:

UD:	Números enteros positivos
M*xy*:	*x* es menor que *y*
I*x*:	*x* es impar
a:	1

Cap-6.pmd 194 13/07/07, 03:19 p.m.

La fórmula **(102)** es falsa porque el antecedente es verdadero (hay números enteros positivos impares) pero el consecuente es falso (no hay ningún número entero positivo menor que 1). La fórmula **(102a)** es verdadera porque existen números enteros positivos que carecen de la propiedad indicada por el antecedente del condicional, como ocurre en el caso de los números pares, y que por ende hacen que el condicional sea verdadero para al menos un número entero positivo. Por lo tanto, la fórmula **(102a)** no es una transformación adecuada de la **(102)**.

Si queremos extender el rango del cuantificador existencial en la fórmula **(102)**, debemos transformar el cuantificador existencial en un cuantificador universal:

(102b) $(\forall x)(\mathrm{I}x \supset (\exists y)\mathrm{M}y\mathrm{a})$

Esta fórmula, al igual que la **(102)**, resulta ser falsa bajo la anterior interpretación de los predicados: no es cierto para todos los enteros positivos que si son impares, existe un número menor que 1. Si el número en cuestión es impar, el condicional es falso.

La regla general para estos casos es la siguiente. Cuando el rango de un cuantificador existencial sólo cubre el antecedente de un condicional y queremos extenderlo al consecuente, debemos transformarlo en un cuantificador universal, y viceversa. Formalmente, las siguientes dos estructuras lógicas son equivalentes siempre y cuando la variable del cuantificador no aparezca en el consecuente del condicional:

$(\exists \mathbf{x})\mathcal{Q}\mathbf{x} \supset \mathcal{P}$ $\qquad$ $(\forall \mathbf{x})(\mathcal{Q}\mathbf{x} \supset \mathcal{P})$

Existe una regla análoga para el caso en el que el cuantificador universal sólo cubre el antecedente del condicional. Las siguientes dos estructuras lógicas son equivalentes siempre y cuando la variable del cuantificador no aparezca en el consecuente del condicional:

$(\forall \mathbf{x})\mathcal{Q}\mathbf{x} \supset \mathcal{P}$ $\qquad$ $(\exists \mathbf{x})(\mathcal{Q}\mathbf{x} \supset \mathcal{P})$

Consideremos la siguiente fórmula utilizando la misma interpretación del ejemplo **(102)**:

(103) $(\forall x)\mathrm{I}x \supset (\exists y)\mathrm{M}y\mathrm{a}$

La siguiente *no* es una transformación adecuada de la fórmula **(103)**:

(102b) $(\forall x)(\mathrm{I}x \supset (\exists y)\mathrm{M}y\mathrm{a})$

La fórmula **(103)** es verdadera porque su antecedente es falso: no todos los números enteros positivos son impares. Pero la fórmula **(102b)**, como ya vimos, es falsa. Para extender el rango del cuantificador universal debemos convertirlo en un cuantificador existencial. La fórmula equivalente es:

(102a) $(\exists x)(\mathrm{I}x \supset (\exists y)\mathrm{M}y\mathrm{a})$

Cap-6.pmd 195 13/07/07, 03:19 p.m.

Como ya vimos, esta fórmula, al igual que la **(103)**, es verdadera bajo la interpretación dada.

Afortunadamente, en la mayoría de los casos la extensión o contracción del rango de un cuantificador no implica un cambio de cuantificador. Los siguientes pares de estructuras lógicas son equivalentes, siempre y cuando **x** no aparezca en la fórmula $\mathcal{P}$:

Conjunciones

$(\exists \mathbf{x})\mathcal{Q}\mathbf{x}\ \&\ \mathcal{P}$	y	$(\exists \mathbf{x})(\mathcal{Q}\mathbf{x}\ \&\ \mathcal{P})$
$(\forall \mathbf{x})\mathcal{Q}\mathbf{x}\ \&\ \mathcal{P}$	y	$(\forall \mathbf{x})(\mathcal{Q}\mathbf{x}\ \&\ \mathcal{P})$
$\mathcal{P}\ \&\ (\exists \mathbf{x})\mathcal{Q}\mathbf{x}$	y	$(\exists \mathbf{x})(\mathcal{P}\ \&\ \mathcal{Q}\mathbf{x})$
$\mathcal{P}\ \&\ (\forall \mathbf{x})\mathcal{Q}\mathbf{x}$	y	$(\forall \mathbf{x})(\mathcal{P}\ \&\ \mathcal{Q}\mathbf{x})$

Disyunciones

$(\exists \mathbf{x})\mathcal{Q}\mathbf{x} \vee \mathcal{P}$	y	$(\exists \mathbf{x})(\mathcal{Q}\mathbf{x} \vee \mathcal{P})$
$(\forall \mathbf{x})\mathcal{Q}\mathbf{x} \vee \mathcal{P}$	y	$(\forall \mathbf{x})(\mathcal{Q}\mathbf{x} \vee \mathcal{P})$
$\mathcal{P} \vee (\exists \mathbf{x})\mathcal{Q}\mathbf{x}$	y	$(\exists \mathbf{x})(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}\mathbf{x})$
$\mathcal{P} \vee (\forall \mathbf{x})\mathcal{Q}\mathbf{x}$	y	$(\forall \mathbf{x})(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}\mathbf{x})$

Condicionales

$\mathcal{P} \supset (\exists \mathbf{x})\mathcal{Q}\mathbf{x}$	y	$(\exists \mathbf{x})(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}\mathbf{x})$
$\mathcal{P} \supset (\forall \mathbf{x})\mathcal{Q}\mathbf{x}$	y	$(\forall \mathbf{x})(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}\mathbf{x})$
$(\exists \mathbf{x})\mathcal{Q}\mathbf{x} \supset \mathcal{P}$	y	$(\forall \mathbf{x})(\mathcal{Q}\mathbf{x} \supset \mathcal{P})$
$(\forall \mathbf{x})\mathcal{Q}\mathbf{x} \supset \mathcal{P}$	y	$(\exists \mathbf{x})(\mathcal{Q}\mathbf{x} \supset \mathcal{P})$

Al igual que en los dos últimos casos del condicional, la extensión del rango de un cuantificador para que incluya una negación requiere de un cambio de cuantificador:

Negación

$\sim(\exists \mathbf{x})\mathcal{Q}$	y	$(\forall \mathbf{x})\sim\mathcal{Q}$
$\sim(\forall \mathbf{x})\mathcal{Q}$	y	$(\exists \mathbf{x})\sim\mathcal{Q}$

Las fórmulas bicondicionales son un caso especial. La estructura lógica $(\forall \mathbf{x})\mathcal{Q}\mathbf{x} \equiv \mathcal{P}$ no es equivalente ni a $(\forall \mathbf{x})(\mathcal{Q}\mathbf{x} \equiv \mathcal{P})$ ni a $(\exists \mathbf{x})(\mathcal{Q}\mathbf{x} \equiv \mathcal{P})$. Y ninguna de estas dos últimas estructuras es equivalente a $(\exists \mathbf{x})\mathcal{Q}\mathbf{x} \equiv \mathcal{P}$. En otras palabras, el rango de un cuantificador que no cubra ambos lados del bicondicional no puede ser extendido para que cubra toda la fórmula, y el rango de un cuantificador que cubra ambos lados del bicondicional no puede ser contraído. Para poder crear la forma prenexa de

Cap-6.pmd 196 13/07/07, 03:19 p.m.

una fórmula bicondicional, éste debe ser transformado en una fórmula lógicamente equivalente que no contenga un bicondicional.

Examinemos algunos ejemplos para entender cómo se debe crear la forma normal prenexa de una fórmula. Consideremos el siguiente caso:

(104) $(\forall z)(\sim(\exists y)Tzy \supset \sim Taz)$

El primer paso consiste en identificar los cuantificadores que estén antecedidos por una negación y extender su rango para que incluyan la negación. En la fórmula "$\sim(\exists y)Tzy$" el cuantificador no es el operador lógico principal, así que extendemos su rango y lo transformamos en un cuantificador universal: "$(\forall y)\sim Tzy$". Así, obtenemos:

(104a) $(\forall z)((\forall y)\sim Tzy \supset \sim Taz)$

En el segundo paso, extenderemos el rango del cuantificador de "*y*". Como el cuantificador ocurre en el antecedente de un condicional, para extender su rango debemos cambiarlo por un cuantificador existencial. Escribimos el cuantificador justo fuera del paréntesis que contiene el condicional; es decir, los cuantificadores que van siendo sacados se escriben después de los que ya están afuera:

(104b) $(\forall z)(\exists y)(\sim Tzy \supset \sim Taz)$

Esta fórmula es la forma normal prenexa de la fórmula **(104)**.

La siguiente fórmula es muy sencilla, pero la generación de su forma normal prenexa no lo es:

(105) $(\exists x)Rx \ \& \ (\forall x)Nax$

La dificultad reside en que no podemos extender el rango de ninguno de los dos cuantificadores porque la expresión resultante no sería una fórmula de *LC*. Se generaría una expresión con dos cuantificadores de "*x*" con rangos superpuestos. La solución reside en cambiar una de las dos variables. Como el rango de cada variable es independiente y ambas son variables ligadas, es indiferente cuál variable utilicemos en cada una de las fórmulas. Cambiaremos todas las "*x*" de la fórmula "$(\forall x)Nax$" por "*y*":

(105a) $(\exists x)Rx \ \& \ (\forall y)Nay$

Tras cambiar las variables, podemos extender el rango de sus cuantificadores:

(105b) $(\exists x)(Rx \ \& \ (\forall y)Nay)$

(105c) $(\exists x)(\forall y)(Rx \ \& \ Nay)$

Esta última fórmula es la forma normal prenexa de la fórmula **(105)**.

Consideremos ahora un caso más complejo:

(106) $\sim(\forall x)(\exists y)[\sim(\forall z)\sim Txyz \supset (\exists w)(Hwx \ \& \ Hxc)]$

De nuevo comenzamos con las negaciones de los cuantificadores, extendiendo simultáneamente el rango de los cuantificadores de "*x*" y "*z*":

(106a) $(\exists x)\sim(\exists y)[(\exists z)\sim\sim Txyz \supset (\exists w)(Hwx \ \& \ Hxc)]$

Como uno de los cuantificadores todavía está antecedido por una negación, repetimos el mismo procedimiento:

(106b) $(\exists x)(\forall y)\sim[(\exists z)\sim\sim Txyz \supset (\exists w)(Hwx \ \& \ Hxc)]$

En este punto podemos escoger entre extender el rango del cuantificador de "*z*" o el de "*w*". El orden es indiferente. Comenzaremos con "*z*". El cuantificador se debe escribir justo fuera del paréntesis que contiene el condicional, es decir, después de la negación. Como el cuantificador de "*z*" está en el antecedente del condicional, se debe cambiar por un cuantificador universal:

(106c) $(\exists x)(\forall y)\sim(\forall z)[\sim\sim Txyz \supset (\exists w)(Hwx \ \& \ Hxc)]$

Una vez más, movemos la negación hacia adentro:

(106d) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)\sim[\sim\sim Txyz \supset (\exists w)(Hwx \ \& \ Hxc)]$

Finalmente, repetimos los dos últimos pasos con el cuantificador de "*w*":

(106e) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)\sim(\exists w)[\sim\sim Txyz \supset (Hwx \ \& \ Hxc)]$

(106f) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)\sim[\sim\sim Txyz \supset (Hwx \ \& \ Hxc)]$

La fórmula **(106f)** es la forma normal prenexa de la fórmula **(106)**.

Finalmente, examinaremos una fórmula bicondicional:

(107) $(\forall x)Kx \equiv Na$

Como vimos antes, $(\forall \mathbf{x})\mathbf{Qx} \equiv \mathcal{P}$ no es equivalente ni a $(\forall \mathbf{x})(\mathcal{Q}\mathbf{x} \equiv \mathcal{P})$ ni a $(\exists \mathbf{x})(\mathcal{Q}\mathbf{x} \equiv \mathcal{P})$, así que la transformación de la fórmula requiere varios pasos. Inicialmente, transformaremos el bicondicional en la conjunción de dos condicionales, que es una fórmula lógicamente equivalente:

(107a) $((\forall x)Kx \supset Na) \ \& \ (Na \supset (\forall x)Kx)$

Ahora extendemos el rango de los cuantificadores en cada condicional:

(107b) $(\exists x)(Kx \supset Na) \ \& \ (\forall x)(Na \supset Kx)$

Cap-6.pmd 198 13/07/07, 03:19 p.m.

Al igual que en el ejemplo **(105)**, aquí tampoco podemos extender el rango de ninguno de los dos cuantificadores porque la expresión resultante no sería una fórmula de *LC*. La solución nuevamente consiste en cambiar una de las variables. Cambiaremos todas las "*x*" de la fórmula de la derecha por "*y*":

(107c) $(\exists x)(\mathrm{K}x \supset \mathrm{Na})\ \&\ (\forall y)(\mathrm{Na} \supset \mathrm{K}y)$

Los dos pasos finales son obvios:

(107d) $(\exists x)[(\mathrm{K}x \supset \mathrm{Na})\ \&\ (\forall y)(\mathrm{Na} \supset \mathrm{K}y)]$

(107e) $(\exists x)(\forall y)[(\mathrm{K}x \supset \mathrm{Na})\ \&\ (\mathrm{Na} \supset \mathrm{K}y)]$

Ésta es la forma normal prenexa de la fórmula bicondicional **(107)**. Otra forma de llevar a cabo esta transformación es reemplazando el bicondicional "$(\forall x)\mathrm{K}x \equiv \mathrm{Na}$" por la fórmula equivalente "$((\forall x)\mathrm{K}x\ \&\ \mathrm{Na}) \vee (\sim(\forall x)\mathrm{K}x\ \&\ \sim\mathrm{Na})$". La forma normal prenexa resultante es diferente a la **(107e)**, pero lógicamente equivalente a ella.

En general, la generación de la forma normal prenexa de una fórmula de *LC* debe hacerse en los siguientes pasos, los cuales resumen las estrategias que hemos utilizado en los ejemplos anteriores:

Paso 1
Transformar cualquier fórmula bicondicional en una fórmula equivalente en la que no aparezca el bicondicional.

Paso 2
Identificar los cuantificadores que estén antecedidos por una negación y extender su rango para que incluyan la negación. Repetir este paso hasta que ningún cuantificador esté negado y en caso de que surja una nueva negación de un cuantificador.

Paso 3
Si fuere necesario, cambiar las variables ligadas para que no se generen expresiones en las cuales los cuantificadores tengan rangos superpuestos.

Paso 4
Extender el rango de los cuantificadores de acuerdo con las equivalencias establecidas anteriormente para las conjunciones, disyunciones y fórmulas condicionales.

Ejercicio 6.7

Construya la forma normal prenexa de las siguientes fórmulas.

1. $(\exists x)\mathrm{G}x \supset (\exists z)\mathrm{M}z\mathrm{a}$
2. $(\forall w)\mathrm{S}w \vee (\exists z)(\mathrm{T}z \ \& \ \mathrm{Mb})$
3. $\sim(\forall x)\mathrm{Db}x \vee (\exists y)\mathrm{Db}y$
4. $\sim(\forall x)\mathrm{Db}x \vee (\exists x)\mathrm{Db}x$
5. $(\forall x)((\forall y)\mathrm{C}xy \supset (\exists w)\mathrm{C}wx)$
6. $(\forall x)(\mathrm{F}x \equiv (\exists y)\mathrm{G}y)$
7. $\mathrm{Pa} \supset [(\forall x)\mathrm{D}x \supset (\exists y)(\mathrm{A}y \vee (\exists z)\mathrm{P}z)]$
8. $(\mathrm{Mc} \ \& \ (\exists x)\mathrm{F}x\mathrm{d}) \supset \sim(\forall y)(\exists w)(\mathrm{P}yw \vee \sim(\forall z)\mathrm{P}yz)$

6.8 Lógica cuantificada con identidad

Cada vez que hemos encontrado la palabra “algunos” en un enunciado en español, la hemos parafraseado como “hay al menos un” y la hemos simbolizado utilizando un cuantificador existencial. Hay casos, sin embargo, en que dicha lectura de la palabra “algunos” no corresponde a su sentido original. Por ejemplo, si decimos:

(108) Hay algunos mangos sobre la mesa del comedor.

generalmente entendemos que hay más de un mango, no que hay al menos uno. Para poder simbolizar un enunciado más cercano a lo que queremos decir, por ejemplo:

(109) Hay al menos dos mangos sobre la mesa del comedor.

necesitamos ampliar el lenguaje *LC* que hemos venido utilizando. Consideremos lo que sucede si intentamos simbolizar este último enunciado utilizando dos cuantificadores existenciales de acuerdo con la siguiente guía de simbolización:

UD: Todo

Ex: x está sobre la mesa del comedor
Mx: x es un mango

Lo que queremos decir es que hay dos elementos del UD que son mangos y que están sobre la mesa del comedor. La siguiente fórmula aparentemente expresa esa idea:

(109a) $(\exists x)(\exists y)[(\mathrm{M}x \ \& \ \mathrm{M}y) \ \& \ (\mathrm{E}x \ \& \ \mathrm{E}y)]$

El problema es que el hecho de utilizar variables diferentes no implica que estemos hablando de dos cosas diferentes. El enunciado en realidad está diciendo que hay al

Cap-6.pmd 200 13/07/07, 03:19 p.m.

menos un mango sobre la mesa del comedor, pero lo dice dos veces. Lo que hace falta para poder afirmar que hay dos objetos con las mismas propiedades es un predicado que nos indique que los dos objetos no son idénticos, es decir, que no son el mismo objeto. El siguiente predicado logra ese cometido:

I*xy*: *x* es idéntico a *y*

Si añadimos a la fórmula anterior la salvedad de que *x* no es idéntico a *y*, lograremos expresar la idea de que hay al menos dos mangos sobre la mesa del comedor:

(109b) $(\exists x)(\exists y)([(\mathrm{M}x \ \& \ \mathrm{M}y) \ \& \ (\mathrm{E}x \ \& \ \mathrm{E}y)] \ \& \ {\sim}\mathrm{I}xy)$

En vez de utilizar uno de los predicados de *LC* para expresar la relación de identidad, introduciremos un predicado especial que siempre debe ser interpretado de la misma manera, y que por ende se convierte en un operador lógico. Al añadir este nuevo operador, generamos una extensión del lenguaje *LC* a la que llamaremos *LCI*: *Lógica Cuantificada con Identidad*. El vocabulario de *LCI* es idéntico al de *LC*, excepto que *LCI* contiene el símbolo "=". Al añadir el predicado de identidad a nuestro lenguaje lógico, necesitamos modificar la definición de una fórmula atómica. La nueva definición es:

> ***Fórmula atómica de LCI***: Toda expresión de *LCI* que sea una letra proposicional, un predicado de *LCI* de grado *n* seguido de *n* términos individuales de *LCI* o el símbolo "=" seguido de dos términos individuales es una fórmula atómica de *LCI*.

Las reglas de formación son las mismas que las de *LC*. Formalmente, una fórmula atómica que contenga el predicado de identidad consiste del predicado seguido de dos términos individuales, por ejemplo, "=*x*b". Para facilitar la lectura del predicado, informalmente escribiremos el signo "=" entre los dos términos. Así, "=*x*b" se convierte en "x = b"; y en lugar de "~=*x*b", escribiremos "~(x = b)".

Usando este nuevo operador, podemos simbolizar el enunciado **(109)** en *LCI* de la siguiente manera:

(109c) $(\exists x)(\exists y)([(\mathrm{M}x \ \& \ \mathrm{M}y) \ \& \ (\mathrm{E}x \ \& \ \mathrm{E}y)] \ \& \ {\sim}(x = y))$

En *LCI* es posible afirmar, no sólo que hay al menos un número determinado de objetos, sino también que hay exactamente un número determinado de objetos. Ya consideramos la simbolización de "Hay <u>al menos dos</u> mangos sobre la mesa del comedor". Ahora simbolizaremos el enunciado:

(110) Hay <u>exactamente dos</u> mangos sobre la mesa del comedor.

La fórmula debe afirmar, en primer lugar, que hay *al menos dos* mangos sobre la mesa, y agregar que cualquier otra cosa que sea mango y que esté sobre la mesa, es idéntica a uno de los dos mangos que ya han sido mencionados:

(110a) $(\exists x)(\exists y)[([(Mx \ \& \ My) \ \& \ (Ex \ \& \ Ey)] \ \& \ {\sim}(x = y)) \ \&$
$(\forall z)((Mz \ \& \ Ez) \supset (z = x \lor z = y))]$

Consideremos ahora el enunciado:

(111) Hay mangos y papayas sobre la mesa del comedor.

suponiendo que "P*x*" es "*x* es una papaya", la simbolización correcta es:

(111a) $(\exists x)(\exists y)[(Mx \ \& \ Py) \ \& \ (Ex \ \& \ Ey)]$

Como estamos hablando de dos cosas con propiedades diferentes, no hace falta usar el predicado de identidad.

Para simbolizar el enunciado:

(112) La única papaya sobre la mesa del comedor está madura.

debemos dividir el análisis en dos partes. Suponiendo que "A*x*" es "*x* está madura", primero debemos afirmar que hay al menos una papaya madura sobre la mesa del comedor. Después debemos agregar que cualquier otra cosa que sea una papaya y que esté sobre la mesa del comedor, es idéntica a la papaya que ya hemos mencionado:

(112a) $(\exists x)([(Px \ \& \ Ex) \ \& \ Ax] \ \& \ (\forall y)((Py \ \& \ Ey) \supset y = x))$

Sería incorrecto agregar sólo la fórmula "$(\forall y)(Py \supset y = x)$", pues esto haría de la papaya madura sobre la mesa la única papaya en el universo. También sería incorrecto agregar al antecedente de "$(\forall y)((Py \ \& \ Ey) \supset y = x)$" la fórmula "A*y*". Al hacerlo, estaríamos diciendo que cualquier otra papaya madura sobre la mesa es idéntica a la papaya ya mencionada, pero no excluiríamos la posibilidad de que haya otras papayas en la mesa que no estén maduras. La fórmula resultante:

(112b) $(\exists x)([(Px \ \& \ Ex) \ \& \ Ax] \ \& \ (\forall y)([(Py \ \& \ Ey) \ \& \ Ay] \supset y = x))$

corresponde, más bien, al enunciado:

(113) Sólo hay una papaya madura sobre la mesa del comedor.

El siguiente enunciado debe ser analizado con cuidado:

(114) No hay más de dos papayas sobre la mesa del comedor.

Cap-6.pmd 202 13/07/07, 03:19 p.m.

El enunciado no afirma que haya exactamente dos papayas sobre la mesa, tan sólo que no puede haber más de dos. El enunciado sería verdadero así no hubiera ninguna papaya sobre la mesa. Por esta razón no podemos hacer una afirmación existencial al simbolizar el enunciado. Lo que queremos decir es que si consideramos más de dos elementos del UD que cumplan la condición de ser papayas y de estar sobre la mesa, el tercer elemento deberá ser idéntico al menos a alguno de los otros dos.

(114a) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[([(\mathrm{P}x \ \& \ \mathrm{P}y) \ \& \ \mathrm{P}z] \ \& \ [(\mathrm{E}x \ \& \ \mathrm{E}y) \ \& \ \mathrm{E}z]) \supset ((x = y \vee x = z) \vee y = z)]$

Consideraremos ahora el enunciado:

(115) Hay al menos tres mangos sobre la mesa del comedor.

Para simbolizar este enunciado debemos utilizar tres cuantificadores existenciales, y especificar que cada variable cuantificada representa un individuo diferente del UD:

(115a) $(\exists x)(\exists y)(\exists z)[([(\mathrm{M}x \ \& \ \mathrm{M}y) \ \& \ \mathrm{M}z] \ \& \ [(\mathrm{E}x \ \& \ \mathrm{E}y) \ \& \ \mathrm{E}z]) \ \& \ ([\sim(x = y) \ \& \ \sim(y = z)] \ \& \ \sim(x = z))]$

La simbolización de cualquier enunciado que afirme la existencia de *n* objetos deberá hacer uso de *n* cuantificadores existenciales, pero la estructura de la fórmula será similar a la de la fórmula **(115a)**.

El predicado de identidad también nos permite simbolizar de una manera más adecuada enunciados universalmente cuantificados en los cuales queremos excluir a uno de los elementos del universo del discurso. Consideremos, por ejemplo, el siguiente enunciado:

(116) Óscar le debe dinero a todo el mundo.

La siguiente simbolización no es adecuada:

(116a) $(\forall x)\mathrm{Do}x$

Según esta fórmula, Óscar se debe dinero a sí mismo. Para poder expresar la idea de que les debe dinero a todos *los demás*, debemos usar el predicado de identidad:

(116b) $(\forall x)(\sim(x = \mathrm{o}) \supset \mathrm{Do}x)$

A continuación consideraremos una serie de ejemplos utilizando la siguiente guía de simbolización. Escribiremos primero el enunciado seguido de su paráfrasis y de su simbolización en *LCI*.

Cap-6.pmd 203 13/07/07, 03:19 p.m.

UD:	Ciudades colombianas		
$Exyz$:	x está entre y y z	a:	Cartagena
Mxy:	x tiene más habitantes que y	b:	Bogotá
Sxy:	x está a mayor altura que y	c:	Cali
Px:	x es un puerto	d:	Medellín
Cx:	x está sobre el Pacífico	e:	Buenaventura

(117) Sólo hay una ciudad a mayor altura que Bogotá.

Hay al menos una ciudad a mayor altura que Bogotá, y cualquier otra ciudad que esté a mayor altura que Bogotá es idéntica a esa ciudad.

$(\exists x)[Sxb \ \& \ (\forall y)(Syb \supset y = x)]$

(118) Buenaventura es el único puerto sobre el Pacífico.

Buenaventura es un puerto sobre el Pacífico, y cualquier ciudad colombiana que sea un puerto sobre el Pacífico es idéntica a Buenaventura.

$(Pe \ \& \ Ce) \ \& \ (\forall x)[(Px \ \& \ Cx) \supset x = e)]$

(119) Hay exactamente tres ciudades entre Cali y Medellín.

Existen al menos tres ciudades entre Cali y Medellín, y cualquier otra ciudad que esté entre Calí y Medellín es idéntica a alguna de las tres.

$(\exists x)(\exists y)(\exists z)([[Excd \ \& \ (Eycd \ \& \ Ezcd)] \ \& \ ([\sim(x = y) \ \& \ \sim(y = z)] \ \& \ \sim(x = z))] \ \& \ (\forall w)(Ewcd \supset [w = x \vee (w = y \vee w = z)]))$

(110) Sólo hay un puerto que tiene más habitantes que Cartagena.

Existe una ciudad que es puerto y que tiene más habitantes que Cartagena, y cualquier otra ciudad que sea puerto y que tenga más habitantes que Cartagena es idéntica a esa ciudad.

$(\exists x)[(Px \ \& \ Mxc) \ \& \ (\forall y)((Py \ \& \ Mxc) \supset y = x)]$

Antes de concluir esta sección sobre el predicado de identidad es interesante anotar que la introducción de este predicado finalmente nos permite expresar en términos formales los dos sentidos del verbo "ser" en el lenguaje natural. Consideremos los siguientes dos enunciados:

(121) Aristóteles <u>es</u> sabio.

(122) Muhammad Ali <u>es</u> Cassius Clay.

En el primer enunciado, la palabra “es” tiene una función *predicativa* o *copulativa*, y no cumple un papel importante desde un punto de vista lógico. Hace parte integral del predicado “*x* es sabio” y no se requiere un símbolo especial para ella. Así, la simbolización correcta del enunciado **(121)** es:

(121a) Sa

En el segundo enunciado, la palabra “es” tiene el sentido de la identidad y es simbolizada usando el símbolo “=”. La siguiente fórmula es una simbolización adecuada del enunciado:

(122a) m = c

En español, el verbo “haber” nos permite expresar un tercer sentido del concepto de ser, el sentido existencial:

(123) <u>Hay</u> mamíferos que vuelan.

El cuantificador existencial nos permite afirmar formalmente la existencia de algo:

(123a) $(\exists x)(Mx \;\&\; Vx)$

Armados con estas herramientas sintácticas, estamos mejor preparados para enfrentar la simbolización de una buena parte de los enunciados del español.

Ejercicio 6.8

A. Utilice la siguiente guía para simbolizar los siguientes enunciados en *LCI*:

UD: Tripulantes de un submarino

R*x*:	*x* es ruso	N*x*:	*x* sabe nadar
P*x*:	*x* es polaco	A*xy*:	*x* es amante de la hija de y
M*x*:	*x* es un marinero	C*xy*:	*x* tiene celos de y
O*x*:	*x* es un oficial	a:	Alexander
T*x*:	*x* es experto en torpedos	i:	Igor
I*x*:	*x* maneja el periscopio	v:	Vladimir

1. Todos los marineros, excepto Alexander, son rusos.
2. Todos los marineros, excepto Vladimir, saben nadar.
3. Alexander es el único marinero que tiene celos de Igor.
4. Vladimir es el único oficial experto en torpedos.
5. Hay exactamente dos oficiales polacos que saben nadar.
6. Todos los oficiales, excepto Alexander, han sido amantes de la hija de Vladimir.

7. Vladimir sólo tiene celos de los marineros polacos.
8. Vladimir tiene celos de al menos dos oficiales rusos.
9. El único amante de la hija de Vladimir es el único que tiene celos de Igor.
10. Algún oficial ruso es el único amante de la hija de un oficial polaco que no sabe nadar.

B. Utilice la siguiente guía para simbolizar los siguientes enunciados en *LCI*:

UD: Los números enteros positivos

E*xyz*:	*x* está entre *y* y *z*	a:	2
M*xy*:	*x* es menor que *y*	b:	4
S*xy*:	*x* es el sucesor de *y*	c:	9
P*x*:	*x* es par		
R*x*:	*x* es primo		

1. Hay un único número entero positivo menor que todos los demás.
2. Cada número entero positivo tiene exactamente un sucesor.
3. 2 es el único número primo par.
4. Hay exactamente dos números primos entre 4 y 9.
5. Hay al menos tres números primos entre 2 y 9.
6. 2 es el único primo cuyo sucesor es primo.

6.9 Descripciones definidas

Al comienzo de este capítulo señalamos que existen dos clases de términos singulares en cualquier lenguaje natural: los nombres propios y las descripciones definidas. Sin embargo, sólo los nombres propios se simbolizan en *LC* utilizando constantes. Si redujéramos una descripción definida a una constante, estaríamos ignorando la información contenida en la descripción, y en algunos casos este procedimiento puede conducir a errores. Tomemos, por ejemplo, el siguiente argumento:

(124) El etíope que ganó la maratón de Boston también ganó la maratón de Nueva York. Por lo tanto, hay una persona que ha ganado las maratones de Boston y Nueva York.

Es obvio que este argumente es válido, pero su simbolización en *LC* no lo es. Si tratamos la descripción "el etíope que ganó la maratón de Boston" como una unidad inanalizable, obtenemos:

Cap-6.pmd 206 13/07/07, 03:19 p.m.

UD:	Todo
G*xy*:	*x* ganó *y*
e:	el etíope que ganó la maratón de Boston
b:	la maratón de Boston
n:	la maratón de Nueva York

(124a) $\dfrac{\text{Gen}}{(\exists x)(\mathrm{G}x\mathrm{b} \;\&\; \mathrm{G}x\mathrm{n})}$

El argumento es inválido porque la premisa sólo nos dice que la persona designada con la constante "e" ganó la maratón de Nueva York, mientras que la conclusión añade que también ganó la maratón de Boston.

La solución al problema es analizar el contenido de la descripción definida para que haga parte del argumento. Toda descripción definida tiene al menos un término general y por lo tanto puede ser analizada en términos de predicados. Consideremos la descripción definida del argumento anterior:

(125) el etíope que ganó la maratón de Boston

La descripción contiene los predicados: "*x* es etíope" y "*x* ganó la maratón de Boston". Podemos parafrasear la descripción de la siguiente manera:

(125a) <u>el</u> *x* tal que *x* es etíope <u>y</u> tal que *x* ganó la maratón de Boston

En *Principia Mathematica*, Whitehead y Russell (1910-1913) simbolizaron la frase "el *x* tal que …" utilizando un operador conocido como el operador iota (℩). El operador se escribe entre paréntesis junto con la variable, y se antepone a la conjunción de los predicados presentes en la descripción. Si simbolizamos "*x* es etíope" como "E*x*", podemos simbolizar la descripción definida **(125)** de la siguiente manera:

(125b) $(\text{℩}x)(\mathrm{E}x \;\&\; \mathrm{G}x\mathrm{b})$

El operador iota no es un cuantificador. Al anteponerlo a las funciones proposicionales no se genera una fórmula con un valor de verdad. El operador iota genera, más bien, una expresión análoga a una constante. Por ejemplo, podemos simbolizar el enunciado:

(126) Beijing es la capital de la República Popular China

de la siguiente manera:

(126a) $\mathrm{b} = (\text{℩}x)\mathrm{C}x\mathrm{c}$

Cap-6.pmd 207 13/07/07, 03:19 p.m.

Ahora consideremos el enunciado:

(127) Platón es sabio.

Si describimos a Platón como "el autor del *Fedón*", podemos simbolizar el enunciado reemplazando el nombre propio por la descripción definida con la ayuda del operador iota:

(127a) $S(\iota x)Axf$

A pesar de que las expresiones formadas con el operador iota se comportan como constantes, existe una diferencia fundamental entre ellas. Cuando utilizamos una constante siempre presuponemos que hay un contexto en el cual la constante denota algún objeto en particular. En otras palabras, no está permitido utilizar constantes sin denotación porque una constante es el nombre de un objeto del UD. Pero como es perfectamente posible describir cosas que no existen, debemos considerar qué ocurre cuando una descripción definida carece de denotación. Tomemos, por ejemplo, un enunciado que Bertrand Russell (1905) hizo famoso:

(128) El actual rey de Francia es calvo.

La simbolización de este enunciado utilizando el operador iota es:

(128a) $C(\iota x)Rx$

Como Francia no es una monarquía, nos vemos en el aprieto de estar haciendo una afirmación acerca de algo que no existe. ¿Es verdadera o falsa esta afirmación? ¿Podemos realmente darle un valor de verdad? El filósofo Peter Strawson (1950) ha argüido que si una descripción carece de denotación, cualquier enunciado en el que aparezca carece de valor de verdad. Según Strawson, el enunciado sólo tiene valor de verdad si también es verdad que:

(129) Hay exactamente un individuo que es actualmente el rey de Francia.

En símbolos:

(129a) $(\exists x)([Rx \ \& \ (\forall y)(Ry \supset y = x)]$

Como **(129)** es falso, según Strawson no tiene sentido preguntar por el valor de verdad del enunciado **(128)**.

Aunque la propuesta de Strawson es intuitivamente plausible, genera un problema más grave que el que intenta solucionar. Como veremos en el próximo capítulo, en la lógica clásica las definiciones semánticas de validez, consistencia, equivalencia, etc. requieren que *todas* las fórmulas tengan un valor de verdad bajo cualquier interpretación. Este requisito es violado en la propuesta de Strawson porque cualquier simbolización en *LCI* del enunciado **(128)** carecería de valor de verdad. Aunque no es imposible redefinir estas nociones semánticas para acomodar la propuesta de Strawson, el resultado sería una reformulación total de la lógica moderna. Semejante empresa estaría justificada si no existiera una alternativa mejor para solucionar el problema generado por el enunciado **(128)**, una alternativa en la cual todas las fórmulas tengan un valor de verdad bajo cualquier interpretación, y en la que se les haga justicia a nuestras intuiciones acerca de las inferencias que se pueden llevar a cabo utilizando enunciados que contengan descripciones definidas.

La alternativa a la que me refiero es la famosa teoría de las descripciones de Bertrand Russell. Según la propuesta de Russell, la descripción definida "el actual rey de Francia" no *presupone* el enunciado **(129)** sino que lo *afirma* implícitamente en el contexto del enunciado **(128)**. Es decir, el enunciado **(129)** hace parte de las condiciones de verdad del enunciado **(128)**. Según Russell, el enunciado **(128)** será verdadero si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Existe al menos un individuo que es actualmente el rey de Francia.
2. Existe máximo un individuo que es actualmente el rey de Francia.
3. Ese individuo es calvo.

Simbólicamente:

(128b) $(\exists x)([\mathrm{R}x \ \& \ (\forall y)(\mathrm{R}y \supset y = x)] \ \& \ \mathrm{C}x)$

Como la primera conjunción es falsa, el enunciado **(128)** es falso, y no carente de valor de verdad.

Así, en la teoría de las descripciones de Russell cualquier descripción definida que haya sido simbolizada inicialmente con el operador iota es incorporada a la simbolización completa del enunciado. Russell describe este procedimiento como la *eliminación contextual* de las descripciones definidas. En consecuencia, el operador iota es formalmente innecesario, aunque puede utilizarse simplemente como una forma de expresar de manera corta y simplificada fórmulas de *LCI*.

Hay un problema adicional que aqueja a los enunciados que contienen descripciones definidas, a saber, que su negación es ambigua. Consideremos, por ejemplo, la negación del enunciado **(128)**:

(130) No es cierto que el actual rey de Francia sea calvo.

El enunciado es ambiguo porque no es claro qué es lo que se está negando. El enunciado podría estar haciendo una de las siguientes dos afirmaciones:

1. La descripción no designa ningún individuo.
2. La descripción designa algún individuo pero el individuo no posee la propiedad en cuestión.

Sólo cuando el enunciado es simbolizado de acuerdo con la teoría de las descripciones de Russell se elimina la ambigüedad del enunciado original. Las dos posibles interpretaciones corresponden a las siguientes simbolizaciones:

(130a) $\sim(\exists x)([\mathrm{R}x \ \& \ (\forall y)(\mathrm{R}y \supset y = x)] \ \& \ \mathrm{C}x)$

(130b) $(\exists x)([\mathrm{R}x \ \& \ (\forall y)(\mathrm{R}y \supset y = x)] \ \& \ \sim\mathrm{C}x)$

La primera fórmula es *verdadera*, pues no existe un individuo que sea el actual rey de Francia. La segunda fórmula es *falsa* por la misma razón. Según Russell, la ambigüedad del enunciado original reside en que en el primer caso la descripción definida tiene una ocurrencia secundaria y un rango amplio, y en el segundo, una ocurrencia primaria y un rango estrecho. Una descripción tiene ocurrencia primaria cuando una de las condiciones de verdad del enunciado en el que ocurre es que el individuo descrito exista; tiene ocurrencia secundaria cuando el enunciado puede ser verdadero así no exista el individuo descrito.

La mayoría de los lógicos contemporáneos considera que la ambigüedad del enunciado original no es generada por el rango de las descripciones sino por el rango de la negación. En la fórmula **(130a)**, la negación tiene un rango amplio y es el operador lógico principal, mientras que en la fórmula **(130b)** tiene un rango estrecho y sólo niega la fórmula correspondiente al predicado gramatical del enunciado original.

Utilizando la teoría de Russell podemos regresar finalmente al argumento con el que comenzamos esta sección. Consideremos la premisa del argumento:

(131) El etíope que ganó la maratón de Boston también ganó la maratón de Nueva York.

Podemos parafrasear esta premisa de la siguiente manera:

(131a) Hay un *x* tal que (i) *x* es etíope y *x* ganó la maratón de Boston, (ii) cualquier *y* que sea etíope y que haya ganado la maratón de Boston es idéntico a *x*, y (iii) *x* ganó la maratón de Nueva York.

Finalmente, su simbolización en *LCI*:

(131b) $(\exists x)[((\mathrm{E}x \ \& \ \mathrm{G}x\mathrm{b}) \ \& \ (\forall y)((\mathrm{E}y \ \& \ \mathrm{G}y\mathrm{b}) \supset y = x)) \ \& \ \mathrm{G}x\mathrm{n}]$

En capítulos posteriores veremos que el argumento resultante es lógicamente válido:

(124b)
$$\frac{(\exists x)[((\mathrm{E}x \ \& \ \mathrm{G}x\mathrm{b}) \ \& \ (\forall y)((\mathrm{E}y \ \& \ \mathrm{G}y\mathrm{b}) \supset y = x)] \ \& \ \mathrm{G}x\mathrm{n}]}{(\exists x)(\mathrm{G}x\mathrm{b} \ \& \ \mathrm{G}x\mathrm{n})}$$

Cap-6.pmd 210 13/07/07, 03:19 p.m.

Ejercicio 6.9

Establezca una guía de simbolización y simbolice en *LCI* cada uno de los siguientes enunciados.

1. Andrés Páez de Sotomayor es el fundador de Bucaramanga.
2. Berlín es la capital de Alemania.
3. El autor de la *Crítica de la Razón Pura* nació en Prusia Oriental.
4. El hombre más rico de México no es un gran filántropo.
5. El actual emperador de Colombia usa gafas.
6. La raíz cúbica de 9 es mayor que 2.
7. El producto de 8 y 2 es el cuadrado de 4.
8. El inventor del bombillo era un hombre distraído y olvidadizo.
9. El personaje principal de *Taxi Driver* es un taxista psicópata.
10. Los únicos que recibirán un aumento son el contador y el gerente.

Cap-6.pmd 211 13/07/07, 03:19 p.m.

7. Semántica del lenguaje *LC*

Las tablas y los árboles de verdad que estudiamos en los capítulos 3 y 4 son dos métodos de prueba muy sencillos que nos permiten determinar las propiedades semánticas de fórmulas, conjuntos y argumentos de *LP*. Como veremos en este capítulo, la semántica de la lógica cuantificada es mucho más compleja que la de la lógica proposicional. Hay dos razones fundamentales para explicar la complejidad de la semántica de *LC*. En primer lugar, en *LC* no es posible asignar valores de verdad directamente a las fórmulas atómicas. El valor de verdad de una fórmula atómica como "Ga" sólo puede ser determinado una vez sepamos qué propiedad y qué objeto están siendo representados por "G" y por "a". Adicionalmente, el valor de verdad de una fórmula cuantificada como "$(\forall x)\mathrm{G}x$" depende del universo del discurso que estemos considerando. En otras palabras, es necesario *interpretar* el contenido y el contexto de la fórmula antes de poder asignarle un valor de verdad.

La segunda razón que explica la complejidad de la semántica de *LC* es que, a diferencia de *LP*, no existe un *algoritmo* o *procedimiento mecánico de decisión* para determinar las propiedades semánticas de todas las fórmulas, conjuntos y argumentos de *LC*. Un procedimiento de decisión es mecánico si y sólo si es una secuencia finita de operaciones en la que cada paso está determinado por una regla y cuya ejecución da una solución única a un problema o una respuesta inequívoca a una pregunta. Las tablas y los árboles de verdad de *LP* son procedimientos mecánicos de decisión, y las propiedades semánticas de *LP* son *propiedades decidibles*. Church (1936) y Turing (1936) demostraron que ningún sistema lógico en el que sea posible expresar las verdades básicas de las matemáticas y la física puede ser un sistema decidible. Así, lo que se gana en expresividad en *LC* se pierde en decidibilidad. Esto no quiere decir que no podamos determinar el valor de verdad de una gran cantidad de fórmulas de *LC*. De hecho, Löwenheim (1915) demostró que existe un procedimiento mecánico de decisión para determinar las propiedades semánticas de cualquier fórmula que sólo contenga predicados monádicos. Pero no hay ni puede haber un procedimiento mecánico de decisión para determinar las propiedades semánticas de *todas* las fórmulas de *LC*.

Cap-7.pmd 212 13/07/07, 03:21 p.m.

7.1 La valuación e interpretación de las fórmulas de *LC*

En la lógica proposicional, una valuación de *LP* es la asignación de un valor de verdad, **V** o **F,** a cada una de las fórmulas atómicas en el lenguaje. Además de asignarles un valor de verdad a través de una valuación, la semántica de *LP* también interpreta las fórmulas atómicas para que representen enunciados en español. De esta manera, el lenguaje *LP* puede ser usado para modelar o representar situaciones concretas. En la lógica cuantificada ocurre algo semejante, pero el proceso es un poco más complejo. Una valuación de *LC* no puede asignarle directamente a las fórmulas un valor de verdad porque todas las fórmulas, excepto las letras proposicionales, son estructuras compuestas. Una valuación de *LC* debe especificar primero:

1. El ***universo del discurso*** o ***dominio*** sobre el que rigen las variables.
2. La ***extensión*** de los predicados y constantes.

Como veremos en la sección 7.1.4, una valuación se puede llevar a cabo de manera completamente abstracta, sin hacer referencia a ningún contexto específico. Pero como nuestra intención es utilizar los recursos de la lógica cuantificada para modelar situaciones concretas, es necesario *interpretar* la valuación, es decir, se deben asociar los predicados y constantes de *LC* con propiedades, relaciones y nombres propios expresados en español. El resultado es una ***interpretación*** de *LC*. Las guías de simbolización que utilizamos en el capítulo anterior son ejemplos de interpretaciones de *LC*, aunque son sólo fragmentos de interpretaciones, pues indican únicamente la extensión de los predicados y constantes presentes en una fórmula específica. En esta sección estudiaremos en más detalle en qué consiste la valuación y la interpretación de las fórmulas de *LC*. Comenzaremos con el universo del discurso o dominio.

7.1.1 *El UD*

El dominio o universo del discurso (UD) de una interpretación debe ser entendido como un *conjunto* de objetos. Los objetos que hacen parte del UD no están limitados a los objetos físicos. Pueden ser eventos, números, lugares y cualquier otra cosa que pueda ser el sujeto de un enunciado. El UD generalmente se especifica indicando en español cuál es el conjunto de objetos al que nos queremos referir, por ejemplo:

UD: Personas

Podemos especificar el mismo conjunto utilizando la notación de la teoría de conjuntos:

UD: $\{x \mid x \text{ es una persona}\}$

Esta expresión se lee: “el conjunto de todos los *x* tales que *x* es una persona”.

Cuando el UD no es muy grande, también es posible especificarlo listando todos sus elementos. Por ejemplo, en vez de decir que el UD está compuesto por los ganadores del premio Schock en lógica y filosofía[1], podemos escribir:

UD: {Quine, Dummett, Scott, Rawls, Kripke, Feferman, Hintikka}

El orden en que se listen los elementos es indiferente. El conjunto {Quine, Kripke, Hintikka} es el mismo conjunto que {Hintikka, Quine, Kripke}. Por otra parte, el conjunto también es indiferente a las repeticiones. Por ejemplo, el conjunto {Quine, Kripke, Hintikka} es el mismo conjunto que {Quine, Kripke, Hintikka, Quine, Hintikka}.

La propiedad más importante del UD es el número de objetos que contiene, pues éste determina la complejidad de las interpretaciones que se pueden construir de una fórmula. Existe un límite inferior: el UD siempre debe contener al menos un elemento[2]; pero no existe un límite superior: el UD puede ser un conjunto infinito. Si el UD es infinito, puede ser un conjunto enumerable o un conjunto no enumerable. Un conjunto enumerable es aquél en el que se puede establecer una correspondencia uno a uno entre sus elementos y los números naturales. Un conjunto no enumerable es aquél en el que no se puede establecer esa correspondencia. El conjunto de los números reales es un ejemplo de un conjunto no enumerable[3].

7.1.2 *La interpretación de los predicados*

Los predicados de *LC* fueron caracterizados en el capítulo anterior como símbolos que representan propiedades o relaciones. Los predicados tienen un componente *intensional* y uno *extensional*. Explicaremos estas nociones a través de un ejemplo. Consideremos la siguiente interpretación:

UD: Ganadores del premio Schock en lógica y filosofía

F*x*: *x* es finlandés
h: Hintikka
k: Kripke
q: Quine

---

1. El Premio Schock en Lógica y Filosofía es otorgado cada dos años por la Real Academia Sueca de Ciencias.

2. No todos los sistemas de lógica exigen que el UD contenga al menos un elemento. Las llamadas *lógicas libres* no hacen esta exigencia, pero su semántica es notoriamente más compleja que la de *LC*.

3. El lector interesado en el problema de la cardinalidad de los conjuntos infinitos puede encontrar una explicación completa en cualquier introducción a la teoría de conjuntos, por ejemplo, en Stoll (1961).

Cap-7.pmd 214 13/07/07, 03:21 p.m.

Según esta interpretación, la fórmula:

(1) Fh

expresa la idea de que Hintikka es finlandés, es decir, Jaakko Hintikka tiene la propiedad de ser finlandés. La propiedad expresada a través del predicado "F" es la ***intensión*** o el sentido del predicado.

Utilizando una propiedad, es posible clasificar los objetos del UD separando los objetos que la poseen de aquéllos que carecen de ella. En el ejemplo anterior, hay un subconjunto del UD integrado por aquellos ganadores del premio Schock que tienen la propiedad de ser finlandeses. A este subconjunto lo denominaremos la ***extensión*** del predicado. En vez de escribir la interpretación intensional del predicado en la guía de simbolización, podemos escribir los elementos del conjunto:

UD: Ganadores del premio Schock en lógica y filosofía

F*x*: {Hintikka}
h: Hintikka
k: Kripke
q: Quine

En resumen, la intensión del predicado "F" es la propiedad de ser finlandés y su extensión es Jaakko Hintikka.

Un predicado puede tener intensión pero tener una extensión vacía. Añadamos, por ejemplo, el siguiente predicado a la anterior interpretación:

V*x*: *x* vuela

El predicado hace referencia a la propiedad de volar, pero ningún ganador del premio Schock posee esta propiedad. Por lo tanto, la extensión del predicado "V" es el conjunto nulo o vacío:

V*x*: $\varnothing$

El conjunto nulo o vacío es un subconjunto de todos los conjuntos, y por ende, de todos los dominios.

La razón más importante para establecer una distinción entre la intensión y la extensión de un predicado es que dos predicados pueden tener la misma extensión pero diferentes intensiones. Por ejemplo, la propiedad de ser un triángulo equilátero y la de ser un triángulo equiángulo son ***coextensionales***, pero las dos descripciones de este conjunto no tienen el mismo sentido o intensión.

El caso de los predicados poliádicos es un poco más complejo. La intensión de un predicado poliádico es una relación. Consideremos la siguiente interpretación:

Cap-7.pmd 215 13/07/07, 03:21 p.m.

UD: Filósofos
P*xy*: *x* fue maestro de *y*

La extensión de este predicado es, al igual que en el caso de los predicados monádicos, un conjunto. Pero los elementos del conjunto no son individuos del UD, sino ***tuplas***. Una tupla es una secuencia ordenada de objetos del UD. El ejemplo más simple de una tupla es un par ordenado, como los que se utilizan para designar puntos en el plano cartesiano. La coordenada <5, 9> es diferente de la coordenada <9, 5> en un plano cartesiano debido al orden en el que aparecen los números. Del mismo modo, el par ordenado <Aristóteles, Platón> es diferente del par ordenado <Platón, Aristóteles>. El primer par no está en la extensión del predicado “P” porque Aristóteles no fue maestro de Platón, pero el segundo par ordenado sí, porque Platón sí fue maestro de Aristóteles. En general, la extensión del predicado “P” incluirá todos los pares ordenados de elementos del universo del discurso (filósofos) en los cuales el primero haya sido maestro del segundo:

P*xy*: {<Platón, Aristóteles>, <Frege, Carnap>, <Russell, Wittgenstein>, …}

En algunas interpretaciones, la extensión de un predicado diádico incluye pares ordenados en los que los dos elementos son idénticos. Consideremos, por ejemplo, la siguiente interpretación:

UD: Los números enteros positivos
M*xy*: *x* es mayor o igual que *y*

La extensión de “M” incluye los pares <1, 1>, <2, 2>, etc., al igual que <2, 1>, <3, 1>, etc. La extensión de un predicado de grado 3 es un conjunto de triplas ordenadas de elementos del UD, la extensión de uno de grado 4 es un conjunto de cuádruplas ordenadas de elementos del UD, y así sucesivamente. En general, una tupla que contiene *n* elementos es una ***n*-tupla**.

Muchos filósofos han cuestionado el uso de las nociones de *propiedad* y *relación* (o propiedad relacional) por razones análogas a las utilizadas para cuestionar la noción de *proposición*[4]. Las propiedades y las relaciones, al igual que las proposiciones, son objetos abstractos. No son entidades lingüísticas, pues no pertenecen a ningún lenguaje. Tampoco pueden ser entidades mentales, como ideas o pensamientos, pues las cosas seguirían teniendo propiedades y relaciones así no hubiera vida inteligente en el universo. Además, son entidades que pueden caer en la vaguedad, pues no es siempre claro cuáles individuos tienen la propiedad en cuestión. Consideremos, por ejemplo, la propiedad de ser calvo. ¿Existe una línea de demarcación que separe inequívocamente a los calvos de las demás personas? En algunos casos es obvio que la persona posee la propiedad en cuestión, pero en muchos otros dudaríamos en afir-

4. *Véase* sección 1.2.

Cap-7.pmd 216 13/07/07, 03:21 p.m.

marlo. Finalmente, existe el problema de la identidad de los predicados. La propiedad de ser un triángulo equilátero y la de ser un triángulo equiángulo claramente son diferentes a pesar de ser coextensionales, pero la diferencia no es tan clara si consideramos la propiedad de ser agua y la propiedad de tener la composición química H_2O.

Estos argumentos han sido debatidos durante mucho tiempo por los filósofos y no existe un consenso acerca de la naturaleza de las propiedades y las relaciones. Afortunadamente no tenemos la necesidad de unirnos al debate, pues la semántica de la lógica clásica de primer orden es completamente extensional[5]. Una interpretación de un predicado siempre debe ser entendida extensionalmente, es decir, como un subconjunto de objetos del UD o como una tupla de objetos del UD, sin que haya necesidad de mencionar propiedad o relación alguna. Sin embargo, en el resto del capítulo seguiremos utilizando informalmente los conceptos de propiedad y relación para facilitar la exposición.

7.1.3 *La interpretación de las constantes*

La extensión de una constante es el elemento del UD denotado por la constante. Una constante sólo puede denotar un objeto del UD, aunque un objeto del UD puede ser denotado por más de una constante. No todos los elementos del UD deben ser denotados por una constante en una interpretación. De hecho, en algunos casos es *imposible* denotar todos los miembros de un UD. Algunos dominios, como los usados en matemáticas, son no enumerables. Como el número de constantes en un lenguaje debe ser enumerable, es imposible denotar en *LC* todos los elementos de un conjunto no enumerable.

A primera vista parece difícil imaginar que las constantes puedan tener un componente intensional. Una constante cumple la misma función que un nombre propio, y generalmente no consideramos que un nombre propio tenga un significado, sólo una denotación. En palabras de John Stuart Mill: "Un nombre propio es una palabra que cumple el propósito de mostrar acerca de qué estamos hablando, pero no la de decirnos algo acerca de ese objeto" (1843: I, 2, §5).

Sin embargo, existe una larga tradición que defiende la idea de que los nombres propios tienen un componente intensional. El argumento más antiguo y quizás el más conocido fue propuesto por Frege en "Über Sinn und Bedeutung" (1892), uno de los artículos más importantes en la historia de la filosofía del lenguaje. A grandes rasgos, Frege plantea el siguiente problema. Supongamos que estamos tratando de definir la relación de identidad. Si la identidad es entendida como la relación que un objeto tiene consigo mismo, aparentemente es imposible explicar la diferencia en el valor cognoscitivo de los siguientes dos enunciados:

5. Ha habido muchos intentos de elaborar un sistema lógico que incorpore los elementos intensionales del lenguaje natural. Los más notables son los de Carnap (1947), Church (1951, 1973, 1974), Montague (1960, 1970) y Bressan (1972).

Cap-7.pmd 217 13/07/07, 03:21 p.m.

(2) Héspero es Héspero.

(3) Héspero es Fósforo.

El primer enunciado es trivial y nada informativo. Su verdad se desprende de su forma lógica. El segundo, por el contrario, expresa un descubrimiento astronómico hecho por los griegos: Héspero, la estrella vespertina, es idéntica a Fósforo, la estrella matutina. Ambos nombres propios denotan el mismo objeto, el planeta Venus, y por lo tanto tienen la misma extensión. Pero si los nombres propios sólo tienen extensión, no habría forma de explicar la disparidad en el valor cognoscitivo de los dos enunciados pues ambos se limitan a afirmar que el objeto es idéntico a sí mismo.

La solución propuesta por Frege fue reafirmar la idea de que la relación de identidad es la relación de un objeto consigo mismo, pero agregando a los nombres un componente intensional, su sentido (*Sinn*), el cual equivale al modo de concebir el objeto. Como el sentido de los nombres "Héspero" y "Fósforo" es diferente, el sentido de los enunciados **(2)** y **(3),** y por ende su valor cognoscitivo, también es diferente.

Existen muchos otros argumentos para defender la idea de que los nombres propios tienen un componente intensional, pero su estudio nos internaría en los intrincados caminos de la filosofía del lenguaje[6]. Al igual que lo que sucede en el caso de los predicados y las relaciones, el componente extensional de las constantes es suficiente para establecer la semántica de *LC*.

7.1.4 *Valuaciones no interpretadas*

En todos los ejemplos anteriores hemos utilizado valuaciones interpretadas, es decir, valuaciones en las que los elementos del dominio han sido identificados como objetos y personas del mundo real, y en las que los predicados han recibido un significado expresable en español. Pero es perfectamente posible construir una valuación no interpretada, completamente abstracta. Una valuación no interpretada nos revela la estructura lógica de la situación que ha sido modelada por una interpretación, una estructura que puede ser compartida por muchas situaciones diferentes, y por ende, por muchas interpretaciones diferentes. Consideremos la siguiente interpretación:

UD: {Platón, Aristóteles, Frege, Russell, Carnap}

Mxy:	x es maestro de y	p:	Platón
Ix:	x es inglés	f :	Frege
Nx:	x es noruego	c:	Carnap

6. Las compilaciones de Simpson (1973) y Valdez (1991) incluyen traducciones al español de los artículos más relevantes sobre el tema.

Cap-7.pmd 218 13/07/07, 03:21 p.m.

Comenzamos eliminando las propiedades y relaciones, escribiendo la extensión de los predicados en su lugar:

UD:	{Platón, Aristóteles, Frege, Russell, Carnap}
Mxy:	{<Platón, Aristóteles>, <Frege, Carnap>}
Ix:	{Russell}
Nx:	∅
p:	Platón
f:	Frege
c:	Carnap

Si queremos eliminar del todo la referencia a individuos concretos, reemplazamos a las personas por números enteros positivos y a las constantes originales por constantes en orden alfabético. Así, obtenemos la siguiente valuación no interpretada:

UD:	{1, 2, 3, 4, 5}		
Mxy:	{<1, 2>, <3, 5>}	a:	1
Ix:	{4}	b:	3
Nx:	∅	c:	5

Esta valuación es la estructura lógica de muchas interpretaciones diferentes. Por ejemplo, podemos crear una interpretación totalmente nueva, pero con la misma estructura lógica, interpretando los predicados de la siguiente manera:

UD:	{Bill Clinton, Hillary Clinton, Pedro Knight, Benedicto XVI, Celia Cruz}		
M*xy*:	*x* es el marido de *y*	a:	Bill Clinton
I*x*:	*x* vive en Roma	b:	Pedro Knight
N*x*:	*x* vive en Togo	c:	Celia Cruz

Puede parecer un poco arbitrario que escojamos números naturales para construir las valuaciones no interpretadas. Pero existe una razón muy poderosa para hacerlo: el famoso *Teorema de Löwenheim-Skolem*.

> **Teorema de Löwenheim-Skolem:** Si una fórmula $\mathcal{P}$ de *LC* es verdadera bajo al menos una interpretación con un UD de cualquier cardinalidad, $\mathcal{P}$ también será verdadera bajo una interpretación cuyo UD sean los números naturales[7].

7. *Véase* Löwenheim (1915), Skolem (1920, 1923, 1928).

Cap-7.pmd 219 13/07/07, 03:21 p.m.

Los números naturales son, por así decirlo, la *esencia* de cualquier situación representable en un lenguaje natural o formal. Por eso el conjunto de los números naturales es la mejor opción al escoger el UD de una valuación no interpretada.

7.1.5 *Definición formal de una valuación*

Teniendo en cuenta las aclaraciones anteriores podemos pasar a definir formalmente qué es una valuación, interpretada o no, del lenguaje *LC*. Usaremos una "a" en negrilla (**a**) como metavariable cuyos valores son las constantes individuales de *LC*, y una "P" en negrilla (**P**) como metavariable cuyos valores son los predicados de *LC*. Usaremos las expresiones $\mathcal{V}$(**a**) y $\mathcal{V}$(**P**) para representar, respectivamente, la extensión de una constante y la extensión de un predicado bajo una valuación.

Valuación de *LC*

Una valuación V de *LC* consiste de:

1. Un conjunto no vacío de objetos llamado el *dominio* o *universo del discurso*, y simbolizado como "UD".
2. Para cada letra proposicional $\mathcal{P}$ en *LC* la asignación de un solo valor de verdad, **V** o **F**. En símbolos: $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ = **V** o $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ = **F**[8].
3. Para cada constante **a** y para cada predicado **P** en *LC*, la asignación de una extensión $\mathcal{V}$(**a**) y $\mathcal{V}$(**P**), respectivamente, que cumple las siguientes condiciones:

   i. $\mathcal{V}$(**a**) es un elemento del UD.
   ii. Si **P** es un predicado de grado 1, $\mathcal{V}$(**P**) es un subconjunto del UD.
   iii. Si **P** es un predicado de grado *n* ($n > 1$), $\mathcal{V}$(**P**) es un conjunto, posiblemente vacío, de *n*-tuplas de elementos del UD[9].

8. Esta cláusula se podría incluir como un caso de la cláusula 3 si definimos a las letras proposicionales como predicados de grado cero.

9. Es posible integrar los casos (ii) y (iii) si definimos la extensión de los predicados monádicos como 1-tuplas. Al fin y al cabo el conjunto {1, 2}, por ejemplo, es el mismo conjunto que {<1>, <2>}.

Cap-7.pmd 220 13/07/07, 03:21 p.m.

Las valuaciones que utilizaremos en este capítulo serán, en su gran mayoría, valuaciones interpretadas. Además, sólo haremos explícita la interpretación de los predicados y constantes que hagan parte de las fórmulas que estemos utilizando. Pero es importante tener siempre presente que según la definición anterior, una valuación le asigna una extensión a *todos* los predicados y constantes de *LC*.

7.2 Reglas de valuación de *LC*

Las reglas de valuación de *LC* definen las condiciones de verdad de una fórmula cerrada $\mathcal{P}$ bajo una valuación. Inicialmente estudiaremos las reglas para las fórmulas atómicas de *LC*, exceptuando a las letras proposicionales, a las cuales una valuación les asigna un valor de verdad directamente. En la segunda sección estudiaremos las reglas para las fórmulas compuestas, que son esencialmente las mismas utilizadas en *LP*. Finalmente, en la tercera sección consideraremos las reglas para las fórmulas cuantificadas, que son las más complejas.

7.2.1 *Reglas para fórmulas atómicas*

Inicialmente estudiaremos las reglas de valuación para fórmulas atómicas cerradas. Las fórmulas atómicas abiertas se excluyen porque una fórmula con variables libres no puede tener un valor de verdad a menos que las variables sean cuantificadas o sustituidas por constantes. Introduciremos las reglas usando varios ejemplos. Consideremos la siguiente fórmula atómica de *LC*:

(4) Ea

El valor de verdad de la fórmula **(4)** depende enteramente de cómo interpretemos la constante y el predicado. Para que la fórmula sea verdadera, el objeto denotado por "a" debe estar en la extensión del predicado "E". La fórmula es verdadera si interpretamos "E" y "a" como:

UD: Personas

E*x*: *x* es escocés
a: Adam Smith

pero falsa si los interpretamos como:

UD: Personas

E*x*: *x* es ecuatoriano
a: Aristóteles

Cap-7.pmd 221 13/07/07, 03:21 p.m.

Consideremos ahora la fórmula:

(5) Mep

bajo la siguiente interpretación:

UD:	Ciudades
M*xy*:	*x* es más vieja que *y*
e:	Edimburgo
p:	Chicago

La fórmula **(5)** es verdadera bajo esta interpretación porque el par ordenado <Edimburgo, Chicago> está en la extensión del predicado “M”. La fórmula es falsa bajo la siguiente interpretación:

UD:	Personas
M*xy*:	*x* es la madre de *y*
e:	Evita Perón
p:	Augusto Pinochet

Hagamos ahora el proceso inverso. Comenzaremos con una interpretación y consideraremos el valor de verdad de varias fórmulas.

UD:	Los números enteros positivos
M*xy*:	*x* es mayor que *y*
a:	2
b:	19

La siguiente fórmula es verdadera bajo la interpretación dada:

(6) Mba

pero la siguiente es falsa bajo esta misma interpretación:

(7) Mab

Es decir, el par ordenado <19, 2> está en la extensión de “M”, pero <2, 19> no lo está.

En resumen, una fórmula compuesta por un predicado monádico y una constante es verdadera bajo una interpretación cuando el elemento designado por la constante (su extensión) está en la extensión del predicado. Y una fórmula compuesta por un predicado de grado *n* y *n* constantes es verdadera bajo una interpretación cuando la *n*-tupla compuesta por los elementos designados por las constantes, en el mismo orden en el que aparecen en la fórmula, está en la extensión del predicado. Podemos

Cap-7.pmd 222 13/07/07, 03:21 p.m.

expresar este resultado de una manera más formal. De nuevo usaremos una "a" en negrilla (**a**) como metavariable cuyos valores son las constantes individuales de *LC*, y una "P" en negrilla (**P**) como metavariable cuyos valores son los predicados de *LC*. Usaremos las expresiones $\mathcal{V}(\mathbf{a})$ y $\mathcal{V}(\mathbf{P})$ para representar, respectivamente, la extensión de una constante y la extensión de un predicado bajo una valuación, y la expresión $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ para representar el valor de verdad de la fórmula bajo la valuación $\mathcal{V}$. Ninguna fórmula de *LC* puede tener más de un valor de verdad. El símbolo "$\in$" es tomado de la teoría de conjuntos y significa "es un miembro de".

Reglas de valuación para fórmulas no cuantificadas

Para cualquier valuación $\mathcal{V}$:

1. Si $\mathcal{P}$ es una fórmula de *LC* de forma **Pa**, donde **P** es un predicado de grado 1 y **a** es una constante, entonces:

   $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{V}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathbf{a}) \in \mathcal{V}(\mathbf{P})$.

   $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{F}$ en caso contrario.

2. Si $\mathcal{P}$ es una fórmula de *LC* de forma $\mathbf{Pa}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, donde **P** es un predicado de grado *n* ($n > 1$) y $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ son constantes, entonces:

   $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{V}$ si y sólo si $<\mathcal{V}(\mathbf{a}_1), \ldots, \mathcal{V}(\mathbf{a}_n)> \in \mathcal{V}(\mathbf{P})$.

   $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{F}$ en caso contrario.

7.2.2 *Reglas para fórmulas moleculares*

Antes de estudiar las reglas de valuación para las fórmulas cuantificadas, podemos definir las reglas de valuación para las fórmulas moleculares de *LC*, sean éstas cuantificadas o no. Estas reglas son esencialmente las mismas de la lógica proposicional. La única diferencia es que $\mathcal{P}$ representa fórmulas de *LC*, las cuales incluyen naturalmente a las letras proposicionales de *LP*.

Cap-7.pmd 223 13/07/07, 03:21 p.m.

Reglas de valuación para fórmulas moleculares

Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son fórmulas de *LC*, entonces:

1. $\mathcal{V}(\sim\mathcal{P}) = \mathbf{V}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{F}$.
   $\mathcal{V}(\sim\mathcal{P}) = \mathbf{F}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{V}$.
2. $\mathcal{V}(\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q}) = \mathbf{V}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{V}$.
   $\mathcal{V}(\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q}) = \mathbf{F}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{F}$ o $\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{F}$.
3. $\mathcal{V}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = \mathbf{V}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{V}$ o $\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{V}$.
   $\mathcal{V}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = \mathbf{F}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{F}$ y $\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{F}$.
4. $\mathcal{V}(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}) = \mathbf{V}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{F}$ o $\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{V}$.
   $\mathcal{V}(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}) = \mathbf{F}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{F}$.
5. $\mathcal{V}(\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}) = \mathbf{V}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{V}$,
   o $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{F}$ y $\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{F}$.
   $\mathcal{V}(\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}) = \mathbf{F}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{F}$,
   o $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{F}$ y $\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{V}$.

Ejercicio 7.1

A. Determine el valor de verdad de las siguientes fórmulas bajo la interpretación dada:

UD: Letras del alfabeto

V*x*:	*x* es una vocal	a:	a
C*x*:	*x* es una consonante	b:	k
A*xy*:	*x* es alfabéticamente anterior a *y*	c:	y

1. (Vc ∨ Aca) & Cc
2. Vc ⊃ (Vb ⊃ Va)
3. ~Acb ⊃ (Aba ∨ ~Vc)
4. Cb ≡ (~Va ≡ Vc)
5. (Cb & Cc) & ~Aaa
6. ~(Vb ∨ Ca) ⊃ Abb
7. Acb ≡ [Aca ⊃ (Cb ∨ ~Vb)]
8. Aca ∨ (Acb ∨ Acc)

Cap-7.pmd 224 13/07/07, 03:21 p.m.

B. Determine el valor de verdad de las siguientes fórmulas bajo la interpretación dada:

UD: Ciudades en la Carretera Panamericana

Exyz:	x está entre y y z	c:	Chiclayo
Gxy:	x es más grande que y	d:	Santiago
Cx:	x es la capital de un país	e:	Puerto Montt
a:	Arica	f:	Quito
b:	Lima		

1. Ca ⊃ Gba
2. Cf ⊃ Gbc
3. ~Edca ∨ (~Eadc ∨ ~Eace)
4. (Cb ≡ Ce) ⊃ Gbe
5. (Ged & Eadf) ≡ ~Cb
6. Ebad ⊃ Edab
7. [(Gab ∨ Cd) ≡ Efca] ∨ ~Cd
8. ~Eabc ⊃ ~Gbc

7.2.3 *Reglas para fórmulas cuantificadas*

Pasamos ahora a las reglas de valuación para fórmulas cuantificadas. Inicialmente estudiaremos varios ejemplos para entender informalmente las condiciones de verdad de este tipo de fórmulas. Consideremos el siguiente ejemplo:

(8) $(\forall x)\mathrm{B}x$

El valor de verdad de esta fórmula depende no sólo de la interpretación del predicado "B", sino particularmente del UD que escojamos. La fórmula es verdadera bajo la siguiente interpretación:

UD: Personas

Bx: x es bípedo

Todas las personas poseen la propiedad en cuestión, es decir, todos los elementos del UD están en la extensión del predicado "B". Sin embargo, la fórmula es falsa bajo una interpretación con un UD diferente:

UD: Animales

Bx: x es bípedo

La fórmula **(8)** es falsa porque no todos los elementos del UD están en la extensión del predicado "B".

Ahora consideremos la siguiente fórmula existencialmente cuantificada:

(9) $(\exists x)\mathrm{C}x$

La fórmula es verdadera bajo la siguiente interpretación:

UD: Filósofos

Cx: x es canadiense

El cuantificador existencial sólo requiere que un miembro del UD tenga la propiedad de ser canadiense, es decir, sólo exige que haya un elemento del UD en la extensión del predicado "C". La misma fórmula es falsa si cambiamos el universo del discurso:

UD: Presidentes de Argentina

Cx: x es canadiense

Como ningún presidente de Argentina ha sido canadiense, es decir, como no hay ningún elemento del UD en la extensión del predicado "C", la fórmula **(9)** es falsa bajo esta nueva interpretación.

En resumen, la relación que define el valor de verdad de las fórmulas cuantificadas no es entre objetos específicos denotados por constantes y la extensión de los predicados, sino más bien entre elementos indefinidos del UD que están total o parcialmente en la extensión de los predicados. El análisis de estos ejemplos puede llevarnos a pensar que las reglas de valuación para fórmulas cuantificadas pueden ser formuladas de la siguiente manera:

1. $(\forall \mathbf{x})\mathbf{Px}$ es verdadera si y sólo si todos los elementos del UD están en la extensión del predicado **P**.
2. $(\exists \mathbf{x})\mathbf{Px}$ es verdadera si y sólo si algún elemento del UD está en la extensión del predicado **P**.

Aunque estas dos reglas describen correctamente las condiciones de verdad de las fórmulas **(8)** y **(9)**, desafortunadamente no es posible aceptarlas como reglas de valuación para *LC*. El problema reside en que la definición es demasiado estrecha porque no es posible aplicarla a fórmulas compuestas. Consideremos, por ejemplo, la fórmula:

(10) $(\forall x)(\mathrm{P}x \supset \sim\mathrm{I}x)$

Cap-7.pmd 226 13/07/07, 03:21 p.m.

No podemos decir que **(10)** es verdadera si y sólo todos los elementos del UD están en la extensión de "P$x \supset$ ~Ix" porque esta expresión no es un predicado, y por lo tanto ninguna valuación le asigna directamente una extensión.

Las reglas de valuación que buscamos deben ser aplicables a fórmulas cuantificadas de cualquier tipo, pero la formulación de estas reglas en términos estrictos ha dado lugar a más de una controversia entre lógicos y filósofos. Existen dos formas diferentes de entender las condiciones de verdad de una fórmula cuantificada. La primera forma, conocida como la ***interpretación sustitucional*** de los cuantificadores, fue propuesta por Wittgenstein en el *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921). Según Wittgenstein, una fórmula universalmente cuantificada puede ser reducida a una no cuantificada si reemplazamos las variables cuantificadas por los nombres de los objetos del UD, y creamos una *conjunción* de las fórmulas resultantes. Y una fórmula existencialmente cuantificada puede ser reducida a una no cuantificada si reemplazamos las variables cuantificadas por los nombres de los objetos del UD, y creamos una *disyunción* de las fórmulas resultantes. Tras la eliminación de los cuantificadores, las fórmulas pueden ser evaluadas de acuerdo con las condiciones de verdad de los conectores lógicos utilizando tablas de verdad.

Consideremos, por ejemplo, la fórmula:

(11) $(\forall x)\mathrm{I}x$

bajo la siguiente interpretación:

UD: Los Beatles

Ix: x es inglés

Según el punto de vista de Wittgenstein[10], la fórmula **(11)** es verdadera si y sólo si también lo es la conjunción de todas las fórmulas de forma I**a**, donde **a** es un nombre de uno de los objetos del UD. El problema es que hay un número infinito de fórmulas de este tipo[11] y el lenguaje *LC* no admite fórmulas infinitas. Para poder crear una fórmula finita debemos seleccionar un conjunto de constantes y utilizarlas para construir la conjunción. Seleccionaremos las siguientes constantes para designar a los Beatles:

10. Wittgenstein rechazó posteriormente esta forma de entender los cuantificadores e incluso la llamó, en una conversación con von Wright (1982: 151) en 1939, "la peor equivocación que había cometido en el *Tractatus*". Según el punto de vista que adoptó posteriormente, un enunciado universalmente cuantificado tal como una ley de la naturaleza no es un enunciado genuino, es decir, no tiene un valor de verdad.

11. Como (i) una interpretación le asigna una extensión a todas las constantes del lenguaje, (ii) hay un número infinito de constantes, y (iii) no puede haber constantes sin denotación, necesariamente habrá al menos un objeto del UD que será denotado por un número infinito de constantes.

j:	John
p:	Paul
g:	George
r:	Ringo

Utilizando estas constantes, podemos generar la siguiente conjunción:

(11a) (Ij & Ip) & (Ig & Ir)

Del mismo modo, podemos reducir la siguiente fórmula existencial:

(12) $(\exists x)\mathrm{I}x$

a una fórmula no cuantificada utilizando estos mismos nombres:

(12a) $(\mathrm{Ij} \vee \mathrm{Ip}) \vee (\mathrm{Ig} \vee \mathrm{Ir})$

Las fórmulas **(11a)** y **(12a)** son las ***expansiones semánticas*** de las fórmulas **(11)** y **(12)**, respectivamente, para el conjunto de constantes {j, p, g, r}. Las fórmulas y sus expansiones semánticas tienen el mismo valor de verdad bajo la interpretación dada siempre y cuando todos los objetos del UD hayan sido nombrados.

Para poder definir formalmente la noción de expansión semántica, debemos definir primero la noción de *instancia de sustitución* de una fórmula cuantificada:

> ***Instancia de sustitución***: Sea $\mathcal{Q}$ una fórmula de *LC* de forma $(\forall \mathbf{x})\mathcal{P}$ o $(\exists \mathbf{x})\mathcal{P}$, sea **x** una variable y **a** una constante. Una instancia de sustitución de $\mathcal{Q}$, denotada $\mathcal{P}(\mathbf{a/x})$, es la fórmula que resulta de eliminar el cuantificador y reemplazar todas las instancias de **x** en $\mathcal{P}$ con la constante **a**.

La expansión semántica de una fórmula siempre es relativa a una valuación $\mathcal{V}$ con un UD finito de cardinalidad *n*. Antes de llevar a cabo la expansión, debemos seleccionar un conjunto finito de constantes $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ que nombren a los *n* objetos del UD. Si la fórmula ya contiene constantes, éstas deben ser incluidas en el conjunto. Para asegurarnos de que cada objeto del UD reciba un nombre, se exige que $\mathcal{V}(\mathbf{a}_1) \neq \mathcal{V}(\mathbf{a}_2) \neq \ldots \neq \mathcal{V}(\mathbf{a}_n)$. La expansión semántica de una fórmula de forma $(\forall \mathbf{x})\mathcal{P}$ es la *conjunción* de todas sus instancias de sustitución:

$$\mathcal{P}(\mathbf{a}_1/\mathbf{x}) \ \& \ \mathcal{P}(\mathbf{a}_2/\mathbf{x}) \ \& \ \ldots \ \& \ \mathcal{P}(\mathbf{a}_n/\mathbf{x})$$

donde $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ son las constantes seleccionadas. Por su parte, la expansión semántica de una fórmula de forma $(\exists \mathbf{x})\mathrm{P}$ es la *disyunción* de todas sus instancias de sustitución:

$$\mathcal{P}(\mathbf{a}_1/\mathbf{x}) \vee \mathcal{P}(\mathbf{a}_2/\mathbf{x}) \vee \ldots \vee \mathcal{P}(\mathbf{a}_n/\mathbf{x})$$

Cap-7.pmd 228 13/07/07, 03:21 p.m.

Finalmente, definimos las condiciones de verdad de una fórmula cuantificada de la siguiente manera:

> Sea $\mathcal{Q}$ una fórmula de *LC* de forma $(\forall \mathbf{x})\mathcal{P}$ o $(\exists \mathbf{x})\mathcal{P}$. $\mathcal{Q}$ es verdadera en *LC* bajo una valuación $\mathcal{V}$ si y sólo si su expansión semántica es verdadera bajo esa misma valuación. $\mathcal{Q}$ es falsa en *LC* bajo una valuación $\mathcal{V}$ si y sólo si su expansión semántica es falsa bajo esa misma valuación.

El valor de verdad de una expansión semántica está determinado a su vez por las reglas de valuación de los conectores lógicos y de las fórmulas no cuantificadas de *LC*.

Pasamos ahora a evaluar los méritos de la interpretación sustitucional de los cuantificadores. La interpretación depende de dos supuestos:

1. Todos los objetos del dominio tienen un nombre.
2. El número de objetos en el dominio es finito.

El primer supuesto garantiza que todos los elementos del dominio queden incluidos en la expansión semántica. El segundo, que la expansión semántica sea finita, pues el lenguaje *LC* no admite fórmulas infinitas. El segundo supuesto es extremadamente problemático porque hace que la lógica de predicados sea inutilizable en las matemáticas. Para solucionar este problema podríamos alterar la sintaxis de *LC* y permitir fórmulas infinitas. Pero aún así, persisten los problemas. En primer lugar, como vimos en la sección 7.1.3, hay dominios no enumerables, como el de los números reales, y es imposible denotar todos sus elementos con una constante así contemos con un número infinito de ellas. En otras palabras, ni siquiera una expansión semántica infinita sería equivalente a una fórmula universalmente cuantificada bajo una interpretación cuyo UD sean los números reales. En segundo lugar, al exigir que todos los objetos del dominio tengan un nombre se excluye la posibilidad de evaluar la verdad de una fórmula bajo una interpretación en la cual haya objetos sin nombre, incluso cuando el UD es finito. Esta exclusión nos impide hacer afirmaciones acerca de la totalidad de las valuaciones posibles de *LC*, como lo requieren las definiciones de los conceptos semánticos que estudiaremos más adelante.

Podríamos intentar solucionar estos dos problemas eliminando el supuesto de que todos los objetos del dominio tienen un nombre, pero esto generaría un nuevo problema. La interpretación sustitucional trata a un objeto del UD que no tenga nombre como si no existiera. Si ese objeto sin nombre no está en la extensión de un predicado **P**, entonces el equivalente sustitucional de $(\forall \mathbf{x})\mathbf{Px}$ resultará ser verdadero así no todos los elementos del UD estén en la extensión de **P**. Por ejemplo, consideremos la siguiente interpretación:

UD: $\{1, 2, 3\}$

Mx: $\{2, 3\}$

Rx: $\{1\}$

Supongamos que bajo esta interpretación no hay ninguna constante que denote al número 1. Cualquier constante que escojamos denotará al número 2 o al número 3. Bajo esta interpretación, la fórmula:

(13) $(\forall x)\mathrm{M}x$

es verdadera porque su expansión semántica para cualquier trío de constantes {a, b, c} es verdadera:

(13a) Ma & Mb & Mc

Pero claramente **(13)** no puede ser verdadera porque hay un elemento del UD que no está en la extensión de "M".

Existe un problema análogo en el caso de las fórmulas existencialmente cuantificadas. Una fórmula como:

(14) $(\exists x)\mathrm{R}x$

resultaría ser falsa bajo la interpretación anterior porque su equivalente sustitucional para cualquier trío de constantes {a, b, c} es falso:

(14a) Ra ∨ Rb ∨ Rc

Ninguno de los objetos denotados por estas constantes está en la extensión de "R". Sin embargo, existe un miembro del UD que sí está en la extensión de "R", pero como este miembro no tiene nombre, su existencia es ignorada por el equivalente sustitucional en esta interpretación.

Por todas estas razones la interpretación sustitucional ha sido rechazada como la interpretación más adecuada para la lógica de primer orden. En su lugar ha sido propuesta la ***interpretación objetual*** de los cuantificadores, que es la que adoptaremos aquí. Según esta interpretación, una fórmula de forma $(\forall \mathbf{x})\mathcal{P}$ es verdadera bajo una valuación $\mathcal{V}$ si y sólo si $\mathcal{P}(\mathbf{a}/\mathbf{x})$ es verdadera cuando le asignamos a la constante **a** cualquier objeto del UD. Y una fórmula de forma $(\exists \mathbf{x})\mathcal{P}$ es verdadera bajo una valuación $\mathcal{V}$ si y sólo si $\mathcal{P}(\mathbf{a}/\mathbf{x})$ es verdadera para al menos una asignación de un objeto del UD a la constante **a**. Esta forma de concebir los cuantificadores es llamada una interpretación objetual porque tiene en cuenta directamente los objetos del UD y no sólo aquellos objetos que poseen un nombre.

Para poder ofrecer una definición formal de la interpretación objetual de los cuantificadores, necesitamos introducir la noción de una **b**-*variante* de una valuación:

Cap-7.pmd 230 13/07/07, 03:21 p.m.

> **b-*Variante de* $\mathcal{V}$:** Una **b**-variante de $\mathcal{V}$, denotada $\mathcal{V}_{\mathbf{b}}$, es una valuación idéntica a $\mathcal{V}$, excepto que $\mathcal{V}_{\mathbf{b}}$ le puede asignar a una constante **b** de *LC* algún objeto del UD que $\mathcal{V}$ no le asigna a **b**.

Informalmente, lo que dice esta definición es que una **b-**variante de $\mathcal{V}$ es una valuación que tiene el mismo UD que $\mathcal{V}$, que le asigna las mismas extensiones a los predicados y constantes, pero en la cual cabe la posibilidad de que **b** denote un objeto diferente al que denota en $\mathcal{V}$. La definición no *requiere* que **b** denote un objeto diferente, así que en términos estrictos, una **b**-variante de $\mathcal{V}$ es $\mathcal{V}$ misma.

En muchos casos tendremos que construir la **b**-variante de una **b**-variante, por ejemplo, cuando tenemos dos cuantificadores y un predicado diádico. En tales casos adoptaremos la siguiente convención: una **a**-variante de $\mathcal{V}_{\mathbf{b}}$ se denota como $\mathcal{V}_{\mathbf{ba}}$, una **c**-variante de $\mathcal{V}_{\mathbf{ba}}$ se denota como $\mathcal{V}_{\mathbf{bac}}$, y así sucesivamente.

Con la ayuda de esta noción, pasamos a definir las reglas de valuación para las fórmulas cuantificadas cerradas de *LC*:

Reglas de valuación para fórmulas cuantificadas cerradas

Para cualquier valuación $\mathcal{V}$:

1. Si $\mathcal{P}$ es una fórmula de forma $(\forall \mathbf{x})\mathcal{Q}$, entonces:

   $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ = **V** si y sólo si para alguna constante **b** que no ocurra en $\mathcal{Q}$, la instancia de sustitución $\mathcal{Q}(\mathbf{b}/\mathbf{x})$ es verdadera bajo cualquier $\mathcal{V}_{\mathbf{b}}$.

   $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ = **F** si y sólo si para alguna constante **b** que no ocurra en $\mathcal{Q}$, la instancia de sustitución $\mathcal{Q}(\mathbf{b}/\mathbf{x})$ es falsa bajo alguna $\mathcal{V}_{\mathbf{b}}$.

2. Si $\mathcal{P}$ es una fórmula de forma $(\exists \mathbf{x})\mathcal{Q}$, entonces:

   $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ = **V** si y sólo si para alguna constante **b** que no ocurra en $\mathcal{Q}$, la instancia de sustitución $\mathcal{Q}(\mathbf{b}/\mathbf{x})$ es verdadera bajo alguna $\mathcal{V}_{\mathbf{b}}$.

   $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ = **F** si y sólo si para alguna constante **b** que no ocurra en $\mathcal{Q}$, la instancia de sustitución $\mathcal{Q}(\mathbf{b}/\mathbf{x})$ es falsa bajo cualquier $\mathcal{V}_{\mathbf{b}}$.

Aunque las reglas de valuación son un poco intrincadas, la idea básica es muy simple. La regla 1 simplemente dice que una fórmula universalmente cuantificada es verdadera si y sólo si sus instancias de sustitución $\mathcal{Q}(\mathbf{b}/\mathbf{x})$ siempre son verdaderas sin importar cuál objeto del UD le sea asignado a **b** por una valuación.

Retomemos la fórmula **(13)** para ver cómo se puede aplicar esta regla:

(13) $(\forall x)\mathrm{M}x$

Según la interpretación dada anteriormente, la extensión de "M" es {2, 3}. Una instancia de sustitución de la fórmula **(13)** podría ser:

(13b) Ma

Lo que nos indica la primera regla de valuación es que "Ma" debe ser verdadera para cualquier a-variante de la valuación dada, es decir, $\mathcal{V}_a(a) \in \mathcal{V}_a(M)$ para cualquier $\mathcal{V}_a$. Pero es fácil ver que cuando $\mathcal{V}_a(a)$ es 1, "Ma" es falsa. Por lo tanto, la fórmula **(13)** es falsa según la interpretación objetual de los cuantificadores.

Un razonamiento análogo nos permite ver que la fórmula **(14)**:

(14) $(\exists x)Rx$

es verdadera si adoptamos la segunda regla de valuación. Lo que nos indica la regla en este caso es que una instancia de sustitución de **(14)**, por ejemplo:

(14b) Ra

debe ser verdadera para alguna a-variante de la valuación dada, es decir, $\mathcal{V}_a(a) \in \mathcal{V}_a(R)$ para alguna $\mathcal{V}_a$. Cuando $\mathcal{V}_a(a)$ es 1, "Ra" es verdadera. Por lo tanto, la fórmula **(14)** es verdadera según la interpretación objetual de los cuantificadores.

Finalmente, analizaremos la fórmula **(10)** según estas reglas de valuación. El análisis es similar al de la fórmula **(13)**. Inicialmente, creamos una instancia de sustitución de la fórmula:

(10a) Pa ⊃ ~Ia

El análisis no puede continuar a menos que tengamos una valuación, porque la verdad de una fórmula siempre es relativa a una valuación. Tomemos la siguiente interpretación:

UD: Números enteros positivos

Px: x es par

Ix: x es impar

Lo que nos indican las reglas de valuación es que "Pa ⊃ ~Ia" debe ser verdadera para cualquier a-variante de la valuación dada. En otras palabras, "Pa ⊃ ~Ia" debe ser verdadera sin importar cuál número entero positivo sea denotado por "a". Dividiremos el análisis en dos pasos. Primero supongamos que "a" denota un número *par* cualquiera, es decir, que $\mathcal{V}_a(a) \in \mathcal{V}_a(P)$ para alguna $\mathcal{V}_a$. En tal caso, el antecedente del condicional es verdadero. Como es falso que ese número sea impar, es decir, es falso que $\mathcal{V}_a(a) \in \mathcal{V}_a(I)$, el consecuente del condicional también es verdadero. Por lo tanto, cuando "a" denota un número par, el condicional es verdadero. Ahora supongamos

Cap-7.pmd 232 13/07/07, 03:22 p.m.

que "a" denota un número *impar* cualquiera. En tal caso, es falso que $\mathcal{V}_a(a) \in \mathcal{V}_a(P)$ para alguna $\mathcal{V}_a$, y por lo tanto el antecedente es falso. Como un condicional es verdadero cuando el antecedente es falso, "Pa ⊃ ~Ia" es verdadera. Ahora bien, como "Pa ⊃ ~Ia" es verdadera cuando "a" denota cualquier número entero positivo, la fórmula **(10)** es verdadera bajo la interpretación dada.

Ejercicio 7.2

Determine el valor de verdad de las siguientes fórmulas bajo la interpretación dada.

UD: Personas

D*x*:	*x* tiene menos de dos años	C*xy*:	*x* conoce a *y*
S*x*:	*x* tiene más de setenta años	P*xy*:	*x* es el padre de *y*

1. $(\forall w)Sw$
2. $\sim(\forall w)Dw$
3. $(\forall w)(Dw \vee Sw)$
4. $\sim(\exists x)Sx \supset (\exists y)Dy$
5. $(\forall w)(Sw \supset Dw)$
6. $(\exists y)(\exists w)\sim Cyw$
7. $(\forall x)(\forall y)Pxy$
8. $(\exists x)(\forall y)Cxy$
9. $(\exists y)(\exists w)(Cyw \,\&\, Cwy)$
10. $(\forall x)(\forall y)[(Sx \,\&\, Pxy) \supset \sim Dy]$

7.3 Modelos

En la sección anterior estudiamos las reglas de valuación para las fórmulas de *LC* y vimos cómo determinar el valor de verdad de una fórmula bajo una interpretación dada. En esta sección estudiaremos la relación entre fórmulas e interpretaciones en la dirección opuesta. Dada una fórmula cualquiera de *LC* es natural preguntarse si esa fórmula representa la estructura lógica de alguna situación posible, es decir, si existe una interpretación bajo la cual la fórmula sea verdadera. En otras palabras, podemos preguntarnos si la fórmula tiene un *modelo*:

***Modelo de una fórmula*:** Una valuación bajo la cual una fórmula $\mathcal{P}$ de *LC* es verdadera es un *modelo* de $\mathcal{P}$.

***Fórmula satisfacible*:** Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LC* es *satisfacible* si y sólo si tiene al menos un modelo.

Encontrar un modelo para una fórmula no es siempre tarea fácil, y es necesario entender muy bien cuáles son sus condiciones de verdad. En esta sección estudiaremos varios ejemplos de complejidad creciente para aprender varias estrategias para construir modelos. Comenzaremos con un ejemplo que sólo incluye fórmulas no cuantificadas:

(15) (Db ≡ Dp) & ~Mbp

El valor de verdad de esta fórmula está completamente determinado por el valor de verdad de las fórmulas atómicas que la componen. Si analizamos la estructura de la fórmula, vemos que es verdadera si y sólo si "(Db ≡ Dp)" y "~Mbp" son verdaderas. La primera formula es verdadera si y sólo si "Db" y "Dp" son ambas verdaderas o ambas falsas. Así que tenemos dos posibles caminos para construir el modelo. Construiremos un modelo en el que todas las fórmulas son verdaderas:

UD: Personas

M*xy*: *x* es hermano de *y*
D*x*: *x* es un dramaturgo
b: Samuel Beckett
p: Harold Pinter

Al construir el modelo nos aseguramos de utilizar información que cualquier persona medianamente educada posea, y además tratamos de evitar generar fórmulas cuyo valor de verdad sea dudoso o cuestionable.

Consideremos ahora la siguiente fórmula:

(16) $(\forall y)(\exists x)\mathrm{F}yx$

Para que la fórmula sea verdadera debemos encontrar una interpretación en la cual *cada* elemento del UD tenga la relación "F" con *algún* elemento del UD. Muchas relaciones humanas cumplen ese requisito: "*x* ama a *y*", "*x* admira a *y*", "*x* es hijo de *y*", etc. La siguiente interpretación, por ejemplo, es un modelo de la fórmula **(16)** porque todo el mundo conoce a alguien:

UD: Personas

F*xy*: *x* conoce a *y*

Cap-7.pmd 234 13/07/07, 03:22 p.m.

Esta interpretación, sin embargo, no es un modelo de la siguiente fórmula:

(17) $(\exists x)(\forall y)Fxy$

Para que la fórmula **(17)** sea verdadera, debemos encontrar una interpretación en la cual un elemento del UD tenga la relación "F" con todos los elementos del UD, incluido él mismo. La relación "*x* conoce a *y*" no es de este tipo porque no hay ninguna persona que conozca a toda la humanidad. Sin embargo, si restringimos el UD a un grupo reducido de personas, podemos crear un modelo de la fórmula **(17)** sin cambiar la interpretación del predicado:

UD: {Pelé, Maradona, Zidane}

F*xy*: *x* conoce a *y*

Como al menos uno de estos futbolistas conoce a todos los demás, incluido él mismo, el anterior es un modelo de la fórmula **(17)**. En muchos casos es más fácil encontrar un modelo de una fórmula cuando el UD es muy pequeño, pero no en todos.

Consideremos ahora la siguiente fórmula:

(18) $(\forall y)(\forall x)(Cyx \supset Cxy)$

Para que esta fórmula sea verdadera, debemos encontrar una relación tal que si el primer elemento tiene esa relación con el segundo, el segundo la tiene con el primero[12]. El tipo de relación que buscamos no puede ser jerárquica, es decir, no puede ser una relación como "ser mayor que" o "ser el padre de". Por ejemplo, la fórmula es falsa bajo la siguiente interpretación:

UD: Números enteros positivos

C*xy*: *x* es menor que *y*

Como hay al menos un par de números enteros positivos que no cumple la condición de que si el primero es menor que el segundo, el segundo es menor que el primero, la fórmula es falsa. De hecho, no hay ningún par de números que cumpla con esta condición. Lo que necesitamos es una relación equitativa, no jerárquica. La siguiente interpretación es un modelo de la fórmula **(18)**:

UD: Personas

C*xy*: *x* es colega de *y*

12. Naturalmente, si el primer elemento no tiene la relación "C" con el segundo, la fórmula es trivialmente verdadera porque el antecedente del condicional es falso.

Cap-7.pmd 235 13/07/07, 03:22 p.m.

Uno no puede ser colega de alguien sin que esa persona sea colega de uno. Por lo tanto, el condicional es verdadero para cualquier par de personas.

Ahora consideremos la siguiente fórmula:

(19) $(\forall y)(\forall x)(\mathrm{C}yy \supset \mathrm{C}xy)$

La fórmula es verdadera de manera trivial bajo la siguiente interpretación:

UD: Personas

C*xy*: *x* es el padre de *y*

Como ninguna persona es padre de sí misma, el antecedente del condicional siempre es falso para cualquier par de elementos del UD. En consecuencia, el condicional es verdadero para cualquier par de elementos del UD.

Este último ejemplo ilustra una de las estrategias que se pueden utilizar para encontrar un modelo cuando se trata de una fórmula universalmente cuantificada. Consideremos la siguiente fórmula:

(20) $(\forall x)(\mathrm{C}x \supset \mathrm{D}x)$

Esta fórmula es verdadera si encontramos una interpretación bajo la cual el antecedente del condicional siempre sea falso. La siguiente interpretación cumple ese requisito:

UD: Pájaros

C*x*: *x* tiene pelo

D*x*: *x* vuela

Como ningún pájaro tiene pelo, la fórmula es trivialmente verdadera. El hecho de que este tipo de modelos sean posibles es una consecuencia de las condiciones de verdad del condicional material.

Lo mismo sucede si creamos una interpretación en la que el consecuente sea siempre verdadero:

UD: Pájaros

C*x*: *x* es azul

D*x*: *x* tiene plumas

Como todos los pájaros tienen plumas, es imposible que el condicional de la fórmula **(18)** sea falso para algún miembro del UD. Los anteriores son modelos que no modelan nada, pero siguen siendo modelos según nuestra definición.

Cap-7.pmd 236 13/07/07, 03:22 p.m.

El último ejemplo que estudiaremos es un poco más complejo:

(21) $(\forall x)[\sim Ex \supset (\exists y)(Ey \ \& \ Ayx)]$

La fórmula es un condicional universalmente cuantificado. Por lo tanto, es verdadera en todos los casos excepto cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso para algún elemento del UD. Consideremos la siguiente interpretación:

UD: Números enteros positivos

Axy: x es el sucesor de y
Ex: x es impar

Algunos elementos del UD cumplen con el antecedente del condicional y otros no. Si se trata de un número impar, el antecedente es falso y por ende el condicional es verdadero. El caso que debe preocuparnos es cuando se trata de un número par. En tal caso el antecedente es verdadero, y debemos asegurarnos de que el consecuente también sea verdadero. Una pequeña reflexión muestra que si un número es par, entonces tiene un sucesor impar. Es decir, el consecuente es verdadero cuando el antecedente es verdadero. Como el condicional es verdadero en ambos casos, la interpretación dada es un modelo de la fórmula **(21)**.

En las secciones siguientes necesitaremos hacer uso del concepto opuesto al de modelo:

Contramodelo de $\mathcal{P}$: Una valuación bajo la cual una fórmula $\mathcal{P}$ de *LC* es falsa es un *contramodelo* o *contraejemplo* de $\mathcal{P}$.

Para encontrar un contramodelo de una fórmula debemos seguir estrategias muy similares a las que seguimos para encontrar un modelo. Al fin y al cabo, un contramodelo de una fórmula es un modelo de su negación. Por ejemplo, en el caso de una fórmula condicional universalmente cuantificada como la **(20)**, la estrategia es encontrar una interpretación bajo la cual el antecedente sea verdadero y el consecuente sea falso para *al menos un* elemento del UD. La siguiente interpretación es un contramodelo de esa fórmula:

UD: Pájaros

Cx: x tiene plumas
Dx: x vuela

Como hay al menos un pájaro que tiene plumas y no vuela, el condicional no es universalmente verdadero.

Finalmente, construiremos un contramodelo para la siguiente fórmula:

(22) Sd ∨ (∃*x*)(S*x* & J*x*)

Como se trata de una disyunción, debemos encontrar una interpretación bajo la cual tanto "Sd" como "(∃*x*)(S*x* & J*x*)" sean falsas. La siguiente interpretación cumple esas condiciones:

UD: Números enteros positivos

J*x*: *x* es par
S*x*: *x* es impar
d: 44

El número 44 no es impar, y no existe un número par e impar a la vez. Por lo tanto, la interpretación dada es un contramodelo de la fórmula **(22)**.

Ejercicio 7.3

A. Construya un modelo para cada una de las siguientes fórmulas.

1. (~Re & ~Hs) ≡ Qm
2. Fad ⊃ ~Fda
3. (Lm & Cmj) ∨ ~Cjm
4. ~Lrr & ~[(Ns ∨ Lrt) ⊃ Ltr]
5. [(Bc ⊃ Tc) & (Bf ⊃ Tf)]

B. Construya un contramodelo para cada una de las siguientes fórmulas.

1. Ji ∨ (Ja ∨ Je)
2. (Mr ≡ Sr) ≡ ~Qc
3. (Htg & Hgt) ∨ (Htt & Hgg)
4. Yro ⊃ (Uor ∨ Uro)
5. ~(Ja & ~Ja) ⊃ (Sac ⊃ Sca)

C. Para cada par de fórmulas, construya una interpretación bajo la cual la primera fórmula sea verdadera y la segunda falsa.

1. ~La ∨ Dra
   Drb ∨ Lb
2. ~Ns ⊃ (~Mss ∨ ~Msc)
   (Mss & Msc) ∨ ~Ns
3. Gnd ⊃ Gdn
   Gdn ⊃ Gnd

Cap-7.pmd 238 13/07/07, 03:22 p.m.

4. $Bed \vee Nade$
   $Bed \ \& \ Nade$

5. $\sim Kfc \supset (Sfc \vee Scf)$
   $Kfc \ \& \ (Sfc \vee Scf)$

D. Construya un modelo para cada una de las siguientes fórmulas.

1. $\sim(\forall w)(Sw \vee Rw)$
2. $\sim(\exists x)Cx \supset (\exists y)Ny$
3. $(\forall w)(Hw \supset (\exists x)Ixw)$
4. $(\exists y)(\exists w)(Ayw \ \& \ Oyw)$
5. $(\exists x)(\forall y)(Px \vee Oyx)$
6. $(\forall x)(\forall y)[(Nx \ \& \ Pxy) \supset Vy]$
7. $(\forall x)(\forall y)(Dxy \equiv \sim Exy)$
8. $(\forall x)[Kx \supset (\forall y)(Ly \supset \sim Cxy)]$
9. $(\exists y)(\exists w)(Hyw \vee Hwy)$
10. $(\forall x)(\forall y)[(Tx \ \& \ Exy) \supset \sim Oy]$

E*. Construya un modelo para la conjunción de <u>todas</u> las siguientes fórmulas:

$(\forall x)Axn$
$(\forall x)(\forall y)[(Fx \ \& \ Py) \supset Ayx]$
$(\exists x)(Px \ \& \ (\exists y)Ayx)$
$(\exists x)(Px \ \& \sim(\exists y)Fy) \ \& \ (Pn \supset (\forall y)Gy)$
$(\forall x)[Gx \supset (\exists y)(Axy \vee Ayx)]$
$(\forall x)(Fx \equiv \sim Gx)$
$(\forall x)[Axn \supset (\exists y)(Gy \ \& \ Axy)]$

7.4 Propiedades semánticas de las fórmulas de *LC*

En esta sección definiremos las propiedades semánticas de las fórmulas individuales de *LC*.

Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LC* es una ***tautología en LC*** si y sólo si $\mathcal{P}$ es verdadera bajo cualquier valuación.

Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LC* es una ***contradicción en LC*** si y sólo si $\mathcal{P}$ es falsa bajo cualquier valuación.

Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LC* es una fórmula ***semánticamente indeterminada en LC*** si y sólo si $\mathcal{P}$ no es ni una tautología ni una contradicción en *LC*.

Cap-7.pmd 239 13/07/07, 03:22 p.m.

La siguiente fórmula es una tautología en *LC*:

(23) $(\exists x)(Sx \vee {\sim}Sx)$

No podemos demostrarlo considerando todas las valuaciones posibles de la fórmula pues hay un número infinito de ellas. Tendríamos que examinar, por ejemplo, una interpretación cuyo UD sea un número natural, otra cuyo UD sean dos números naturales, y así sucesivamente *ad infinitum*. Sin embargo, podemos utilizar las reglas de valuación para construir una prueba. Generalmente, la mejor estrategia para construir una prueba del carácter tautológico de una fórmula es a través de una reducción al absurdo: suponemos que la fórmula no es una tautología y deducimos una contradicción.

> ***Prueba***: Supongamos que "$(\exists x)(Sx \vee {\sim}Sx)$" no es una tautología, es decir, que existe alguna valuación $\mathcal{V}$ bajo la cual la fórmula es falsa. En tal caso, la instancia de sustitución "$Sa \vee {\sim}Sa$" es falsa bajo cualquier $\mathcal{V}_a$. Ahora bien, si $\mathcal{V}_a(Sa \vee {\sim}Sa) = \mathbf{F}$, entonces, según las reglas de valuación de la disyunción, $\mathcal{V}_a(Sa) = \mathbf{F}$ y $\mathcal{V}_a({\sim}Sa) = \mathbf{F}$. Pero como $\mathcal{V}_a({\sim}Sa) = \mathbf{F}$ ssi $\mathcal{V}_a(Sa) = \mathbf{V}$, "Sa" resulta ser falsa y verdadera bajo la misma valuación, lo cual es imposible. Por lo tanto, nuestra suposición inicial es falsa y la fórmula **(23)** es una tautología en *LC*.

Con este mismo tipo de razonamiento podemos establecer que la siguiente fórmula es una tautología en *LC*:

(24) $(\forall x)(Sx \vee {\sim}Sx)$

Dejamos la prueba como ejercicio para el lector.

Consideremos ahora una contradicción en *LC*:

(25) $(\forall w)Gw \;\&\; (\exists z){\sim}Gz$

De nuevo, utilizaremos una reducción al absurdo para probar que esta fórmula es una contradicción:

> ***Prueba***: Supongamos que "$(\forall w)Gw \;\&\; (\exists z){\sim}Gz$" no es una contradicción, es decir, que existe alguna valuación $\mathcal{V}$ bajo la cual la fórmula es verdadera. En tal caso, según las reglas de valuación de la conjunción, $\mathcal{V}((\forall w)Gw) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}((\exists z){\sim}Gz) = \mathbf{V}$. Ahora bien, $\mathcal{V}((\exists z){\sim}Gz) = \mathbf{V}$ ssi $\mathcal{V}_a({\sim}Ga) = \mathbf{V}$ para alguna $\mathcal{V}_a$, y $\mathcal{V}_a({\sim}Ga) = \mathbf{V}$ ssi $\mathcal{V}_a(Ga) = \mathbf{F}$ para alguna $\mathcal{V}_a$. Pero si $\mathcal{V}_a(Ga) = \mathbf{F}$ para alguna $\mathcal{V}_a$, entonces $\mathcal{V}((\forall w)Gw) = \mathbf{F}$, lo cual contradice nuestra suposición inicial. Por lo tanto, la fórmula **(25)** es una contradicción en *LC*.

Cap-7.pmd 240 13/07/07, 03:22 p.m.

La razón por la que nos vemos obligados a utilizar este tipo de pruebas es que, como vimos al comienzo del capítulo, no existe un procedimiento mecánico para decidir, para cada fórmula de *LC*, si la fórmula es una tautología, una contradicción o una fórmula contingente. Desafortunadamente, es extremadamente difícil construir pruebas como las anteriores cuando la fórmula tiene predicados poliádicos y cuantificación múltiple. Lo que sí podemos demostrar con facilidad es que una fórmula *no* es una tautología o una contradicción. Para demostrar que una fórmula no es una tautología, basta con encontrar un contramodelo, y para demostrar que una fórmula no es una contradicción, basta con encontrar un modelo. Consideremos, por ejemplo, la siguiente fórmula:

(26) $((\exists x)\mathrm{A}x \ \& \ (\exists x)\mathrm{B}x) \supset (\exists x)(\mathrm{A}x \ \& \ \mathrm{B}x)$

Esta fórmula no es una tautología, lo cual demostraremos al construir un contramodelo. Como la fórmula es un condicional, la interpretación debe hacer que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso. Para que el antecedente sea verdadero, al menos un miembro del UD debe estar en la extensión de "A" y al menos uno en la extensión de "B". Por otra parte, para que el consecuente sea falso, no puede haber ningún miembro del UD que esté tanto en la extensión de "A" como en la de "B". La siguiente interpretación cumple con estas características:

UD: Animales

Ax: x es un mamífero

Bx: x es un reptil

El antecedente es verdadero porque hay al menos un animal que es mamífero y al menos uno que es reptil. El consecuente es falso porque ningún animal es mamífero y reptil a la vez. Por lo tanto, la fórmula no es una tautología.

Consideremos ahora la siguiente fórmula:

(27) $(\forall x)((\mathrm{A}x \ \& \ \mathrm{B}x) \supset (\exists y)\mathrm{N}xy)$

Demostraremos que no es una tautología en *LC* construyendo una interpretación bajo la cual es falsa. Como la fórmula está universalmente cuantificada, debemos encontrar una interpretación bajo la cual al menos un elemento del UD no cumpla la condición estipulada: "$(\mathrm{A}x \ \& \ \mathrm{B}x) \supset (\exists y)\mathrm{N}xy$". Si tomamos como UD el conjunto de los números enteros positivos, bajo la siguiente interpretación el número 2 no cumpliría la condición estipulada:

UD: Los números enteros positivos

Ax: x es par

Bx: x es primo

Nxy: x es el cuadrado de y

El número 2 es primo y par, pero no es el cuadrado de ningún número natural. Por lo tanto, sirve como contraejemplo para la fórmula **(27)** bajo la interpretación dada.

Demostraremos ahora que la siguiente fórmula no es una contradicción en *LC*:

(28) $\sim(\sim(\forall y)My \ \& \ (\exists x)Bx)$

Para tal fin basta con mostrar que la fórmula es satisfacible, es decir, que tiene un modelo. Necesitamos que alguno de los miembros de la conjunción "$\sim(\forall y)My$ & $(\exists x)Bx$" sea falso para que la negación de la conjunción sea verdadera. La siguiente interpretación hace que "$(\exists x)Bx$" sea falsa:

UD: Los números enteros positivos

B*x*: *x* es irracional
M*x*: *x* es par

Como "$(\exists x)Bx$" es falsa porque ningún número entero positivo es irracional, la fórmula es verdadera. De esta manera demostramos que la fórmula **(28)** no es una contradicción en *LC*.

Finalmente, demostraremos que la fórmula anterior es semánticamente indeterminada en *LC*. Como ya encontramos un modelo para la fórmula, sólo hace falta encontrar un contramodelo. Para que la fórmula sea falsa, la conjunción "$\sim(\forall y)My$ & $(\exists x)Bx$" debe ser verdadera. La siguiente interpretación cumple con este requisito:

UD: Los números enteros positivos

B*x*: *x* es impar
M*x*: *x* es par

No todos los números enteros positivos son pares, y hay al menos un entero positivo que es impar, así que "$\sim(\forall y)My$ & $(\exists x)Bx$" es verdadera, y su negación es falsa. De este modo demostramos que la fórmula **(28)** es semánticamente indeterminada en *LC*.

En la mayoría de los ejemplos anteriores hemos utilizado el conjunto de los números enteros positivos como UD. La razón para hacerlo es, de nuevo, el *Teorema de Löwenheim-Skolem* mencionado en la sección 7.1.4. Recordemos lo que afirma el teorema. Si una fórmula de *LC* es verdadera bajo al menos una interpretación, entonces será verdadera bajo una interpretación cuyo UD sean los números naturales. Del teorema se sigue que si una fórmula de *LC* es verdadera bajo una interpretación con un UD finito, también lo es bajo una interpretación con un UD infinito, a saber, el conjunto de los números naturales. Del mismo modo, si una fórmula de *LC* es verdadera bajo una interpretación con un UD mayor que el conjunto de los números naturales (e.g. el conjunto de los números reales), entonces también es verdadera bajo una interpretación cuyo UD sean los números naturales.

Por otra parte, hay fórmulas en *LC* que no son tautologías pero que resultan ser verdaderas bajo cualquier interpretación con un UD finito, y hay fórmulas de *LC* que no son contradicciones, pero que resultan ser falsas bajo cualquier interpretación con un UD finito. Para establecer sus propiedades semánticas, es necesario utilizar una interpretación con un UD infinito. Por todas estas razones, el conjunto de los números naturales siempre es la mejor opción al escoger el UD de una interpretación.

Ejercicio 7.4

A. Demuestre que cada una de las siguientes fórmulas no es una tautología en *LC* construyendo un contramodelo para la fórmula.

1. $(\exists x)\mathrm{C}x \supset (\forall x)\mathrm{C}x$
2. $(\forall x)(\mathrm{A}x \supset \mathrm{C}x) \supset (\forall x)\mathrm{C}x$
3. $(\forall y)(\mathrm{A}y \supset \mathrm{B}y) \supset (\exists y)(\mathrm{A}y \ \&\ \mathrm{B}y)$
4. $(\exists x)(\mathrm{A}x \vee \mathrm{B}x) \supset [(\exists x)\mathrm{A}x \supset (\exists x){\sim}\mathrm{B}x]$
5. $(\forall w)(\exists y)\mathrm{D}wy \supset (\exists y)(\forall w)\mathrm{D}wy$
6. $(\forall z)(\mathrm{E}z\mathrm{a} \vee \mathrm{F}z) \supset [(\forall x)\mathrm{E}x\mathrm{a} \vee (\forall x)\mathrm{F}x]$
7. $((\forall z)\mathrm{A}z \supset (\forall y)\mathrm{B}y) \supset (\forall x)(\mathrm{A}x \supset \mathrm{B}x)$
8. $(\forall y)[\mathrm{A}y \supset (\forall z)\mathrm{B}z] \supset (\forall x)[\mathrm{B}x \supset (\forall w)\mathrm{A}w]$
9. $(\forall x){\sim}\mathrm{B}x \supset (\forall y)(\mathrm{A}yy \supset \mathrm{B}y)$
10. $(\exists x)(\mathrm{A}x \ \&\ \mathrm{C}x) \supset {\sim}(\forall x)(\mathrm{A}x \equiv \mathrm{C}x)$

B. Demuestre que cada una de las siguientes fórmulas no es una contradicción en *LC* construyendo un modelo para la fórmula.

1. $(\exists y)\mathrm{A}y \ \&\ (\exists y){\sim}\mathrm{A}y$
2. $({\sim}\mathrm{Ag} \supset {\sim}\mathrm{Dg}) \supset (\exists x)\mathrm{A}x$
3. $(\forall x)(\mathrm{A}x \supset \mathrm{C}x) \ \&\ {\sim}(\forall x)(\mathrm{C}x \supset \mathrm{A}x)$
4. $(\forall x)(\mathrm{A}x \supset \mathrm{C}x) \ \&\ (\forall x)(\mathrm{C}x \supset {\sim}\mathrm{A}x)$
5. $((\exists z)\mathrm{B}z \ \&\ (\exists z)\mathrm{C}z) \ \&\ {\sim}(\exists z)(\mathrm{B}z \ \&\ \mathrm{C}z)$
6. $(\forall y)(\mathrm{B}y \equiv \mathrm{A}y) \supset (\exists y)(\mathrm{B}y \ \&\ \mathrm{A}y)$
7. ${\sim}(\forall w)(\forall y)\mathrm{D}wy \equiv (\forall x)\mathrm{D}xx$
8. $(\exists z)((\exists w)\mathrm{C}w \supset {\sim}\mathrm{C}z)$
9. $(\exists x)(\forall y)\mathrm{A}xy \vee {\sim}(\forall y)(\exists x)\mathrm{A}xy$
10. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(\mathrm{F}xy \ \&\ \mathrm{F}yz) \supset \mathrm{F}xz] \ \&\ [(\forall x)(\exists y)\mathrm{F}xy \ \&\ (\forall z){\sim}\mathrm{F}zz]$

C. Demuestre que cada una de las siguientes fórmulas es semánticamente indeterminada en *LC* construyendo un modelo y un contramodelo para la fórmula.

1. $\mathrm{Kj} \equiv (\mathrm{Mj} \vee {\sim}\mathrm{Kj})$
2. $(\mathrm{Ma} \ \&\ \mathrm{Mb}) \ \&\ (\exists x){\sim}\mathrm{M}x$

Cap-7.pmd 243 13/07/07, 03:22 p.m.

3. $(\exists x)(\mathrm{N}x \;\&\; \mathrm{O}x) \supset (\exists x)({\sim}\mathrm{N}x \;\&\; {\sim}\mathrm{O}x)$
4. $(\exists z)\mathrm{I}z \supset (\forall w)(\mathrm{J}w \supset \mathrm{I}w)$
5. $(\forall y)\mathrm{Kt}y \supset (\forall y){\sim}\mathrm{Kt}y$
6. $(\forall w)(\mathrm{L}w \supset \mathrm{N}w) \supset (\exists y)(\mathrm{L}y \;\&\; \mathrm{N}y)$
7. $(\forall x)(\forall y)[(\mathrm{P}xy \vee \mathrm{P}yx) \supset \mathrm{P}yy]$
8. $(\forall x)(\exists y)(\exists z)[\mathrm{R}x \supset (\mathrm{P}y \;\&\; \mathrm{S}z)]$
9. $(\forall z)(\mathrm{J}z \vee \mathrm{K}z) \equiv (\exists y)(\mathrm{J}y \;\&\; \mathrm{K}y)$
10. $({\sim}(\exists y)\mathrm{Q}y \vee {\sim}(\exists y)\mathrm{R}y) \vee (\forall y)(\mathrm{Q}y \;\&\; \mathrm{R}y)$

D*. Pruebe que cada una de las siguientes fórmulas es una tautología en *LC* utilizando las reglas de valuación.

1. $(\forall x)\mathrm{A}x \supset ((\exists y)\mathrm{B}y \supset (\forall x)\mathrm{A}x)$
2. $(\forall x)(\mathrm{A}x \supset {\sim}{\sim}\mathrm{A}x)$
3. $(\exists x)(\mathrm{A}x \;\&\; \mathrm{B}x) \supset ((\exists x)\mathrm{A}x \;\&\; (\exists x)\mathrm{B}x)$
4. $(\forall x)\mathrm{D}x\mathrm{b} \vee (\exists x){\sim}\mathrm{D}x\mathrm{b}$

7.5 Equivalencia semántica

En esta sección estudiaremos la noción de equivalencia en *LC*. La definición es como sigue:

> Dos fórmulas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ de *LC* son ***equivalentes en LC*** si y sólo si no hay una valuación bajo la cual $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ tengan diferentes valores de verdad.

Consideremos las siguientes dos fórmulas:

(29) $\quad {\sim}(\exists x)\mathrm{F}x$

(30) $\quad (\forall x){\sim}\mathrm{F}x$

Las fórmulas son equivalentes en *LC*. Para demostrarlo, construiremos una prueba por casos, también conocida como un *dilema constructivo*. Comenzamos con una premisa disyuntiva, en este caso que la fórmula **(29)** es verdadera o falsa, y probamos que en ambos casos llegamos al mismo resultado.

Prueba: Supongamos que $\mathcal{V}({\sim}(\exists x)\mathrm{F}x) = \mathbf{V}$. Entonces, según las reglas de valuación para la negación, $\mathcal{V}((\exists x)\mathrm{F}x) = \mathbf{F}$. Ahora bien, $\mathcal{V}((\exists x)\mathrm{F}x) = \mathbf{F}$ ssi $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}(\mathrm{Fa}) = \mathbf{F}$ para cualquier $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}$. Como $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}(\mathrm{Fa}) = \mathbf{F}$ ssi $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}({\sim}\mathrm{Fa}) = \mathbf{V}$, $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}({\sim}\mathrm{Fa}) = \mathbf{V}$ para cualquier $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}$. Pero en tal caso, $\mathcal{V}((\forall x){\sim}\mathrm{F}x) = \mathbf{V}$. Por lo tanto, $\mathcal{V}({\sim}(\exists x)\mathrm{F}x) = \mathcal{V}((\forall x){\sim}\mathrm{F}x)$.

Cap-7.pmd 244 13/07/07, 03:22 p.m.

> Ahora supongamos que $\mathcal{V}(\sim(\exists x)Fx) = \mathbf{F}$. Entonces, según las reglas de valuación para la negación, $\mathcal{V}((\exists x)Fx) = \mathbf{V}$. Ahora bien, $\mathcal{V}((\exists x)Fx) = \mathbf{V}$ ssi $\mathcal{V}_a(Fa) = \mathbf{V}$ para alguna $\mathcal{V}_a$. Como $\mathcal{V}_a(Fa) = \mathbf{V}$ ssi $\mathcal{V}_a(\sim Fa) = \mathbf{F}$, $\mathcal{V}_a(\sim Fa) = \mathbf{F}$ para alguna $\mathcal{V}_a$. Pero en tal caso, $\mathcal{V}((\forall x)\sim Fx) = \mathbf{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{V}(\sim(\exists x)Fx) = \mathcal{V}((\forall x)\sim Fx)$.

Con la noción de equivalencia en *LC* ocurre lo mismo que con las nociones de tautología, contradicción e indeterminación semántica: no existe un procedimiento mecánico para decidir si dos fórmulas son equivalentes o no. Como dos fórmulas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son equivalentes si y sólo si $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$, para probar su equivalencia tendríamos que probar que el bicondicional es una tautología, lo cual es muy difícil en la mayoría de los casos.

Lo que sí es posible demostrar sin mucha dificultad es que dos fórmulas no son equivalentes en *LC*. Basta con encontrar una valuación bajo la cual tengan diferentes valores de verdad. Por ejemplo, demostraremos que las siguientes fórmulas no son equivalentes en *LC*:

(31) $(\forall x)(Rx \supset Sb)$

(32) $(\forall x)Rx \supset Sb$

Construiremos una interpretación bajo la cual la primera fórmula es falsa y la segunda es verdadera. Para construir la interpretación, debemos basarnos en las reglas de valuación del condicional. Si "Sb" es verdadera bajo alguna interpretación, las dos fórmulas serán verdaderas, así que debemos encontrar una interpretación bajo la cual "Sb" sea falsa. Si queremos que "$(\forall x)(Rx \supset Sb)$" sea falsa, debe haber al menos un caso en el que el antecedente del condicional sea verdadero, es decir, debe haber al menos un elemento del UD en la extensión de "R". Por otra parte, para que "$(\forall x)Rx \supset Sb$" sea verdadera, "$(\forall x)Rx$" debe ser falsa dado que "Sb" es falsa. En otras palabras, debe haber un elemento del UD fuera de la extensión de "R". En resumen, "b" no debe estar en la extensión de "S", y debe haber al menos un elemento del UD dentro de la extensión de "R" y uno fuera de ella. La siguiente interpretación cumple esas condiciones.

UD:	Los números enteros positivos
R*x*:	*x* es primo
S*x*:	*x* es par
b:	1

Bajo esta interpretación, "$(\forall x)(Rx \supset Sb)$" es falsa porque hay elementos del UD que no cumplen con la condición "$Rx \supset Sb$". El número 3 es un ejemplo: 3 es un número primo, pero el número 1 no es un número par. Por su parte, bajo esta interpretación "$(\forall x)Rx \supset Sb$" es verdadera pues es falso que todos los números enteros positivos sean primos.

Probaremos ahora que las siguientes fórmulas tampoco son equivalentes en *LC*.

(33) $(\exists y)(Ay \supset (\forall x)Bx)$

(34) $(\exists y)Ay \supset (\forall x)Bx$

Supongamos que la segunda fórmula es falsa. En tal caso, debe haber un elemento del UD en la extensión de "A" para que el antecedente sea verdadero, y al menos uno que no esté en la extensión de "B" para que el consecuente sea falso. Ahora bien, como hay al menos un elemento que no está en la extensión de "B", el consecuente en "$(\exists y)(Ay \supset (\forall x)Bx)$" también es falso. Por lo tanto, si queremos que la fórmula **(33)** sea verdadera, el antecedente también debe ser falso, es decir, debe haber al menos un elemento del UD que no esté en la extensión de "A". En resumen, debe haber al menos un elemento del UD en "A", otro fuera de "A" y al menos uno fuera de "B". La siguiente interpretación cumple estas condiciones:

UD: Los números enteros positivos

Ax: x es impar
Bx: x es primo

"$(\exists y)(Ay \supset (\forall x)Bx)$" es verdadera bajo esta interpretación porque hay al menos un número que no es impar. Y "$(\exists y)Ay \supset (\forall x)Bx$" es falsa porque hay al menos un impar pero no todos los números enteros positivos son primos.

Ejercicio 7.5

A. Demuestre que los siguientes pares de fórmulas no son semánticamente equivalentes construyendo una interpretación bajo la cual una de las fórmulas sea verdadera y la otra falsa.

1.	$(\exists x)(Ax \supset Ba)$	$(\exists x)Ax \supset Ba$
2.	$(\exists y)(Ay \vee Ba)$	$(\exists y)(Ay \vee Bb)$
3.	$(\forall x)(Ax \vee Bx)$	$(\forall x)Ax \vee (\forall x)Bx$
4.	$(\exists z)(Az \;\&\; Bz)$	$(\exists z)Az \;\&\; (\exists z)Bz$
5.	$(\forall y)(Ay \equiv By)$	$(\exists y)Ay \equiv (\exists y)By$
6.	$(\exists x)(Ax \equiv Bx)$	$(\exists x)Ax \equiv (\exists x)Bx$
7.	$(\exists x)(Ax \;\&\; (\forall y)Cyx)$	$(\forall x)(Ax \supset (\forall y)Cyx)$
8.	$(\forall x)(Ax \supset Bx)$	$(\forall y)((\forall x)Ax \supset By)$

B*. Pruebe que los siguientes pares de fórmulas son semánticamente equivalentes en *LC* utilizando las reglas de valuación.

1.	$(\forall x)Fx \supset Ga$	$(\exists x)(Fx \supset Ga)$

Cap-7.pmd 246 13/07/07, 03:22 p.m.

2.	$\sim(\exists x)(Fx \;\&\; \sim Gx)$	$(\forall x)(Fx \supset Gx)$
3.	$(\exists x)(Fx \vee Gx)$	$\sim(\forall y)(\sim Fy \;\&\; \sim Gy)$
4.	$(\exists x)Fx \supset Gb$	$(\forall x)(Fx \supset Gb)$

7.6 Consistencia semántica

Definiremos ahora las nociones de consistencia e inconsistencia de un conjunto en *LC*:

> Un conjunto de fórmulas de *LC* es ***consistente en LC*** si y sólo si hay al menos una valuación bajo la cual todos los elementos del conjunto sean verdaderos. Un conjunto de fórmulas de *LC* es ***inconsistente en LC*** si y sólo si el conjunto no es consistente en *LC*.

Llamaremos a una valuación o interpretación bajo la cual todos los elementos de un conjunto sean verdaderos un ***modelo*** del conjunto. Así, para probar la consistencia en *LC* de un conjunto de fórmulas basta con encontrar un modelo del mismo. El siguiente conjunto es consistente en *LC*:

(35) $\{\sim Lba,\ (\forall x)Lax,\ Lab,\ (\exists x)\sim Lxa\}$

como lo demuestra la siguiente interpretación:

UD: Los números enteros positivos

Lxy: x es menor o igual a y
a: 1
b: 1969

La primera fórmula es verdadera porque es falso que 1969 sea menor o igual a 1; la segunda es verdadera porque 1 es menor o igual a todos los enteros positivos; la tercera es verdadera porque 1 es menor o igual a 1969; y la cuarta es verdadera porque existe un número que no es menor o igual a 1.

Ahora consideremos el siguiente conjunto:

(36) $\{(\forall x)(Fx \supset (\forall y)Gy),\ (\forall x)(Fx \supset \sim(\exists y)Gy)\}$

El conjunto es consistente en *LC* bajo la siguiente interpretación:

UD: Los números enteros positivos

Fx: x es negativo
Gx: x es primo

Cap-7.pmd 247 13/07/07, 03:22 p.m.

Las dos fórmulas son verdaderas porque el antecedente de los condicionales es falso en ambos casos.

Aunque podemos probar que un conjunto es consistente en *LC* considerando una sola interpretación, no podemos probar su inconsistencia de la misma manera. Todas las fórmulas de un conjunto pueden ser falsas bajo una interpretación, pero eso no implica que no exista una interpretación bajo la cual todas sean verdaderas. Para probar la inconsistencia del conjunto considerando sus posibles interpretaciones tendríamos que recorrer un número infinito de ellas, lo cual es imposible. Sin embargo, en muchos casos podemos utilizar las reglas de valuación de las fórmulas de *LC* para construir una prueba relativamente sencilla, como en el siguiente ejemplo. Probaremos que el siguiente conjunto es inconsistente en *LC*. La prueba consiste en una reducción al absurdo de la suposición de que el conjunto es consistente en *LC*.

(37) $\{(\exists y)(\mathrm{F}y \;\&\; {\sim}\mathrm{N}y),\ (\forall y)(\mathrm{F}y \supset \mathrm{N}y)\}$

Prueba: Supongamos que el conjunto es consistente, es decir, que $\mathcal{V}((\forall y)(\mathrm{F}y \supset \mathrm{N}y)) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}((\exists y)(\mathrm{F}y \;\&\; {\sim}\mathrm{N}y)) = \mathbf{V}$ bajo alguna valuación $\mathcal{V}$. Si $\mathcal{V}((\exists y)(\mathrm{F}y \;\&\; {\sim}\mathrm{N}y)) = \mathbf{V}$, entonces $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}(\mathrm{Fa} \;\&\; {\sim}\mathrm{Na}) = \mathbf{V}$ para alguna $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}$. Y si $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}(\mathrm{Fa} \;\&\; {\sim}\mathrm{Na}) = \mathbf{V}$, entonces $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}(\mathrm{Fa}) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}({\sim}\mathrm{Na}) = \mathbf{V}$. Ahora bien, si $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}({\sim}\mathrm{Na}) = \mathbf{V}$, entonces $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}(\mathrm{Na}) = \mathbf{F}$. Como $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}(\mathrm{Fa}) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}(\mathrm{Na}) = \mathbf{F}$ para alguna $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}$, entonces $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}(\mathrm{Fa} \supset \mathrm{Na}) = \mathbf{F}$ para alguna $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}$. Pero en tal caso, $\mathcal{V}((\forall y)(\mathrm{F}y \supset \mathrm{N}y)) = \mathbf{F}$, lo cual contradice nuestra suposición inicial.

En el caso de la consistencia semántica, existe un resultado análogo al *Teorema de Löwenheim-Skolem*. Si un conjunto de fórmulas es consistente en *LC* bajo una valuación con un UD de cualquier cardinalidad, también es consistente bajo una interpretación cuyo UD sean los números naturales. Una consecuencia del teorema es la *Paradoja de Skolem*. Supongamos que un conjunto de fórmulas es seleccionado para representar un sistema con un dominio no enumerable, como el sistema aritmético de los números reales. Supongamos también que el conjunto es consistente bajo la interpretación deseada. Lo que afirma el teorema es que ese mismo conjunto también será consistente bajo una interpretación diferente cuyo dominio sean los números naturales, es decir, bajo una interpretación con un dominio demasiado pequeño para contener todos los números reales. Estas interpretaciones son indeseables porque el fin que se persigue al seleccionar estas fórmulas es lograr encontrar una manera única y no ambigua de representar un sistema de cosas. El teorema afirma que es imposible simbolizar el sistema de los números reales de manera única porque cualquier conjunto de fórmulas que cumpla ese propósito al mismo tiempo simboliza un sistema "fantasma" de números naturales.

Cap-7.pmd 248 13/07/07, 03:22 p.m.

Ejercicio 7.6

A. Demuestre que cada uno de los siguientes conjuntos de fórmulas son consistentes en *LC* construyendo una interpretación bajo la cual todas las fórmulas sean verdaderas.

1. $\{\mathrm{Rc}, (\exists w)\mathrm{M}w\mathrm{c}, \sim(\forall y)\mathrm{R}y\}$
2. $\{\mathrm{Bmo}, \sim(\forall x)\mathrm{Bm}x, (\exists y)\sim\mathrm{B}y\mathrm{o}\}$
3. $\{(\exists x)\mathrm{M}x, \sim(\forall z)(\mathrm{M}z \vee \mathrm{N}z), (\exists y)\mathrm{N}y\}$
4. $\{(\exists y)\sim\mathrm{M}y, (\exists x)\mathrm{M}x \vee (\exists x)\mathrm{N}x, (\exists x)\sim\mathrm{N}x\}$
5. $\{(\forall w)(\mathrm{U}w \supset \mathrm{T}w), (\forall x)(\mathrm{R}x \supset \mathrm{S}x), (\forall y)(\mathrm{S}y \supset \sim\mathrm{T}y)\}$
6. $(\forall y)(\mathrm{Fa}y \equiv \mathrm{Ga}y), \sim\mathrm{Fab}, \sim\mathrm{Gba}\}$
7. $\{(\forall x)(\mathrm{G}x \supset (\exists y)(\mathrm{F}y \;\&\; \mathrm{H}xy)), (\forall y)(\forall x)(\mathrm{F}y \supset \sim\mathrm{H}xy)\}$
8. $\{(\forall y)(\mathrm{D}y \supset (\exists x)\mathrm{E}xy), (\exists x)\mathrm{D}x, (\forall x)\sim\mathrm{E}xx\}$
9. $\{\sim(\forall x)\sim(\mathrm{B}x \supset \mathrm{A}x), \sim(\forall z)(\mathrm{B}z \supset \mathrm{A}z)\}$
10. $\{(\exists x)\sim\mathrm{B}x, (\forall y)(\mathrm{B}y \equiv (\forall z)\mathrm{C}yz), (\exists x)(\exists y)\mathrm{C}xy\}$

B*. Pruebe que cada uno de los siguientes conjuntos es inconsistente en *LC*.

1. $\{(\forall x)\mathrm{Bex}, (\exists y)\sim\mathrm{Be}y\}$
2. $\{(\forall x)(\mathrm{B}x\mathrm{a} \;\&\; \mathrm{Ba}x), (\exists y)\sim\mathrm{Ba}y\}$
3. $\{(\exists x)(\mathrm{B}x \;\&\; \mathrm{C}x), (\forall x)\sim(\mathrm{B}x \vee \mathrm{C}x)\}$
4. $\{\mathrm{Ba}, (\exists y)\mathrm{Da}y, (\mathrm{Ba} \supset (\forall y)\sim\mathrm{Da}y)\}$

7.7 Validez e implicación semántica

Las últimas dos nociones semánticas que consideraremos son las de validez e implicación semántica en *LC*. La definición de la primera es como sigue:

> Un argumento de *LC* es ***válido en LC*** si y sólo si no hay ninguna valuación bajo la cual todas las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. Un argumento de *LC* es ***inválido en LC*** si y sólo si no es válido en *LC*.

El siguiente argumento es válido en *LC*:

(38)
$$\begin{array}{l} (\exists x)(\mathrm{R}x \vee \mathrm{S}x) \\ \underline{(\forall x)\sim\mathrm{R}x} \\ (\exists x)\mathrm{S}x \end{array}$$

No podemos probar la validez del argumento considerando interpretaciones concretas, intentando mostrar que en ninguna de ellas las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa. La razón es obvia: hay un número infinito de interpretaciones

Cap-7.pmd 249 13/07/07, 03:22 p.m.

posibles. Pero sí podemos usar las reglas de valuación para construir una prueba de la validez del argumento. La prueba es una reducción al absurdo de la suposición de que el argumento es semánticamente inválido en *LC*:

> **Prueba**: Supongamos que el argumento es inválido, es decir, que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa bajo alguna valuación: $\mathcal{V}((\exists x)(\mathrm{R}x \vee \mathrm{S}x)) = \mathbf{V}$, $\mathcal{V}((\forall x){\sim}\mathrm{R}x) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}((\exists x)\mathrm{S}x) = \mathbf{F}$. Si $\mathcal{V}((\forall x){\sim}\mathrm{R}x) = \mathbf{V}$, entonces $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}({\sim}\mathrm{Ra}) = \mathbf{V}$ para cualquier $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}$. Como $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}({\sim}\mathrm{Ra}) = \mathbf{V}$ ssi $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}(\mathrm{Ra}) = \mathbf{F}$, entonces $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}(\mathrm{Ra}) = \mathbf{F}$ para cualquier $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}$. Por otra parte, si $\mathcal{V}((\exists x)\mathrm{S}x) = \mathbf{F}$, entonces $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}(\mathrm{Sa}) = \mathbf{F}$ para cualquier $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}$. En resumen, $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}(\mathrm{Ra}) = \mathbf{F}$ y $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}(\mathrm{Sa}) = \mathbf{F}$ para cualquier $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}$. Pero en tal caso, según las reglas de valuación de la disyunción, $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}(\mathrm{Ra} \vee \mathrm{Sa}) = \mathbf{F}$ para cualquier $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}$. En consecuencia, $\mathcal{V}((\exists x)(\mathrm{R}x \vee \mathrm{S}x)) = \mathbf{F}$, lo cual contradice nuestra suposición inicial.

Una vez más, este tipo de pruebas se vuelven inmanejables cuando se incluyen más premisas y fórmulas con cuantificación múltiple. En contraste, es posible probar fácilmente que un argumento es inválido en *LC*. La prueba consiste en construir una interpretación bajo la cual las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. El siguiente argumento, por ejemplo, es inválido en *LC*:

(39)
$$\begin{array}{l} {\sim}(\forall y)\mathrm{D}y \\ (\exists y)\mathrm{D}y \supset (\exists x)\mathrm{D}x \\ \hline (\forall x){\sim}\mathrm{D}x \end{array}$$

Construiremos una interpretación en la que "$\sim(\forall y)\mathrm{D}y$" y "$(\exists y)\mathrm{D}y \supset (\exists x)\mathrm{D}x$" sean verdaderas y "$(\forall x){\sim}\mathrm{D}x$" falsa. La primera premisa es verdadera si existe al menos un elemento del UD fuera de la extensión de "D". Para que el consecuente de la segunda premisa sea verdadero, y por ende para que la fórmula sea verdadera, basta con que haya un elemento del UD en la extensión de "D". Y finalmente, para que la conclusión sea falsa debe haber al menos un elemento del UD en la extensión de "D", que es exactamente lo que requiere la segunda premisa. En resumen, debe haber un elemento del UD en la extensión de "D" y uno fuera de ella. La siguiente interpretación cumple estas condiciones:

UD: Los números enteros positivos

Dx: x es impar

La primera premisa, "$\sim(\forall y)\mathrm{D}y$", es verdadera porque hay al menos un número entero positivo que no es impar. La segunda premisa, "$(\exists y)\mathrm{D}y \supset (\exists x)\mathrm{D}x$", es verdadera porque hay al menos un impar. Y finalmente, la conclusión, "$(\forall x){\sim}\mathrm{D}x$", es falsa porque existe al menos un número impar.

Consideremos un segundo ejemplo:

(40) $\sim(\forall x)(Nx \equiv Mx)$
$\sim Mb$
$\overline{\sim(\exists x)Nx}$

Construiremos una interpretación en la que "$\sim(\forall x)(Nx \equiv Mx)$" y "~Mb" sean verdaderas y "$\sim(\exists x)Nx$" falsa. Para que la primera premisa sea verdadera, debe haber al menos un elemento del UD que no cumpla la condición "$Nx \equiv Mx$". La segunda premisa afirma que el objeto denotado por "b" no está en la extensión de "M". Finalmente, para que la conclusión sea falsa, debe haber al menos un elemento del UD en la extensión de "N". La siguiente interpretación cumple con estas condiciones:

UD: Los números enteros positivos

Mx: x es mayor que 10
Nx: x es primo
b: 3

El número 3 es una contraejemplo de la fórmula "$(\forall x)(Nx \equiv Mx)$" porque es primo pero no es mayor que 10; por lo tanto "$\sim(\forall x)(Nx \equiv Mx)$" es verdadera. Es falso que 3 sea mayor que 10, por lo tanto "~Mb" es verdadera. Y es falso que ningún número sea primo, por lo tanto "$\sim(\exists x)Nx$" es falsa. De esta manera demostramos que el argumento es inválido en *LC*.

Hay argumentos que resultan ser semánticamente inválidos bajo una interpretación con un UD de *n* elementos, pero cuya invalidez no puede ser demostrada en una interpretación cuyo UD tenga un número *menor* de elementos. En particular, hay argumentos cuya invalidez no puede ser demostrada en una interpretación cuyo UD sea finito; sólo puede ser demostrada si el UD es infinito. Por otra parte, si la invalidez de un argumento ha sido demostrada bajo una interpretación con un UD de *n* elementos, también puede ser demostrada bajo una interpretación cuyo UD tenga un número *mayor* de elementos. Lo anterior significa que si utilizamos siempre una interpretación cuyo UD sean los números naturales, siempre podremos demostrar la invalidez de un argumento. Ésta es otra consecuencia del Teorema de Löwenheim-Skolem.

Finalmente, estudiaremos el concepto de implicación semántica en *LC*. Al igual que en la lógica proposicional, cuando un argumento es semánticamente válido diremos que las premisas *implican semánticamente* a la conclusión, y que la conclusión es una *consecuencia semántica* de las premisas. La implicación semántica es una relación que existe entre un conjunto de fórmulas y una fórmula individual. La definimos de la siguiente manera:

> Un conjunto Γ de fórmulas de *LC* ***implica semánticamente en LC*** a una fórmula $\mathcal{P}$ si y sólo si no hay ninguna valuación bajo la cual todos los miembros de Γ sean verdaderos y $\mathcal{P}$ sea falsa.

De nuevo utilizaremos el símbolo "$\models$" para denotar la implicación semántica. Podemos reescribir el argumento **(39)**, por ejemplo, en los siguientes términos:

(39a) $\{\sim(\forall y)\mathrm{D}y,\ (\exists y)\mathrm{D}y \supset (\exists x)\mathrm{D}x)\} \models$ "$(\forall x){\sim}\mathrm{D}x$"

Recordemos que la fórmula implicada está entre comillas porque el signo "$\models$" no es un conector veritativo-funcional, sino que hace parte de nuestro metalenguaje. Su labor no es establecer una relación lógica entre las fórmulas, sino que se limita a indicarnos, en el metalenguaje, que la fórmula "$(\forall x){\sim}\mathrm{D}x$" es una consecuencia semántica del conjunto formado por las fórmulas "$\sim(\forall y)\mathrm{D}y$" y "$(\exists y)\mathrm{D}y \supset (\exists x)\mathrm{D}x)$".

Ejercicio 7.7

A. Demuestre que cada uno de los siguientes argumentos es inválido en *LC* construyendo una interpretación en la cual las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa.

1. $\begin{array}{l} \mathrm{Iap} \\ \hline \mathrm{Ipa} \supset \mathrm{Iaa} \end{array}$

2. $\begin{array}{l} (\exists x){\sim}\mathrm{V}x\mathrm{a} \\ \hline (\forall x){\sim}\mathrm{V}x\mathrm{a} \end{array}$

3. $\begin{array}{l} (\exists x)(\mathrm{A}x \ \&\ \mathrm{B}x) \\ (\exists x)(\mathrm{A}x \ \&\ \mathrm{C}x) \\ \hline (\exists x)(\mathrm{B}x \ \&\ \mathrm{C}x) \end{array}$

4. $\begin{array}{l} (\forall y)(\mathrm{M}y \supset \mathrm{N}y) \\ \mathrm{Nb} \\ \hline \mathrm{Mb} \end{array}$

5. $\begin{array}{l} (\forall x)(\mathrm{A}x \supset \mathrm{B}x) \supset (\exists x)\mathrm{C}x \\ (\forall x)(\mathrm{C}x \supset \mathrm{B}x) \\ \hline (\forall x)({\sim}\mathrm{A}x \vee \mathrm{B}x) \end{array}$

6. $\begin{array}{l} {\sim}\mathrm{Sc} \vee ({\sim}(\exists y)\mathrm{S}y \supset (\exists y)\mathrm{S}y) \\ \hline (\exists x)\mathrm{S}x \end{array}$

7. $\begin{array}{l} (\forall z)(\mathrm{K}z \supset \mathrm{L}z) \\ {\sim}(\exists z)\mathrm{K}z \\ \hline (\forall z){\sim}\mathrm{L}z \end{array}$

8. $\begin{array}{l} (\forall w)(\forall y)(\mathrm{A}wy \supset \mathrm{B}wy) \\ \hline (\forall w)(\forall y)(\mathrm{A}wy \supset (\mathrm{B}wy \ \&\ \mathrm{B}y\mathrm{w})) \end{array}$

9. $\begin{array}{l} (\forall x)(\mathrm{H}x \supset \mathrm{I}xx) \\ (\exists y)\mathrm{H}y \\ \hline (\exists y)(\forall x)(\mathrm{H}y \ \&\ \mathrm{I}yx) \end{array}$

10. $\begin{array}{l} (\exists x)\mathrm{T}x\mathrm{c} \vee \mathrm{Ac} \\ (\exists x){\sim}\mathrm{T}x\mathrm{d} \vee \mathrm{Ad} \\ \hline (\exists x)\mathrm{T}x\mathrm{c} \end{array}$

Cap-7.pmd 252 29/08/2007, 14:38

B*. Pruebe que cada uno de los siguientes argumentos es válido en *LC* utilizando las reglas de valuación.

1. $\dfrac{\sim(\forall x)Bx}{(\exists x)\sim Bx}$

2. $(\forall x)(Mx \supset Na)$
   $\dfrac{(\exists x)Mx}{Na}$

3. $\dfrac{(\exists x)Px \;\&\; (\exists y)Dy}{(\exists x)Px \equiv (\exists y)Dy}$

4. $(\forall y)(\sim Fy \vee (\exists x)Gx)$
   $\dfrac{(\exists y)Fy}{(\exists x)Gx}$

7.8 Semántica para *LCI*

La formulación de una semántica para la lógica cuantificada con identidad sólo requiere de un par de adiciones a la semántica de *LC*. Las definiciones de las propiedades semánticas de las fórmulas de *LCI* son idénticas a las de *LC*, pero reemplazando "*LC*" por "*LCI*". Además, debemos establecer una regla de valuación para las fórmulas que contengan el operador de identidad:

> Para cualquier valuación $\mathcal{V}$:
>
> 1. Si $\mathcal{P}$ es una fórmula de *LC* de forma **Iab**, donde **I** es el predicado de identidad y **a** y **b** son constantes, entonces:
> $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ = **V** si y sólo si $\mathcal{V}$(**a**) = $\mathcal{V}$(**b**).
> $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ = **F** en caso contrario.

Seguiremos la convención introducida en el capítulo anterior de representar el predicado de identidad con el símbolo "=".

Podemos utilizar esta regla de valuación, junto con las presentadas anteriormente, para probar que una fórmula de *LCI* posee ciertas propiedades semánticas. Por ejemplo, podemos demostrar que la siguiente fórmula es una tautología de *LCI*:

(41) $(\forall x)(\forall y)[\sim(x = y) \vee (Fx \supset Fy)]$

Prueba: Supongamos que la fórmula no es una tautología de *LCI*, es decir, que $\mathcal{V}((\forall x)(\forall y)[\sim(x = y) \vee (Fx \supset Fy)])$ = **F** para alguna $\mathcal{V}$. En tal caso, $\mathcal{V}_a((\forall y)[\sim(a = y) \vee (Fa \supset Fy)])$ = **F** para alguna $\mathcal{V}_a$, y $\mathcal{V}_{ab}([\sim(a = b) \vee (Fa \supset Fb)])$ = **F** para alguna $\mathcal{V}_{ab}$. Según las reglas de valuación de la disyunción, se sigue que $\mathcal{V}_{ab}(\sim(a = b))$ = **F** y $\mathcal{V}_{ab}(Fa \supset Fb)$ = **F.** Si $\mathcal{V}_{ab}(Fa \supset Fb)$ = **F**, entonces $\mathcal{V}_{ab}(Fa)$ = **V** y $\mathcal{V}_{ab}(Fb)$ = **F**, es decir,

$\mathcal{V}_{ab}(a) \in \mathcal{V}_{ab}(F)$ y $\mathcal{V}_{ab}(b) \notin \mathcal{V}_{ab}(F)$. Por otra parte, si $\mathcal{V}_{ab}(\sim(a = b)) = \mathbf{F}$, entonces $\mathcal{V}_{ab}(a = b) = \mathbf{V}$. En tal caso, $\mathcal{V}_{ab}(a) = \mathcal{V}_{ab}(b)$. Si $\mathcal{V}_{ab}(a) = \mathcal{V}_{ab}(b)$, entonces si $\mathcal{V}_{ab}(a) \in \mathcal{V}_{ab}(F)$, $\mathcal{V}_{ab}(b) \in \mathcal{V}_{ab}(F)$. Pero como no es posible que $\mathcal{V}_{ab}(b) \notin \mathcal{V}_{ab}(F)$ y $\mathcal{V}_{ab}(b) \in \mathcal{V}_{ab}(F)$, nuestra suposición inicial es falsa, es decir, la fórmula es una tautología de *LCI*.

Como la gran mayoría de las fórmulas que contienen el predicado de identidad requieren dos cuantificadores, sus pruebas formales son bastante complejas. Sin embargo, podemos demostrar con facilidad que una fórmula de *LCI* no es una tautología construyendo un contramodelo. Consideremos la siguiente fórmula:

(42) $(\forall x)(\forall y)[x = y \vee (\mathrm{F}x \supset \mathrm{F}y)]$

La fórmula no es una tautología en *LCI*. Para probarlo, construiremos un contramodelo con un dominio de dos elementos. Como se trata de dos objetos diferentes, el primer componente de la disyunción será falso. Si además el primer elemento del UD está en la extensión de “F” pero el segundo no, el segundo componente de la disyunción también será falso. Bajo estas condiciones, la disyunción es falsa y es una excepción a la afirmación universal. La siguiente interpretación cumple con estas condiciones:

UD: $\{1, 2\}$

F*x*: *x* es impar

También podemos demostrar fácilmente que el siguiente argumento es inválido:

(43)
$$\frac{(\forall x)(\exists y)\ x = y}{\mathrm{a} = \mathrm{b}}$$

La premisa es una tautología de *LCI*. Para cada miembro de cualquier UD siempre hay un elemento idéntico a él, a saber, él mismo. Pero el argumento es falso en cualquier interpretación bajo la cual “a” y “b” designen elementos diferentes del UD. Por ejemplo:

UD: Los números enteros positivos

a: 236

b: 983

Ejercicio 7.8

Construya un contramodelo para probar que cada una de las siguientes fórmulas no es una tautología en *LCI*.

1. $\mathrm{a} = \mathrm{c}\ \&\ (\forall x)(\mathrm{Db}x\ \&\ {\sim}\mathrm{D}x\mathrm{a})$

Cap-7.pmd 254 13/07/07, 03:22 p.m.

2. (Fa & a = b) & ~Gb
3. $(\forall x)(\forall y)[\sim(x = y) \supset Gxy]$
4. $(\forall x)(\forall y)[\sim(x = y) \supset (Pxy \vee Pyx)]$
5. $(\exists x)([Fx \,\&\, (\forall y)(Fy \supset y = x)] \,\&\, \sim Gx)$
6. $(\exists z)(\forall y)([(Sz \,\&\, Tz) \,\&\, ((Sy \,\&\, Ty) \supset y = z)] \,\&\, \sim Rz)$
7. $[((\exists x)\sim Pxx \supset a = a) \,\&\, a = c] \supset Pac$
8. $((Gn \supset m = n) \,\&\, (Gn \supset Hn)) \supset (\sim Gn \supset Hm)$

7.9* El fragmento monádico de *LC*

A lo largo de este capítulo hemos mencionado varias veces que no existe un algoritmo o procedimiento mecánico de decisión para determinar las propiedades semánticas de cualquier fórmula, conjunto o argumento de *LC*. Esta afirmación fue demostrada en 1936 por Alonzo Church y Alan Turing de manera independiente. La demostración fue su respuesta al famoso *Entscheidungsproblem* (problema de la decisión) propuesto por el matemático David Hilbert: "El problema de la decisión se resuelve cuando conozcamos un procedimiento que nos permita decidir en un número finito de operaciones la validez o satisfacibilidad de cualquier expresión lógica. (…) El problema de la decisión debe ser considerado el principal problema de la lógica matemática" (Hilbert & Ackerman, 1928: 77).

En la época en que Church y Turing demostraron que el *Entscheidungsproblem* era irresoluble, se sabía que varios fragmentos de la lógica de primer orden eran decidibles. En 1915 Löwenheim demostró que cuando una fórmula sólo contiene predicados monádicos, es posible utilizar un procedimiento mecánico de decisión para determinar sus propiedades semánticas[13]. En esta sección estudiaremos esta clase de fórmulas, conocidas como el fragmento monádico de *LC*[14].

Expresado en lenguaje contemporáneo, el teorema establecido por Löwenheim es el siguiente:

> **Teorema de Löwenheim**: Sea $\mathcal{P}$ una fórmula del fragmento monádico de *LC*. Si $\mathcal{P}$ es satisfacible, entonces tiene un modelo cuyo dominio contiene a lo sumo 2^n objetos, donde n es el número de predicados monádicos.

13. La prueba de Löwenheim establece este resultado para *LCI*. Aquí nos limitaremos al caso de *LC*.

14. El fragmento compuesto de fórmulas con predicados monádicos no es el único fragmento decidible de *LC*. Durante las décadas de 1920 y 1930, los lógicos más destacados de la época –Löwenheim, Skolem, Ackermann, Bernays, Schönfinkel, Gödel– contribuyeron al *Entscheidungsproblem* encontrando nuevos fragmentos decidibles. Por ejemplo, la clase Bernays-Schönfinkel (1928), que es la clase de fórmulas en forma normal prenexa en la cual todos los cuantificadores existenciales preceden a los cuantificadores universales, es decidible en *LC*. En los últimos años ha habido un renovado interés en encontrar nuevos fragmentos decidibles de *LC* debido a su utilidad en la ciencia de la computación.

Cap-7.pmd 255 13/07/07, 03:22 p.m.

Del teorema podemos extraer varios corolarios. Como una fórmula no es una tautología si y sólo si tiene un contramodelo, podemos establecer la siguiente afirmación:

> Sea $\mathcal{P}$ una fórmula del fragmento monádico de *LC*. Si $\mathcal{P}$ no es una tautología en *LC*, entonces tiene un contramodelo cuyo dominio contiene a lo sumo 2^n objetos, donde n es el número de predicados monádicos.

Este corolario sugiere inmediatamente un segundo corolario acerca de la equivalencia de dos fórmulas. Dos fórmulas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ no son equivalentes si y sólo si una fórmula de forma $\sim(\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q})$ no es una tautología. En consecuencia:

> Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ dos fórmulas del fragmento monádico de *LC*. Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ no son equivalentes en *LC*, entonces hay una valuación cuyo dominio contiene a lo sumo 2^n objetos, donde n es el número de predicados monádicos, bajo la cual las fórmulas tienen valores de verdad diferentes.

También es posible obtener un corolario acerca de la consistencia de los conjuntos de *LC*. Como un conjunto es consistente en *LC* si y sólo si la conjunción de las fórmulas que lo componen es satisfacible, podemos establecer el siguiente resultado:

> Sea Γ un conjunto de fórmulas del fragmento monádico de *LC*. Si Γ es consistente, entonces tiene un modelo cuyo dominio contiene a lo sumo 2^n objetos, donde n es el número de predicados monádicos.

Un conjunto *finitamente satisfacible* es un conjunto que es consistente en un modelo con un dominio finito. Del corolario anterior se sigue que si un conjunto de fórmulas del fragmento monádico de *LC* es consistente, entonces es finitamente satisfacible. La satisfacibilidad finita de un conjunto será un concepto central en el próximo capítulo, dedicado a los árboles de verdad.

Finalmente, el teorema también nos permite establecer el siguiente resultado acerca de los argumentos de *LC*. Un argumento es semánticamente inválido en *LC* si y sólo si la negación de su condicional material correspondiente es satisfacible. En consecuencia:

> Sea Σ un argumento que sólo contiene fórmulas del fragmento monádico de *LC*. Si Σ es inválido, tiene un contraejemplo en un modelo cuyo dominio contenga a lo sumo 2^n objetos, donde n es el número de predicados monádicos.

La posibilidad de determinar las propiedades semánticas de una fórmula del fragmento monádico de *LC* utilizando una valuación con un dominio finito nos permite darles un nuevo uso a las *expansiones semánticas* estudiadas en la sección 7.2.3. En esta sección transformaremos las expansiones semánticas en un procedimiento mecánico de decisión para el fragmento monádico de *LC*.

El uso de expansiones semánticas como fundamento de la interpretación sustitucional de los cuantificadores depende, según vimos, de dos supuestos:

1. El número de objetos en el dominio es finito.
2. Todos los objetos del dominio tienen un nombre.

El primer supuesto hace imposible el uso de expansiones semánticas en dominios infinitos. El segundo supuesto no nos permite hacer referencia a valuaciones que no nombren todos los objetos del UD. Estos dos impedimentos hacen que la interpretación sustitucional de los cuantificadores sea inaceptable. Sin embargo, como aquí sólo estamos interesados en valuaciones con dominios finitos y como no vamos a utilizar las expansiones semánticas para definir los cuantificadores sino para establecer un procedimiento mecánico de decisión, estos supuestos no son problemáticos.

Recordemos en qué consiste la expansión semántica de una fórmula. Una expansión semántica siempre es relativa a una valuación $\mathcal{V}$ con un UD finito de cardinalidad *n*. Antes de llevar a cabo la expansión, debemos seleccionar un conjunto de constantes $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ que representen a los *n* objetos del UD. Si la fórmula ya contiene constantes, éstas deben ser incluidas en el conjunto. Para asegurarnos de que cada objeto del UD reciba un nombre, se exige que $\mathcal{V}(\mathbf{a}_1) \neq \mathcal{V}(\mathbf{a}_2) \neq \ldots \neq \mathcal{V}(\mathbf{a}_n)$. Las constantes son asignadas alfabéticamente.

Como vimos en la sección 7.2.3, la expansión semántica de una fórmula de forma $(\forall\mathbf{x})\mathcal{P}$ es la *conjunción* de todas sus instancias de sustitución:

$$\mathcal{P}(\mathbf{a}_1/\mathbf{x})\ \&\ \mathcal{P}(\mathbf{a}_2/\mathbf{x})\ \&\ \ldots\ \&\ \mathcal{P}(\mathbf{a}_n/\mathbf{x})$$

donde $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ son las constantes seleccionadas. Por su parte, la expansión semántica de una fórmula de forma $(\exists\mathbf{x})\mathcal{P}$ es la disyunción de todas sus instancias de sustitución:

$$\mathcal{P}(\mathbf{a}_1/\mathbf{x}) \vee \mathcal{P}(\mathbf{a}_2/\mathbf{x}) \vee \ldots \vee \mathcal{P}(\mathbf{a}_n/\mathbf{x})$$

Es posible crear la expansión semántica de una fórmula que contenga predicados de cualquier grado, pero nos limitaremos a fórmulas que sólo contengan predicados monádicos.

Consideremos algunos ejemplos de expansiones semánticas. Generaremos la expansión semántica de la siguiente fórmula bajo una valuación con un universo de dos objetos:

(44) $(\forall x)\mathrm{F}x \vee (\exists y){\sim}\mathrm{F}y$

Cap-7.pmd 257 13/07/07, 03:22 p.m.

Inicialmente le asignamos un nombre a cada uno de los objetos del UD: {a, b}. A renglón seguido, expandimos la fórmula universalmente cuantificada:

(44a) (Fa & Fb) $\vee$ ($\exists y$)~Fy

Y finalmente, expandimos la fórmula existencialmente cuantificada:

(44b) (Fa & Fb) $\vee$ (~Fa $\vee$ ~Fb)

La fórmula **(44b)** es la expansión semántica de la fórmula **(44)** bajo una valuación con un dominio de dos objetos.

Consideremos ahora una fórmula con cuantificadores de rango superpuesto:

(45) ($\forall x$)($\forall y$)[(Mx & Nx) $\supset$ Sy]

Generaremos la expansión semántica de la fórmula en un universo de dos objetos. Le asignaremos los nombres {a, b} a los objetos del UD. Podemos comenzar la expansión con cualquiera de los dos cuantificadores. El orden es irrelevante porque el resultado final es el mismo. Comencemos con el cuantificador de "*x*". Debemos reemplazar todas las "*x*" en la formula por la constante "a", repetir el mismo procedimiento con la constante "b", y finalmente crear la conjunción de las dos fórmulas:

(45a) ($\forall y$)[(Ma & Na) $\supset$ Sy] & ($\forall y$)[(Mb & Nb) $\supset$ Sy]

Ahora expandimos cada una de las fórmulas en la conjunción reemplazando el cuantificador universal. Una vez más, reemplazamos todas las "*y*" por "a", después todas las "*y*" por "b", y creamos la conjunción de las dos fórmulas resultantes. Primero expandimos la fórmula de la izquierda:

(45b) ([(Ma & Na) $\supset$ Sa] & [(Ma & Na) $\supset$ Sb]) & ($\forall y$)[(Mb & Nb) $\supset$ Sy]

y finalmente expandimos la fórmula de la derecha:

(45c) ([(Ma & Na) $\supset$ Sa] & [(Ma & Na) $\supset$ Sb]) &
([(Mb & Nb) $\supset$ Sa] & [(Mb & Nb) $\supset$ Sb])

La fórmula **(45c)** es la expansión semántica de la fórmula **(45)** bajo una valuación con un dominio de dos objetos.

Nuestro tercer ejemplo es una fórmula que ya contiene constantes:

(46) ($\exists x$)(Dx $\supset$ Ba)

Expandiremos esta fórmula en un universo de dos objetos. Como la fórmula ya contiene la constante "a" que designa a algún elemento del UD, sólo necesitamos un nom-

Cap-7.pmd 258 13/07/07, 03:22 p.m.

bre más. Las constantes que utilizaremos en la expansión son, entonces, {a, b}. La expansión es:

(46a) $(\mathrm{Da} \supset \mathrm{Ba}) \vee (\mathrm{Db} \supset \mathrm{Ba})$

Finalmente, consideremos un ejemplo en el que los cuantificadores superpuestos son diferentes:

(47) $(\forall x)(\exists y)(\mathrm{C}x \supset \mathrm{D}y)$

Expandiremos esta fórmula en un universo de tres objetos, a los cuales les asignaremos los nombres: {a, b, c}. Comenzamos eliminando el cuantificador universal:

(47a) $[(\exists y)(\mathrm{Ca} \supset \mathrm{D}y)\ \&\ (\exists y)(\mathrm{Cb} \supset \mathrm{D}y)]\ \&\ (\exists y)(\mathrm{Cc} \supset \mathrm{D}y)$

Ahora, en cada una de las tres fórmulas existencialmente cuantificadas debemos reemplazar cada "*y*" por cada una de las constantes y crear su disyunción. Para mayor claridad, omitiremos algunos de los paréntesis interiores:

(47b) $[(\mathrm{Ca} \supset \mathrm{Da}) \vee (\mathrm{Ca} \supset \mathrm{Db}) \vee (\mathrm{Ca} \supset \mathrm{Dc})]\ \&\ [(\mathrm{Cb} \supset \mathrm{Da}) \vee (\mathrm{Cb} \supset \mathrm{Db}) \vee (\mathrm{Cb} \supset \mathrm{Dc})]\ \&\ [(\mathrm{Cc} \supset \mathrm{Da}) \vee (\mathrm{Cc} \supset \mathrm{Db}) \vee (\mathrm{Cc} \supset \mathrm{Dc})]$

Esta fórmula es la expansión semántica de la fórmula **(47)** bajo una valuación con un dominio de tres objetos. Es evidente que la expansión semántica de una fórmula no muy compleja es inmanejable en universos de más de tres objetos. Sin embargo, es posible programar una computadora para que genere la expansión semántica de cualquier fórmula, siempre y cuando el universo de discurso siga siendo finito.

La utilidad de las expansiones semánticas reside en que pueden ser evaluadas de acuerdo con las propiedades veritativo-funcionales de los conectores lógicos. En otras palabras, es posible crear una tabla de verdad para la expansión semántica de una fórmula cuantificada asignándoles valores de verdad a las fórmulas atómicas. Una vez construida la tabla de verdad, podemos usar la siguiente reformulación del teorema original de Löwenheim para determinar sus propiedades semánticas.

> Sea $\mathcal{P}$ una fórmula del fragmento monádico de *LC*. Si $\mathcal{P}$ es satisfacible en *LC*, entonces su expansión semántica bajo una valuación con un dominio de 2^n objetos tiene un modelo[15].

Si la expansión semántica no tiene un modelo, la fórmula original no es satisfacible; en otras palabras, la fórmula original es una contradicción en *LC*. Consideremos, por ejemplo, la siguiente fórmula:

15. En lo que sigue se sobreentiende que *n* es el número de predicados monádicos.

Cap-7.pmd 259 13/07/07, 03:22 p.m.

(48) $(\exists x)\sim Nx \equiv (\forall y)Ny$

La fórmula sólo tiene un predicado monádico, el predicado "N". Por lo tanto, se requiere una expansión semántica bajo una valuación con un dominio de 2 objetos:

(48a) $(\sim Na \vee \sim Nb) \equiv (Na \ \& \ Nb)$

La siguiente es la tabla de verdad de la expansión semántica de la fórmula **(48)**:

Na	Nb	(~Na	∨	~Nb)	≡	(Na	&	Nb)
V	V	F V	F	F V	F	V	V	V
V	F	F V	V	V F	F	V	F	F
F	V	V F	V	F V	F	F	F	V
F	F	V F	V	V F	F	F	F	F

Como la expansión semántica no tiene un modelo, es decir, no existe una valuación bajo la cual sea verdadera, la fórmula original es una contradicción en *LC*.

Resultados análogos se cumplen para los demás conceptos semánticos:

> Sea $\mathcal{P}$ una fórmula del fragmento monádico de *LC*. Si $\mathcal{P}$ no es una tautología en *LC*, entonces su expansión semántica bajo una valuación con un dominio de 2^n objetos tiene un contramodelo.

Si la expansión semántica no tiene un contramodelo, podemos concluir que la fórmula original es una tautología en *LC*.

> Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ dos fórmulas del fragmento monádico de *LC*. Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ no son equivalentes en *LC*, entonces hay una valuación cuyo dominio contiene a lo sumo 2^n objetos bajo la cual sus expansiones semánticas tienen valores de verdad diferentes.

Si las expansiones semánticas de las fórmulas no tienen valores de verdad diferentes, podemos concluir que las fórmulas son semánticamente equivalentes en *LC*.

> Sea Γ un conjunto de fórmulas del fragmento monádico de *LC*. Si Γ es consistente en *LC*, el conjunto formado por la expansión semántica de las fórmulas de Γ bajo una valuación con un dominio de 2^n objetos tiene un modelo.

Si el conjunto formado por la expansión semántica de las fórmulas de Γ no tiene un modelo, podemos concluir que el conjunto es semánticamente inconsistente en *LC*. Y finalmente:

Cap-7.pmd 260 13/07/07, 03:22 p.m.

> Sea Σ un argumento que sólo contiene fórmulas del fragmento monádico de *LC*. Si Σ es inválido en *LC*, el argumento formado por la expansión semántica de las fórmulas de Σ bajo una valuación con un dominio de 2^n objetos tiene un contraejemplo.

Si el argumento formado por las expansiones no tiene un contraejemplo, es decir, si no hay una valuación bajo la cual las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa, el argumento original es semánticamente válido en *LC*.

En síntesis, para determinar las propiedades semánticas de fórmulas, conjuntos y argumentos del fragmento monádico de *LC* debemos emprender siempre la construcción de una expansión semántica con 2^n objetos, donde *n* es el número de predicados monádicos. El problema es, como ya lo hemos señalado, que una expansión semántica se vuelve inmanejable tan pronto el universo de discurso contiene más de tres objetos. Por ejemplo, para determinar las propiedades semánticas de una fórmula con cuatro predicados monádicos, tendríamos que construir una expansión semántica con 2^4 objetos. La expansión de una fórmula relativamente sencilla en un UD con 16 objetos probablemente ocuparía una página entera de este libro, y la tabla de verdad tendría varios metros cuadrados. Aunque la aplicación práctica de los resultados teóricos obtenidos por Löwenheim requiere de una computadora, el método de las expansiones semánticas es un procedimiento mecánico de decisión para un fragmento de la lógica de primer orden.

Ejercicio 7.9

A. Determine la expansión semántica de cada una de las siguientes fórmulas en un universo de un solo objeto.

1. $\sim(\forall w)(\mathrm{N}w \vee \mathrm{C}w)$
2. $\sim(\exists x)\mathrm{C}x \supset (\exists y)\mathrm{N}y$
3. $(\forall w)(\mathrm{C}w \supset (\exists x)\mathrm{A}x)$
4. $(\exists y)(\exists w)(\sim\mathrm{A}y \;\&\; \mathrm{O}w)$
5. $(\forall x)(\forall y)[(\mathrm{N}x \;\&\; \mathrm{A}y) \supset \sim\mathrm{C}x]$
6. $(\forall x)[\mathrm{C}x \supset (\forall y)(\mathrm{N}y \supset \sim\mathrm{A}x)]$

B. Determine la expansión semántica de cada una de las siguientes fórmulas en un universo de dos objetos.

1. $(\forall x)\mathrm{D}x \vee \sim(\forall x)\mathrm{D}x$
2. $(\forall x)(\forall y)[(\mathrm{F}x \;\&\; \mathrm{P}y) \supset \mathrm{Dc}]$
3. $(\exists x)(\mathrm{P}x \;\&\; (\exists \mathrm{y})\mathrm{D}y)$
4. $(\exists x)(\mathrm{P}x \;\&\; \sim(\exists y)\mathrm{F}y) \;\&\; (\mathrm{Pn} \supset (\forall y)\mathrm{G}y)$

Cap-7.pmd 261 13/07/07, 03:22 p.m.

5. $(\forall x)(Fx \equiv {\sim}Gx)$
6. $(\forall x)[Dx \supset (\exists y)(Gy \ \& \ Dx)]$

C. Determine la expansión semántica de cada una de las siguientes fórmulas en un universo de tres objetos.

1. ${\sim}(\forall y)(Sy \supset Ty)$
2. $(\exists x){\sim}Ax \vee (\exists z)Bz$
3. $(\exists y)[Fa \equiv (Hy \ \& \ Gy)]$
4. $(\forall w)Rw \vee {\sim}(\exists w)Rw$
5. $(\exists x)[Lx \supset (\forall y)(Mx \supset Lx)]$

D. Determine las propiedades semánticas de las siguientes fórmulas utilizando expansiones semánticas. Recuerde que el número de elementos en el UD de la valuación bajo la cual se hace la expansión debe ser igual a 2^n, donde n es el número de predicados monádicos en la fórmula.

1. $(\exists z)((\exists w)Cw \supset {\sim}Cz)$
2. $((\exists x)Fx \ \& \ (\exists y){\sim}Fy) \supset (\forall x){\sim}Fx$
3. ${\sim}(\exists y)Cy \supset (\exists z)Nz$
4. $(\forall x)Nx \ \& \ (\exists y){\sim}Ny$
5. $(\exists x){\sim}(Ax \ \& \ Bx) \supset (\forall y)(Ay \ \& \ By)$

Cap-7.pmd 262 13/07/07, 03:22 p.m.

8. Árboles de verdad de *LC*

En este capítulo retomaremos el método de los árboles de verdad estudiado en el capítulo 4 y lo extenderemos para adaptarlo a las características de la lógica cuantificada. Para tal fin, sólo tendremos que añadir cuatro reglas de descomposición a las ya estudiadas y modificar los criterios para determinar cuándo un árbol está completo. Pero la esencia del método sigue siendo la misma. El método es un algoritmo o procedimiento mecánico de decisión que nos permite determinar la consistencia e inconsistencia de un conjunto de fórmulas de *LC* de acuerdo con la siguiente definición:

> Un conjunto finito de fórmulas de *LC* es semánticamente ***consistente*** si y sólo si el conjunto tiene un árbol de verdad abierto, y semánticamente ***inconsistente*** si y sólo si un subconjunto finito del conjunto tiene un árbol de verdad cerrado.

En el capítulo anterior vimos que sólo hay algunos fragmentos de *LC* para los cuales existe un algoritmo o procedimiento mecánico de decisión, entre ellos el fragmento monádico de *LC*. El método de los árboles de verdad es un procedimiento de decisión que nos permite probar la consistencia de cualquier conjunto *finitamente satisfacible*, es decir, que sea consistente en un modelo con dominio finito. Muchos conjuntos finitamente satisfacibles están compuestos de fórmulas con predicados poliádicos y todos los conjuntos compuestos de fórmulas con predicados monádicos son finitamente satisfacibles. Por lo tanto, el método de los árboles de verdad tiene un rango de aplicación mayor que el método del universo finito estudiado en el capítulo anterior.

8.1 Reglas de descomposición de los cuantificadores

Algunos conjuntos de fórmulas de *LC* pueden ser analizados utilizando únicamente las reglas de descomposición estudiadas en el capítulo 4. Consideremos, por ejemplo, el siguiente conjunto:

Cap-8.pmd 263 13/07/07, 03:24 p.m.

(1) {Kal ⊃ ~(Fer ∨ Ger), Kal, Fer & Ger}

1	Kal ⊃ ~(Fer ∨ Ger) ✓		MC
2	Kal		MC
3	Fer & Ger ✓		MC
4	Fer		3 (&)
5	Ger		3 (&)
6	~Kal	~(Fer ∨ Ger) ✓	1 (⊃)
7	×	~Fer	6 (~∨)
8		~Ger	6 (~∨)
		×	

Sin embargo, estas reglas son insuficientes en cuanto intentamos analizar un conjunto que contenga fórmulas cuantificadas. Por ejemplo, el siguiente conjunto es claramente inconsistente, pero el árbol correspondiente no se cierra si sólo utilizamos las reglas de la lógica proposicional:

(2) {(∀*x*)(De*x* ⊃ Be*x*), Dea & ~Bea}

1	(∀*x*)(De*x* ⊃ Be*x*)	MC
2	Dea & ~Bea ✓	MC
3	Dea	2 (&)
4	~Bea	2 (&)

Para poder continuar con el árbol debemos introducir una regla de descomposición para el cuantificador universal. Si una fórmula de forma (∀**x**)$\mathcal{P}$ es verdadera, también lo será *cualquier* instancia de sustitución $\mathcal{P}$(**a**/**x**) de esa fórmula. Por esa razón podemos afirmar en la línea 5 la fórmula "Dea ⊃ Bea", la cual genera dos contradicciones que nos permiten completar el árbol:

1	(∀*x*)(De*x* ⊃ Be*x*)		MC
2	Dea & ~Bea ✓		MC
3	Dea		2 (&)
4	~Bea		2 (&)
5	Dea ⊃ Bea ✓		1 (∀)
6	~Dea	Bea	5 (⊃)
	×	×	

Podemos generalizar la regla utilizada en este árbol de la siguiente manera:

Cap-8.pmd 264 13/07/07, 03:24 p.m.

Descomposición del cuantificador universal (∀)

$$(\forall \mathbf{x})\mathcal{P}$$
$$\mathcal{P}(\mathbf{a}/\mathbf{x})$$

La regla nos permite introducir cualquier instancia de sustitución de $(\forall \mathbf{x})\mathcal{P}$ en cualquier rama que contenga a $(\forall \mathbf{x})\mathcal{P}$. La regla no requiere que descompongamos la fórmula en todas las ramas abiertas, pues generalmente sólo se necesita hacerlo en una de ellas. Si más adelante encontramos que debemos descomponer la fórmula en una rama diferente, la regla nos permite hacerlo con la misma o con otra instancia de sustitución. Generalmente buscamos instancias de sustitución que creen contradicciones y que por ende cierren ramas. Como una fórmula universalmente cuantificada tiene un número infinito de instancias de sustitución, nunca marcamos la fórmula como descompuesta.

Las siguientes dos reglas de descomposición se aplican a las negaciones de fórmulas universal o existencialmente cuantificadas:

Descomposición de la negación del cuantificador universal (∼∀)

$$\sim(\forall \mathbf{x})\mathcal{P} \checkmark$$
$$(\exists \mathbf{x})\sim\mathcal{P}$$

Descomposición de la negación del cuantificador existencial (∼∃)

$$\sim(\exists \mathbf{x})\mathcal{P} \checkmark$$
$$(\forall \mathbf{x})\sim\mathcal{P}$$

La justificación de las dos reglas es obvia: la fórmula nueva es semánticamente equivalente a la fórmula descompuesta, como lo demostramos en el capítulo 7.

La cuarta regla nos permite descomponer una fórmula existencialmente cuantificada. Si una fórmula de la forma $(\exists \mathbf{x})\mathcal{P}$ es verdadera, también lo es al menos una instancia de sustitución $\mathcal{P}(\mathbf{a}/\mathbf{x})$ de esa fórmula. Para poder introducir una instancia de sustitución de esa fórmula en el árbol, debemos asegurarnos de que éste no contenga información alguna acerca de la constante **a**. No queremos afirmar nada acerca de esa constante excepto que ésta designa al objeto que posee las propiedades y relaciones indicadas por $\mathcal{P}$. La regla es la siguiente:

Descomposición del Cuantificador Existencial (∃)

$$(\exists \mathbf{x})\mathcal{P} \checkmark$$
$$\mathcal{P}(\mathbf{a}/\mathbf{x})$$

La constante **a** no puede aparecer en ninguna fórmula en la rama donde se lleva a cabo la descomposición. Si **a** apareciera en alguna fórmula anterior en la rama, existe la posibilidad de que entre en conflicto con lo que afirma $\mathcal{P}(\mathbf{a}/\mathbf{x})$. Por ejemplo, consideremos los siguientes enunciados:

Cap-8.pmd 265 13/07/07, 03:24 p.m.

(3) Algunos pájaros vuelan.
Algunos pájaros no vuelan.

Los enunciados forman un conjunto consistente: {($\exists x$)(Px & Vx), ($\exists x$)(Px & ~Vx)}. Pero si utilizáramos la misma constante en cada instancia de sustitución de las fórmulas existenciales, crearíamos una contradicción inexistente. Veamos:

1	($\exists x$)(Px & Vx) ✓		MC
2	($\exists x$)(Px & ~Vx) ✓		MC
3	Pa & Va ✓		1 ($\exists$)
4	Pa		3 (&)
5	Va		3 (&)
6	Pa & ~Va ✓	**ERROR**	2 ($\exists$)
7	Pa		6 (&)
8	~Va		6 (&)
	×		

La línea 6 es una aplicación errónea de la regla para la descomposición del cuantificador existencial. Como ya sabemos que el objeto designado por “a” está en la extensión de “P” y “V”, no podemos usar la constante “a” como nombre arbitrario en la descomposición de la segunda fórmula existencial. El árbol correcto es como sigue:

1	($\exists x$)(Px & Vx) ✓	MC
2	($\exists x$)(Px & ~Vx) ✓	MC
3	Pa & Va ✓	1 ($\exists$)
4	Pa	3 (&)
5	Va	3 (&)
6	Pb & ~Vb ✓	2 ($\exists$)
7	Pb	6 (&)
8	~Vb	6 (&)

El árbol está terminado porque sólo contiene fórmulas atómicas o sus negaciones, y fórmulas moleculares y existenciales descompuestas. En consecuencia, el árbol es abierto y el conjunto es semánticamente consistente.

Consideremos algunos ejemplos en los que podamos aplicar las cuatro reglas que hemos estudiado hasta el momento. Probaremos que el siguiente conjunto es semánticamente inconsistente:

(4) {~($\exists x$)(Nx $\supset$ ($\forall y$)Ny)}

Cap-8.pmd 266 13/07/07, 03:24 p.m.

Comenzamos el árbol aplicando la regla (~∃):

1	$\sim(\exists x)(Nx \supset (\forall y)Ny)$ ✓	MC
2	$(\forall x)\sim(Nx \supset (\forall y)Ny)$	1 (~∃)

Sería un error descomponer la línea 1 utilizando (∃) para obtener "$\sim(Na \supset (\forall y)Ny)$". Para poder aplicar la regla (∃), el cuantificador debe ser el operador lógico principal. En este caso, la negación es el operador lógico principal. Del mismo modo sería un error aplicar la regla (∀) al fragmento "$(\forall y)Ny$". Las reglas de los árboles de verdad se aplican a fórmulas enteras, no a fragmentos de fórmulas. Continuamos con la descomposición de la línea 2:

1	$\sim(\exists x)(Nx \supset (\forall y)Ny)$ ✓	MC
2	$(\forall x)\sim(Nx \supset (\forall y)Ny)$	1 (~∃)
3	$\sim(Na \supset (\forall y)Ny)$ ✓	2 (∀)
4	Na	3 (~⊃)
5	$\sim(\forall y)Ny$ ✓	3 (~⊃)
6	$(\exists y)\sim Ny$ ✓	5 (~∀)
7	~Nb	6 (∃)

Aunque ya hemos aplicado las reglas de descomposición a todas las líneas del árbol, éste no está terminado aún. Si retornamos a la línea 2 y creamos una nueva instancia de sustitución utilizando la constante "b", es posible que logremos crear una contradicción. Recordemos que una fórmula universalmente cuantificada nunca se termina de descomponer.

1	$\sim(\exists x)(Nx \supset (\forall y)Ny)$ ✓	MC
2	$(\forall x)\sim(Nx \supset (\forall y)Ny)$	1 (~∃)
3	$\sim(Na \supset (\forall y)Ny)$ ✓	2 (∀)
4	Na	3 (~⊃)
5	$\sim(\forall y)Ny$ ✓	3 (~⊃)
6	$(\exists y)\sim Ny$ ✓	5 (~∀)
7	~Nb	6 (∃)
8	$\sim(Nb \supset (\forall y)Ny)$ ✓	2 (∀)
9	Nb	8 (~⊃)
10	$\sim(\forall y)Ny$	8 (~⊃)
	×	

La contradicción entre las líneas 7 y 9 cierra el árbol, concluyendo así la prueba de la inconsistencia del conjunto original. Los últimos pasos ilustran una de las principales estrategias a seguir en la construcción de árboles de verdad en lógica cuantificada: al aplicar la regla (∀) se deben utilizar instancias de sustitución que contengan constan-

Cap-8.pmd 267 13/07/07, 03:24 p.m.

tes que ya ocurran en la rama. De esta manera se crean más oportunidades para generar contradicciones, y por ende, para cerrar ramas.

Utilizaremos el método de los árboles de verdad para determinar si el siguiente conjunto es semánticamente consistente:

(5) $\{(\exists z){\sim}\mathrm{B}z\mathrm{b},\ (\exists y)\mathrm{A}y \supset (\forall x)\mathrm{B}x\mathrm{b},\ \mathrm{Cb}\}$

1	$(\exists z){\sim}\mathrm{B}z\mathrm{b}$ ✓		MC
2	$(\exists y)\mathrm{A}y \supset (\forall x)\mathrm{B}x\mathrm{b}$ ✓		MC
3	Cb		MC
4	~Bab		1 ($\exists$)
5	${\sim}(\exists y)\mathrm{A}y$	$(\forall x)\mathrm{B}x\mathrm{b}$	2 ($\supset$)
6		Bab	5 ($\forall$)
		×	

En la línea 4 eliminamos el cuantificador existencial de la fórmula 1 utilizando una constante nueva en la rama, tal como lo ordena la regla ($\exists$). Pero en la línea 6, al crear la instancia de sustitución de "$(\forall x)\mathrm{A}x\mathrm{b}$" podemos utilizar cualquier constante. En este caso utilizamos "a" para así crear una contradicción. Continuamos ahora con la rama de la izquierda:

1	$(\exists z){\sim}\mathrm{B}z\mathrm{b}$ ✓		MC
2	$(\exists y)\mathrm{A}y \supset (\forall x)\mathrm{B}x\mathrm{b}$ ✓		MC
3	Cb		MC
4	~Bab		1 ($\exists$)
5	${\sim}(\exists y)\mathrm{A}y$ ✓	$(\forall x)\mathrm{B}x\mathrm{b}$	2 ($\supset$)
6		Bab	5 ($\forall$)
7	$(\forall y){\sim}\mathrm{A}y$	×	5 (${\sim}\exists$)
8	~Aa		7 ($\forall$)
9	~Ab		7 ($\forall$)

Podríamos continuar aplicando la regla ($\forall$) a la línea 7 indefinidamente para obtener nuevas instancias de sustitución, pero ninguna de esas nuevas instancias generaría una contradicción con las fórmulas en esa rama. En otras palabras, la rama es una *rama abierta completa*.

Cap-8.pmd 268 29/08/07, 02:32 p.m.

La definición estricta de una rama abierta completa en la lógica cuantificada es un poco diferente a la definición en la lógica proposicional. La definición es como sigue:

> Una rama de un árbol de verdad de *LC* es una ***rama abierta completa*** si y sólo si es una rama abierta finita y cada fórmula que aparece en la rama corresponde a alguno de los siguientes casos:
>
> 1. Una fórmula atómica o su negación.
> 2. Una fórmula molecular o existencialmente cuantificada descompuesta.
> 3. Una fórmula universalmente cuantificada $(\forall \mathbf{x})\mathcal{P}$ tal que: (i) al menos una instancia de $\mathcal{P}(\mathbf{a}_i / \mathbf{x})$ también ocurra en la rama; y (ii) para cada constante a_j que aparezca en la rama, $\mathcal{P}(\mathbf{a}_i / \mathbf{x})$ también ocurra en la rama.

En un lenguaje menos técnico, la última cláusula simplemente afirma que por cada fórmula universalmente cuantificada debe haber por lo menos una instancia de sustitución; además, debe haber una instancia de sustitución por cada constante que aparezca en la rama.

De acuerdo con la anterior definición, podemos afirmar que la rama izquierda en el ejemplo **(5)** cumple las condiciones de la definición. Es decir, la rama que contiene la fórmula universalmente cuantificada también contiene instancias de sustitución para cada una de las constantes en esa rama. Por ende, es una rama abierta completa, el árbol es abierto y el conjunto en cuestión es semánticamente consistente.

8.2 Valuaciones en un árbol de verdad

Al igual que en la lógica proposicional, podemos usar las ramas abiertas completas de los árboles de *LC* para encontrar una valuación bajo la cual el conjunto sea consistente. En este capítulo sólo usaremos valuaciones no interpretadas[1]. Por lo tanto, el UD siempre estará compuesto de números enteros positivos. Para construir la valuación a partir de la información provista en un árbol de verdad debemos utilizar los siguientes criterios:

1. *Véase* sección 7.1.4.

Cap-8.pmd 269 13/07/07, 03:24 p.m.

1. El UD debe contener un número de elementos igual al número de constantes en la rama abierta completa a partir de la cual se va a construir la valuación. A cada constante le asignamos como extensión uno de los números en el UD siguiendo un orden alfabético.
2. Si $\mathcal{P}$ es una letra proposicional de *LC* en una rama abierta completa, entonces $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ = **V**; si $\mathcal{P}$ es la negación de una letra proposicional en una rama abierta completa, entonces $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ = **F**.
3. Si $\mathcal{P}$ es una fórmula de *LC* de forma **Pa** en una rama abierta completa, donde **P** es un predicado de grado 1 y **a** es una constante, entonces: $\mathcal{V}(\mathbf{a}) \in \mathcal{V}(\mathbf{P})$.
4. Si $\mathcal{P}$ es una fórmula de *LC* de forma $\mathbf{Pa_1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ en una rama abierta completa, donde **P** es un predicado de grado n ($n > 1$) y $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ son constantes, entonces $<\mathcal{V}(\mathbf{a_1}), \ldots, \mathcal{V}(\mathbf{a}_n)> \in \mathcal{V}(\mathbf{P})$.
5. Si $\mathcal{P}$ es una letra proposicional que aparece en el conjunto original pero que no aparece por sí sola en una rama abierta completa, se le puede asignar cualquier valor de verdad.
6. Sea $\mathcal{P}$ una fórmula que contiene el predicado **P** y que aparece en el conjunto original. Si la rama abierta completa no contiene ninguna fórmula de forma **Pa** o $\mathbf{Pa_1}, \ldots, \mathbf{a}_n$, se le debe asignar a **P** como extensión el conjunto nulo o vacío.

La definición es muy fácil de utilizar. Consideremos el árbol correspondiente al siguiente conjunto:

(6) {($\exists$*y*)F*y* ⊃ ($\forall$*x*)G*x*b, ($\exists$*y*)G*y*b, Hb}

1	($\exists$*y*)F*y* ⊃ ($\forall$*x*)G*x*b ✓		MC
2	($\exists$*y*)G*y*b ✓		MC
3	Hb		MC
4	Gab		2 ($\exists$)
5	~($\exists$*y*)F*y*	($\forall$*x*)G*x*b	1 (⊃)
6		Gab	5 ($\forall$)
7		Gbb	5 ($\forall$)

La rama derecha del árbol es una rama abierta completa. Por lo tanto, el árbol es abierto y el conjunto es semánticamente consistente. Para construir una valuación a

Cap-8.pmd 270 13/07/07, 03:24 p.m.

partir de la rama abierta completa, razonamos de la siguiente manera. En la rama hay dos constantes, así que el UD será el conjunto $\{1, 2\}$. A renglón seguido le asignamos a cada constante un elemento del UD en orden alfabético: “a” denota al número 1 y “b” al número 2. La fórmula “Hb” tiene la forma **Pa**, así que el número 2, el objeto denotado por “b”, está en la extensión de “H”. Las fórmulas “Gab” y “Gbb” tienen la forma $\mathbf{Pa}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, así que los pares ordenados $<1, 2>$ y $<2, 2>$ están en la extensión de “G”. Finalmente, la rama abierta completa no nos indica cuál es la extensión del predicado “F”. Por lo tanto, debemos asignarle como extensión el conjunto nulo o vacío. En resumen, el conjunto anterior es consistente bajo la siguiente valuación:

UD:	$\{1, 2\}$		
Fx:	$\varnothing$	a:	1
Hx:	$\{2\}$	b:	2
Gxy:	$\{<1, 2>, <2, 2>\}$		

Naturalmente, es posible interpretar cualquier valuación obtenida de esta manera para darle un contenido intensional. Por ejemplo, podríamos interpretar la valuación anterior de la siguiente manera:

UD:	$\{1, 2\}$		
Fx:	x es negativo	a:	1
Hx:	x es par	b:	2
Gxy:	x es menor o igual a y		

También es posible interpretar la valuación utilizando dominios, propiedades y relaciones no numéricas. Dejamos la construcción de tales interpretaciones como ejercicio para el lector.

8.3 El orden de descomposición de un árbol de verdad

En la lógica proposicional el orden en el que son aplicadas las reglas de descomposición no altera la respuesta que ofrece un árbol de verdad. Generalmente, por razones prácticas, utilizamos primero las reglas que no nos obligan a ramificar el árbol. Pero si olvidamos este consejo y comenzamos el árbol con reglas que nos llevan a ramificarlo desde el comienzo, el resultado final será el mismo, es decir, los mismos conjuntos serán consistentes o inconsistentes. No ocurre lo mismo en la lógica cuantificada. El orden de aplicación de las reglas es extremadamente importante. Consideremos el siguiente ejemplo:

(7) $\{(\forall x)(\exists y)\mathrm{P}yx,\ (\exists x)(\forall y){\sim}\mathrm{P}yx\}$

Cap-8.pmd 271 13/07/07, 03:24 p.m.

Este conjunto es claramente inconsistente. Supongamos, por ejemplo, que "P" simboliza la relación "ser padre de". En tal caso, la primera fórmula afirma que todos tenemos un padre, y la segunda que existe alguien que no tiene padre. A pesar de ser inconsistente, es posible crear un árbol infinito para este conjunto si no aplicamos las reglas de descomposición en el orden correcto:

1	$(\forall x)(\exists y)\mathrm{P}yx$	MC
2	$(\exists x)(\forall y)\sim\mathrm{P}yx$	MC
3	$(\exists y)\mathrm{P}y\mathrm{a}$ ✓	1 (∀)
4	Pba	3 (∃)
5	$(\exists y)\mathrm{P}y\mathrm{b}$ ✓	1 (∀)
6	Pcb	5 (∃)
7	$(\exists y)\mathrm{P}y\mathrm{c}$ ✓	1 (∀)
8	Pdc	7 (∃)
	...	

Podríamos continuar utilizando la regla (∀) seguida de (∃) infinitamente. Sin embargo, como el conjunto es inconsistente, debe poder cerrarse. Si aplicamos las reglas en un orden diferente, obtenemos el resultado deseado:

1	$(\forall x)(\exists y)\mathrm{P}yx$	MC
2	$(\exists x)(\forall y)\sim\mathrm{P}yx$ ✓	MC
3	$(\forall y)\sim\mathrm{P}y\mathrm{a}$	2 (∃)
4	$(\exists y)\mathrm{P}y\mathrm{a}$ ✓	1 (∀)
5	Pba	4 (∃)
6	~Pba	3 (∀)
	×	

El problema con el primer árbol reside en que ignoramos la segunda fórmula y sólo descompusimos las fórmulas que iban apareciendo en el árbol. Para garantizar que un conjunto inconsistente siempre tenga un árbol cerrado, debemos seguir un protocolo de descomposición como el que se describe a continuación:

Cap-8.pmd 272 13/07/07, 03:24 p.m.

Protocolo de descomposición en *LC*

Las reglas de descomposición deben ser utilizadas en el siguiente orden. En cada paso del árbol utilice inicialmente las reglas indicadas en el numeral 1. Si no es posible utilizar dichas reglas, utilice las reglas en el numeral 2 y así sucesivamente.

1. Reglas (~~), (&), (~$\vee$), (~$\exists$) y (~$\forall$)
2. Reglas ($\vee$), ($\supset$), (~&), ($\equiv$) y (~$\equiv$)
3. Regla ($\exists$)
4. Regla ($\forall$)

La utilización estricta y mecánica de este protocolo de descomposición garantiza que todos los conjuntos inconsistentes de *LC* tengan un árbol cerrado. El problema es que el protocolo no es muy eficiente y muchas veces nos obliga a agregar al árbol fórmulas innecesarias. Con la práctica es posible ver con anticipación cuáles fórmulas conducen a contradicciones y cuáles no, lo cual nos permite apartarnos en cierta medida del protocolo. Por otra parte, siempre debemos asegurarnos de haber seguido estrictamente el protocolo de descomposición antes de declarar que un árbol tiene una rama abierta completa. Por lo tanto, la mejor estrategia es seguir el protocolo a menos que podamos anticipar los atajos que conducen a un árbol cerrado.

Ejercicio 8.1

Utilice el método de los árboles de verdad para determinar si los siguientes conjuntos de fórmulas de *LC* son semánticamente consistentes. Si el árbol tiene una rama abierta completa, construya un modelo para el conjunto.

1. $\{(\forall x)(\mathrm{M}x \supset \mathrm{N}x\mathrm{a}),\ (\exists x)\mathrm{M}x\}$
2. $\{(\exists x)\mathrm{N}x \supset (\forall z)\mathrm{M}z,\ (\forall y)\mathrm{N}y\}$
3. $\{(\forall x)\mathrm{M}x \vee (\exists y)\mathrm{N}y,\ (\exists x)({\sim}\mathrm{M}x\ \&\ \mathrm{N}x)\}$
4. $\{(\forall x)(\mathrm{M}x \supset \mathrm{N}x\mathrm{a}),\ (\forall y){\sim}\mathrm{N}y\mathrm{a},\ (\exists x)\mathrm{M}x\}$
5. $\{(\forall x)(\mathrm{M}x \vee \mathrm{N}x),\ \mathrm{Ma}\ \&\ {\sim}\mathrm{Nb},\ {\sim}(\exists y)(\mathrm{M}y \vee \mathrm{N}y)\}$
6. $\{(\forall x)(\mathrm{M}x \supset \mathrm{N}x\mathrm{a}),\ (\exists x)\mathrm{M}x,\ (\forall y)\mathrm{N}y\mathrm{a}\}$
7. $\{(\exists x)\mathrm{P}x \supset (\exists y)\mathrm{Q}y\mathrm{b},\ (\forall z){\sim}\mathrm{Q}z\mathrm{a},\ \mathrm{Pb}\}$
8. $\{(\forall x)(\forall y)\mathrm{N}xy,\ (\exists y){\sim}\mathrm{N}y\mathrm{a} \supset (\forall y){\sim}\mathrm{N}y\mathrm{a}\}$
9. $\{{\sim}(\forall x){\sim}\mathrm{L}x\mathrm{b},\ \mathrm{Kb},\ (\forall z)(\mathrm{K}z \equiv {\sim}\mathrm{L}z\mathrm{b})\}$
10. $\{(\forall y)\mathrm{N}y\mathrm{a} \equiv {\sim}(\forall y)\mathrm{M}y\mathrm{b},\ (\exists x)(\mathrm{N}x\mathrm{a}\ \&\ {\sim}\mathrm{M}x\mathrm{b})\}$

Cap-8.pmd 273 13/07/07, 03:24 p.m.

8.4 Propiedades semánticas y consistencia en *LC*

Para poder usar los árboles de verdad como método de prueba de las propiedades semánticas de las fórmulas, argumentos y conjuntos de *LC*, debemos definir estas propiedades en términos de la consistencia semántica de los conjuntos de *LC*. En la sección 4.1 establecimos las definiciones requeridas en el caso de *LP*. Aquí utilizaremos las mismas definiciones, con la salvedad de que ahora se aplican a fórmulas de *LC*.

Recordemos las definiciones requeridas para probar que una fórmula es una tautología, una contradicción o una fórmula semánticamente indeterminada:

> Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LC* es una ***contradicción en LC*** si y sólo si el conjunto $\{\mathcal{P}\}$ tiene un árbol cerrado.
>
> Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LC* es una ***tautología en LC*** si y sólo si el conjunto $\{\sim\mathcal{P}\}$ tiene un árbol cerrado.
>
> Una fórmula $\mathcal{P}$ es ***semánticamente indeterminada en LC*** si y sólo si tanto $\{\mathcal{P}\}$ como $\{\sim\mathcal{P}\}$ tienen árboles de verdad abiertos.

Probaremos inicialmente que la siguiente fórmula no es una tautología en *LC*:

(8) $(\forall x)(\forall y)(Fxy \supset Fyx)$

Crearemos el siguiente conjunto para la negación de la fórmula y probamos su consistencia:

$$\{\sim(\forall x)(\forall y)(Fxy \supset Fyx)\}$$

En el paso inicial tenemos la negación de un cuantificador universal, el cual debemos descomponer usando (~∀). En el paso 3 creamos una instancia de sustitución de la fórmula existencial resultante utilizando la constante "a", que es nueva en la rama:

1	$\sim(\forall x)(\forall y)(Fxy \supset Fyx)$ ✓	MC
2	$(\exists x)\sim(\forall y)(Fxy \supset Fyx)$ ✓	1 (~∀)
3	$\sim(\forall y)(Fay \supset Fya)$	2 (∃)

En este punto volvemos a encontrar la negación de un cuantificador universal, el cual descomponemos usando (~∀). Para eliminar el cuantificador existencial en el paso 4 debemos utilizar una constante que no aparezca en la única rama del árbol. Por eso utilizaremos la constante "b" en el paso 5:

1	$\sim(\forall x)(\forall y)(Fxy \supset Fyx)$ ✓	MC
2	$(\exists x)\sim(\forall y)(Fxy \supset Fyx)$ ✓	1 ($\sim\forall$)
3	$\sim(\forall y)(Fay \supset Fya)$	2 ($\exists$)
4	$(\exists y)\sim(Fay \supset Fya)$ ✓	3 ($\sim\forall$)
5	$\sim(Fab \supset Fba)$ ✓	4 ($\exists$)
6	Fab	5 ($\sim\supset$)
7	~Fba	5 ($\sim\supset$)

El árbol es abierto porque su única rama es una rama abierta completa. Por lo tanto, la fórmula **(8)** no es una tautología en *LC*. La siguiente valuación es un contramodelo de la fórmula:

UD:	{1, 2}
F*xy*:	{<1, 2>}
a:	1
b:	2

Probaremos ahora que la siguiente fórmula es una contradicción en *LC*:

(9) $(\forall x)(Tx \supset Sx) \ \& \ (\exists y)\sim(\sim Ty \ \& \ Sy)$

Inicialmente construimos el siguiente conjunto y probamos su inconsistencia:

$\{(\forall x)(Tx \supset Sx) \ \& \ (\exists y)\sim(\sim Ty \vee Sy)\}$

1	$(\forall x)(Tx \supset Sx) \ \& \ (\exists y)\sim(\sim Ty \vee Sy)$ ✓	MC
2	$(\forall x)(Tx \supset Sx)$	1 (&)
3	$(\exists y)\sim(\sim Ty \vee Sy)$	1 (&)

Tras el primer paso, nos enfrentamos a dos fórmulas cuantificadas. ¿Cuál de ellas debemos descomponer primero? Según el protocolo, debemos descomponer primero la fórmula existencial. La descomposición de la fórmula existencial se puede llevar a cabo con cualquier constante:

1	$(\forall x)(Tx \supset Sx) \ \& \ (\exists y)\sim(\sim Ty \vee Sy)$ ✓	MC
2	$(\forall x)(Tx \supset Sx)$	1 (&)
3	$(\exists y)\sim(\sim Ty \vee Sy)$ ✓	2 (&)
4	$\sim(\sim Ta \vee Sa)$ ✓	3 ($\exists$)
5	~~Ta	4 ($\sim\vee$)
6	~Sa	4 ($\sim\vee$)

Cap-8.pmd 275 13/07/07, 03:24 p.m.

Finalmente, descomponemos la fórmula universal utilizando la constante “a”, como lo ordena el protocolo:

1	$(\forall x)(Tx \supset Sx)\ \&\ (\exists y){\sim}({\sim}Ty \vee Sy)\checkmark$		MC
2	$(\forall x)(Tx \supset Sx)$		1 (&)
3	$(\exists y){\sim}({\sim}Ty \vee Sy)\checkmark$		2 (&)
4	${\sim}({\sim}Ta \vee Sa)\checkmark$		3 (∃)
5	${\sim}{\sim}Ta$		4 (~∨)
6	${\sim}Sa$		4 (~∨)
7	$Ta \supset Sa$		2 (∀)
8	${\sim}Ta$	Sa	7 (⊃)
	×	×	

El árbol es cerrado. En consecuencia, el conjunto es inconsistente y la fórmula **(9)** es una contradicción en *LC*.

El siguiente concepto que estudiaremos es el de equivalencia semántica. Para tal fin, debemos adaptar la definición del capítulo 4:

> Dos fórmulas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son ***semánticamente equivalentes en LC*** si y sólo si el conjunto $\{{\sim}(\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q})\}$ tiene un árbol de verdad cerrado.

En el siguiente ejemplo usaremos el método de los árboles de verdad para determinar si las siguientes dos fórmulas son semánticamente equivalentes en *LC*:

(10) $(\forall x)(Fx \supset Ba)$

$(\forall x)Fx \supset Ba$

El punto de partida para la construcción del árbol es el siguiente conjunto:

$$\{{\sim}[(\forall x)(Fx \supset Ba) \equiv ((\forall x)Fx \supset Ba)]\}$$

Cap-8.pmd 276 13/07/07, 03:24 p.m.

1	~[(∀x)(Fx ⊃ Ba) ≡ ((∀x)Fx ⊃ Ba)] ✓			MC
2	(∀x)(Fx ⊃ Ba)	~(∀x)(Fx ⊃ Ba) ✓		1 (~≡)
3	~((∀x)Fx ⊃ Ba)	(∀x)Fx ⊃ Ba ✓		1 (~≡)
4		(∃x)~(Fx ⊃ Ba) ✓		2 (~∀)
5		~(Fb ⊃ Ba) ✓		4 (∃)
6		Fb		5 (~⊃)
7		~Ba		5 (~⊃)
8		~(∀x)Fx ✓	Ba	3 (⊃)
9		(∃x)~Fx ✓	×	8 (~∀)
10		~Fc		9 (∃)

La rama que contiene a "~Fc" es una rama abierta completa. No hace falta descomponer la rama de la izquierda porque nada de lo que hagamos allí cambiará el resultado final. Podemos concluir que las fórmulas "(∀x)(Fx ⊃ Ba)" y "(∀x)Fx ⊃ Ba" no son semánticamente equivalentes. Las fórmulas tienen un valor de verdad diferente bajo la siguiente valuación:

UD:	{1, 2, 3}		
Bx:	∅	b:	2
Fx:	{2}	c:	3
a:	1		

Pasamos ahora al concepto de validez semántica. Utilizaremos una definición análoga a la del capítulo 4:

> Un argumento de *LC* es ***semánticamente válido*** si y sólo si el conjunto que contiene las premisas y la negación de la conclusión tiene un árbol de verdad cerrado.

En el siguiente ejemplo determinaremos si el siguiente argumento es válido o inválido en *LC*:

(11) (∀x)(∀y)(Axy ⊃ (∃z)Bzy)
(∀x)(∀y)(Bxy ⊃ (∃z)Cyz)
―――――――――――――
(∃x)(∃y)Axy ⊃ (∃x)(∃y)Cxy

Comenzamos creando el siguiente conjunto y determinando su consistencia o inconsistencia:

$$\{(\forall x)(\forall y)(Axy \supset (\exists z)Bzy),\ (\forall x)(\forall y)(Bxy \supset (\exists z)Cyz),$$
$$\sim((\exists x)(\exists y)Axy \supset (\exists x)(\exists y)Cxy)\}$$

1	$(\forall x)(\forall y)(Axy \supset (\exists z)Bzy)$			MC
2	$(\forall x)(\forall y)(Bxy \supset (\exists z)Cyz)$			MC
3	$\sim((\exists x)(\exists y)Axy \supset (\exists x)(\exists y)Cxy)$ ✓			MC
4	$(\exists x)(\exists y)Axy$ ✓			3 (~⊃)
5	$\sim(\exists x)(\exists y)Cxy$ ✓			3 (~⊃)
6	$(\exists y)Aay$ ✓			4 (∃)
7	Aab			6 (∃)
8	$(\forall y)(Aay \supset (\exists z)Bzy)$			1 (∀)
9	$Aab \supset (\exists z)Bzb$ ✓			8 (∀)
10	~Aab	$(\exists z)Bzb$ ✓		9 (⊃)
11	×	Bcb		10 (∃)
12		$(\forall y)(Bcy \supset (\exists z)Cyz)$		2 (∀)
13		$Bcb \supset (\exists z)Cbz$ ✓		12 (∀)
14		~Bcb	$(\exists z)Cbz$ ✓	13 (⊃)
15		×	Cbd	14 (∃)
16			$(\forall x)\sim(\exists y)Cxy$	5 (~∃)
17			$\sim(\exists y)Cby$ ✓	16 (∀)
18			$(\forall y)\sim Cby$	17 (~∃)
19			~Cbd	18 (∀)
			×	

El árbol es cerrado. Por lo tanto, el conjunto es inconsistente y el argumento **(11)** es semánticamente válido.

Consideremos un segundo argumento. Probaremos que el siguiente argumento es inválido en *LC*:

(12) $(\exists x)(Fx \ \&\ (\forall y)(Gy \supset Hxy))$
$\underline{(\forall x)(Fx \supset (\forall y)(By \supset \sim Hxy))}$
$\sim(\forall x)(Gx \supset \sim Bx)$

Probaremos la consistencia del siguiente conjunto:

$$\{(\exists x)(Fx \ \&\ (\forall y)(Gy \supset Hxy)),\ (\forall x)(Fx \supset (\forall y)(By \supset \sim Hxy)),$$
$$\sim\sim(\forall x)(Gx \supset \sim Bx)\}$$

Cap-8.pmd 278 13/07/07, 03:24 p.m.

1	$(\exists x)(Fx \;\&\; (\forall y)(Gy \supset Hxy))$ ✓								MC
2	$(\forall x)(Fx \supset (\forall y)(By \supset {\sim}Hxy))$								MC
3	${\sim}{\sim}(\forall x)(Gx \supset {\sim}Bx)$ ✓								MC
4	$(\forall x)(Gx \supset {\sim}Bx)$								3 (~~)
5	$Fa \;\&\; (\forall y)(Gy \supset Hay)$ ✓								1 (∃)
6	Fa								5 (&)
7	$(\forall y)(Gy \supset Hay)$								5 (&)
8	$Fa \supset (\forall y)(By \supset {\sim}Hay)$ ✓								2 (∀)
9	~Fa				$(\forall y)(By \supset {\sim}Hay)$				8 (⊃)
10	×				$Ga \supset {\sim}Ba$ ✓				4 (∀)
11	~Ga				~Ba				10 (⊃)
12	$Ba \supset {\sim}Haa$ ✓				$Ba \supset {\sim}Haa$ ✓				9 (∀)
13	~Ba		~Haa		~Ba		~Haa		12 (⊃)
14	$Ga \supset Haa$ ✓		$Ga \supset Haa$ ✓		$Ga \supset Haa$ ✓		$Ga \supset Haa$ ✓		7 (∀)
15	~Ga	Haa	~Ga	Haa	~Ga	Haa	~Ga	Haa	14 (⊃)
				×				×	

El árbol tiene al menos una rama abierta completa. Por lo tanto, el árbol es abierto y el argumento **(12)** es semánticamente inválido en *LC*. Bajo la siguiente valuación las premisas son verdaderas y la conclusión falsa:

UD:	{1}
F*x*:	{1}
H*xy*:	{<1, 1>}
a:	1

Nótese que como el árbol sólo requiere la descomposición de una fórmula existencial, la mejor estrategia es descomponer todas las fórmulas universales utilizando esa misma variable.

Ejercicio 8.2

A. Utilice el método de los árboles de verdad para determinar si los siguientes conjuntos de fórmulas de *LC* son semánticamente consistentes.

1. $\{(\forall x)Fx,\ {\sim}(\forall x)Gx,\ (\forall x)(Fx \vee Gx)\}$

Cap-8.pmd 279 13/07/07, 03:24 p.m.

2. $\{\sim(\exists x)Tx,\ \sim(\forall x)\sim Tx \vee \sim(\forall x)Tx\}$
3. $\{\sim(\exists x)(Bx \vee Cx),\ (\exists x)[Bx \vee (\forall y)(Ay \supset By)]\}$
4. $\{(\forall x)Hx \supset Ma,\ \sim(Ma \vee (\exists y)\sim Hy),\ (\forall x)Hx\}$
5. $\{\sim(\forall x)(Rx \supset \sim Sx),\ (\forall y)(\sim Ry \ \&\ Sy)\}$
6. $\{\sim[Bb \vee (\forall y)(Cy \ \&\ \sim(\exists x)(Bx \vee Dx))],\ (\exists z)\sim Bz\}$
7. $\{(\forall x)(\forall y)(\sim Jxy \supset Jyx),\ \sim Jcc\}$
8. $\{\sim(\forall x)(\forall y)Nyx,\ (\exists x)(\exists y)Nxy\}$
9. $\{(\forall x)(Kx \equiv Ba),\ (\forall x)[Ba \supset (Kx \vee \sim Lx)]$
10. $\{(\forall z)Az \vee (\forall z)Bz,\ (\forall z)(Az \vee Bz)\}$

B. Utilice el método de los árboles de verdad para determinar si las siguientes fórmulas de *LC* son tautologías. Si la fórmula no es una tautología, utilice la información en el árbol para construir un contramodelo.

1. $(\exists x)(Dx \vee \sim Dx)$
2. $(\forall x)(Dx \vee \sim Dx)$
3. $(\forall x)(Hx \supset (\exists y)\sim Hy)$
4. $(\forall x)Dxb \vee (\exists x)\sim Dxb$
5. $[(\forall x)Ax \ \&\ (\forall y)(Ay \supset By)] \supset (\forall z)Bz$
6. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)Nxyz \supset (\forall x)(\forall y)(\forall z)Nxzy$
7. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Nxyz \supset Nxzy)$
8. $(\forall z)(Hz \equiv Lz) \supset ((\forall x)Hx \equiv (\forall x)Lx)$
9. $(\forall x)(\exists y)Rxy \supset (\forall x)(Rxa \supset (\exists y)Rya)$
10. $(\forall x)(Rxa \equiv \sim Px) \supset (\forall x)(Px \vee \sim(\exists y)Rxy)$

C. Utilice el método de los árboles de verdad para determinar si los siguientes pares de fórmulas de *LC* son semánticamente equivalentes. Si las fórmulas no son equivalentes, utilice la información en el árbol para construir una valuación bajo la cual tengan valores de verdad diferentes.

1.	$(\exists y)Kyy$	$\sim(\forall y)\sim Kyy$
2.	$(\forall x)(Ba \supset Fx)$	$Ba \supset (\forall x)Fx$
3.	$Mn \equiv (\forall z)Mz$	$(\exists z)Mz$
4.	$(\forall x)(Fx \vee Gx)$	$(\forall x)Fx \vee (\forall x)Gx$
5.	$(\exists x)(Fx \supset Ba)$	$(\forall x)Fx \supset Ba$
6.	$(\exists x)(Ax \ \&\ Bx)$	$(\exists x)Ax \ \&\ (\exists x)Bx$
7.	$(\forall y)(\forall z)(Ay \supset Bz)$	$(\forall y)(Ay \supset (\forall z)Bz)$
8.	$(\forall w)(Tw \equiv Uw)$	$Ta \equiv (\forall w)Uw$
9.	$(\forall w)(Tw \vee (\exists x)Ux)$	$(\forall w)(\exists x)(Tw \vee Ux)$
10.	$(\forall w)(Tw \supset (\forall x)Ux)$	$(\forall w)(\forall x)(Tw \supset Ux)$

Cap-8.pmd 280 13/07/07, 03:24 p.m.

D. Utilice el método de los árboles de verdad para determinar si los siguientes argumentos de *LC* son semánticamente válidos. Si el argumento no es válido, utilice la información en el árbol para construir una valuación bajo la cual las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.

1. $$\begin{array}{l} (\forall x)(\mathrm{C}x \vee \mathrm{D}x) \\ \hline (\forall x)\mathrm{C}x \vee (\forall x)\mathrm{D}x \end{array}$$

2. $$\begin{array}{l} (\forall x)(\mathrm{C}x \supset \mathrm{D}x) \\ \hline (\forall x)\mathrm{C}x \supset (\forall x)\mathrm{D}x \end{array}$$

3. $$\begin{array}{l} (\forall x)(\mathrm{A}x \supset \mathrm{B}x) \\ (\forall x)({\sim}\mathrm{C}x \supset {\sim}\mathrm{B}x) \\ \hline (\forall x)(\mathrm{A}x \supset \mathrm{C}x) \end{array}$$

4. $$\begin{array}{l} (\forall x)\mathrm{A}x \;\&\; (\forall y)\mathrm{B}y \\ \hline (\forall z)(\mathrm{A}z \;\&\; \mathrm{B}z) \end{array}$$

5. $$\begin{array}{l} (\exists x)(\forall y)(\mathrm{S}x \;\&\; \mathrm{T}y) \\ \hline (\forall x)(\exists y)(\mathrm{S}x \;\&\; \mathrm{T}y) \end{array}$$

6. $$\begin{array}{l} (\forall x)((\mathrm{A}x \vee \mathrm{B}x) \supset (\forall y)(\mathrm{C}y \supset \mathrm{D}y)) \\ \mathrm{Aa} \;\&\; (\mathrm{Cb} \;\&\; {\sim}\mathrm{Db}) \\ \hline (\forall x)(\mathrm{A}x \;\&\; {\sim}\mathrm{A}x) \end{array}$$

7. $$\begin{array}{l} (\forall x)(\mathrm{A}x\mathrm{a} \supset (\forall y)\mathrm{A}xy) \\ (\exists x)(\forall y){\sim}\mathrm{A}xy \\ \hline (\exists x)(\exists y){\sim}\mathrm{A}xy \end{array}$$

8. $$\begin{array}{l} (\forall x)(\forall y)(\mathrm{A}xy \equiv \mathrm{B}xy) \\ (\forall x)(\forall y)\mathrm{B}xy \\ \hline (\forall x)(\forall y)\mathrm{A}xy \end{array}$$

9. $$\begin{array}{l} {\sim}(\exists x)\mathrm{A}x \vee (\forall y)\mathrm{A}y \\ (\exists x){\sim}\mathrm{A}x \\ (\forall x)(\mathrm{A}x \supset (\mathrm{B}x \vee \mathrm{C}x)) \\ \hline (\exists y)(\mathrm{A}y \vee (\mathrm{B}y \vee \mathrm{C}y)) \end{array}$$

10. $$\begin{array}{l} (\forall x)(\mathrm{A}x \supset \mathrm{Ba}x) \\ (\forall x)(\mathrm{C}x \supset {\sim}\mathrm{Ba}x) \\ \mathrm{Cb} \\ \hline (\exists y){\sim}\mathrm{A}y \end{array}$$

Cap-8.pmd 281 13/07/07, 03:24 p.m.

8.5 El problema de los árboles infinitos

En el caso de la lógica proposicional, un árbol de verdad siempre es finito. El árbol se completa cuando todas sus ramas se cierran o cuando existe una rama abierta completa. Pero en la lógica cuantificada hay ciertos casos en los que es imposible declarar que un árbol abierto está terminado.

Hay dos formas en que un árbol puede ser infinito. El primer caso ocurre cuando las reglas son utilizadas en el orden incorrecto. En la sección 8.3 vimos un ejemplo en el cual un árbol que puede ser cerrado es construido de tal modo que permite la aplicación infinita de las reglas (∀) y (∃). Una descomposición siguiendo el protocolo establecido en esa sección elimina el problema.

Pero hay árboles de verdad que son genuinamente infinitos, es decir, que son infinitos incluso cuando las reglas son utilizadas en el orden correcto. Para ver cómo puede suceder esto, consideremos el siguiente conjunto:

(13) $\{(\forall x)(\exists y)(Mx \;\&\; Ny)\}$

1	$(\forall x)(\exists y)(Mx \;\&\; Ny)$	MC
2	$(\exists y)(Ma \;\&\; Ny)$ ✓	1 (∀)
3	Ma & Nb ✓	2 (∃)
4	Ma	3 (&)
5	Mb	3 (&)

En este punto debemos continuar el árbol porque la definición de una rama abierta completa exige que debe haber una instancia de sustitución de la fórmula universal para cada constante que aparezca en la rama. Los siguientes dos pasos son:

1	$(\forall x)(\exists y)(Mx \;\&\; Ny)$	MC
2	$(\exists y)(Ma \;\&\; Ny)$ ✓	1 (∀)
3	Ma & Nb ✓	2 (∃)
4	Ma	3 (&)
5	Nb	3 (&)
6	$(\exists y)(Mb \;\&\; Ny)$ ✓	1 (∀)
7	Mb & Nc ✓	6 (∃)
8	Mb	7 (&)
9	Nc	7 (&)
	...	

Como hemos introducido una nueva constante al descomponer el cuantificador existencial en el paso 7, debemos aplicar nuevamente (∀) a la línea 1, lo cual nos llevará a introducir una nueva constante, y así *ad infinitum*. El árbol simplemente nunca puede terminar.

Cap-8.pmd 282 13/07/07, 03:24 p.m.

Este tipo de árboles infinitos generalmente ocurren cuando un cuantificador existencial está dentro del rango de un cuantificador universal, como en el ejemplo anterior. La ausencia de un punto final en el proceso de descomposición naturalmente pone en peligro la posibilidad de utilizar el método de los árboles de verdad como un procedimiento mecánico de decisión para los fragmentos decidibles de *LC*, incluyendo el fragmento compuesto sólo de fórmulas con predicados monádicos.

La solución al problema de los árboles infinitos fue descubierta por George Boolos en un artículo titulado "Trees and Finite Satisfiability" (1984). Boolos introdujo una modificación al método de los árboles de verdad que permite utilizarlos como un procedimiento mecánico de decisión para aquellos conjuntos que son finitamente satisfacibles, es decir, que son consistentes en un modelo con dominio finito. En el capítulo anterior vimos que todos los conjuntos consistentes que sólo contienen predicados monádicos son finitamente satisfacibles. Por lo tanto, el método modificado de los árboles de verdad es un procedimiento mecánico de decisión para el fragmento monádico de *LC* y para cualquier conjunto de *LC* compuesto de fórmulas poliádicas siempre y cuando el conjunto tenga un modelo con dominio finito.

Boolos introdujo la siguiente regla, que es una modificación de la regla para la descomposición del existencial:

Regla Boolos (B)

$$(\exists \mathbf{x})\mathcal{P} \checkmark$$

$$\mathcal{P}(\mathbf{a}/\mathbf{x}) \quad \mathcal{P}(\mathbf{b}/\mathbf{x}) \quad \ldots \quad \mathcal{P}(\mathbf{n}/\mathbf{x}) \quad \mathcal{P}(\mathbf{m}/\mathbf{x})$$

La regla debe ser interpretada de la siguiente manera. Al descomponer una fórmula existencial en una rama con n constantes, debemos agregar $n + 1$ ramas al final de la rama. Al final de cada rama debe haber una instancia de sustitución de la fórmula existencial correspondiente a cada una de las constantes; en la última rama debe haber una instancia de sustitución con una constante nueva, simbolizada en la regla por $\mathcal{P}(\mathbf{m}/\mathbf{x})$.

Si aplicamos la regla (B) al ejemplo anterior, el árbol es diferente desde el comienzo:

1	$(\forall x)(\exists y)(Mx \;\&\; Ny)$		MC
2	$(\exists y)(Ma \;\&\; Ny) \checkmark$		1 (∀)
3	Ma & Na	Ma & Nb	2 (B)

Cap-8.pmd 283 13/07/07, 03:24 p.m.

Como el árbol contiene una constante en el momento de descomponer la fórmula existencial, debemos agregar dos ramas, una con una instancia de sustitución que utilice esa constante, y otra que utilice una constante nueva. A renglón seguido descomponemos la fórmula de la izquierda:

1	$(\forall x)(\exists y)(\mathrm{M}x \ \& \ \mathrm{N}y)$		MC
2	$(\exists y)(\mathrm{Ma} \ \& \ \mathrm{N}y)$ ✓		1 ($\forall$)
3	Ma & Na ✓	Ma & Mb	2 (B)
4	Ma	...	3 (&)
5	Na		3 (&)

La rama de la derecha puede seguir siendo descompuesta indefinidamente, como lo indican los tres puntos al final de la misma, pero la rama de la izquierda es una rama abierta completa según nuestra definición. En consecuencia, el árbol es un árbol abierto y el conjunto es semánticamente consistente.

¿Cuál es la justificación de esta regla? Al introducir la regla ($\exists$) vimos que la constante utilizada en la instancia de sustitución no debe ocurrir en la rama porque conjuntos claramente consistentes pueden terminar con un árbol de verdad cerrado, como en el siguiente ejemplo:

(14) $\{(\exists x)\mathrm{T}x, \ (\exists x){\sim}\mathrm{T}x\}$

1	$(\exists x)\mathrm{T}x$ ✓		MC
2	$(\exists x){\sim}\mathrm{T}x$ ✓		MC
3	Ta		1 ($\exists$)
4	~Ta	**ERROR**	2 ($\exists$)
	×		

Sin embargo, no siempre se genera un árbol cerrado al utilizar la regla ($\exists$) con una constante que ya aparezca en la rama. El siguiente conjunto también es semánticamente consistente en *LC*:

(15) $\{(\exists x)\mathrm{T}x, \ (\exists x)\mathrm{S}x\}$

1	$(\exists x)\mathrm{T}x$ ✓		MC
2	$(\exists x)\mathrm{S}x$ ✓		MC
3	Ta		1 ($\exists$)
4	Sa	**ERROR**	2 ($\exists$)

Cap-8.pmd 284 13/07/07, 03:24 p.m.

A pesar de la utilización errónea de la regla (∃), el árbol es abierto. Con base en este árbol podemos construir un modelo para el conjunto:

UD:	{1}
T*x*:	{1}
S*x*:	{1}
a:	1

Como la utilización de la regla (∃) *puede* llevar a resultados indeseables cuando se utiliza una constante que ya aparezca en la rama, es mejor curarse en salud y exigir una constante nueva. Pero cuando nos enfrentamos a un problema aún más grave, como el de los árboles infinitos, al descomponer una fórmula existencial podemos intentar obtener, en cada paso del árbol, una rama abierta completa así utilicemos constantes que ya hayan aparecido en el árbol.

Si utilizamos la nueva regla en el árbol correspondiente al conjunto **(14)**, obtenemos un árbol abierto, que es el resultado deseado:

1		(∃*x*)T*x* ✓		MC
2		(∃*x*)~T*x* ✓		MC
3		Ta		1 (B)
4	~Ta		Tb	2 (B)
	×			

Finalizaremos esta sección considerando un par de ejemplos de árboles infinitos en los cuales es necesario utilizar la regla (B). Probaremos que el siguiente conjunto es semánticamente consistente en *LC*:

(16) {(∀*x*)(∃*y*)Fab*xy*}

1			(∀*x*)(∃*y*)Fab*xy*			MC
2			(∃*y*)Faba*y* ✓			1 (∀)
3		Fabaa		Fabab	Fabac	2 (B)
4		(∃*y*)Fabb*y* ✓		(∃*y*)Fabb*y*	(∃*y*)Fabb*y*	1 (∀)
				...	...	
5	Fabba	Fabbb	Fabbc			4 (B)
		...				

Las dos primeras ramas son ramas abiertas completas porque existe una instancia de sustitución de la fórmula universal para cada constante en las ramas. La tercera rama

Cap-8.pmd 285 13/07/07, 03:24 p.m.

no es una rama abierta completa porque la introducción de la constante "c" nos obligaría a volver a utilizar la regla (∀). A partir de cualquiera de las dos ramas abiertas completas podemos construir un modelo para el conjunto. Utilizaremos la primera rama:

UD: {1, 2}

F*wxyz*: {<1, 2, 2, 1>}

a: 1

b: 2

Finalmente, probaremos que el siguiente conjunto es consistente en *LC*:

(17) {(∀*x*)(∃*y*)F*xy*, (∀*x*)(∃*y*)~F*xy*}

1	(∀*x*)(∃*y*)F*xy*	MC
2	(∀*x*)(∃*y*)~F*xy*	MC
3	(∃*y*)Fa*y* ✓	1 (∀)
4	Faa Fab	3 (B)
5	(∃*y*)~Fa*y* ✓ (∃*y*)~Fa*y* ✓	2 (∀)
6	~Faa ~Fab ~Faa ~Fab ~Fac	5 (B)
7	× (∃*y*)Fb*y* ✓ (∃*y*)Fb*y* × (∃*y*)Fb*y*	1 (∀)
8	(∃*y*)~Fb*y* ✓ (∃*y*)~Fb*y* (∃*y*)~Fb*y*	2 (∀)
	... ...	
9	Fba Fbb Fbc	7 (B)
10	~Fba ~Fbb ~Fbc ~Fba ~Fbb ~Fbc ~Fba ~Fbb ~Fbc ~Fbd	8 (B)
	× ... × ... ... × ...	

La segunda y la cuarta rama son ramas abiertas completas. Las demás son ramas infinitas o cerradas. Podemos utilizar la primera de las ramas abiertas completas para construir un modelo para el conjunto:

UD: {1, 2}

F*xy*: {<1, 1>, <2, 1>}

a: 1

b: 2

Cap-8.pmd 286 13/07/07, 03:24 p.m.

Es importante no olvidar que el método modificado de los árboles de verdad, el que utiliza la regla (B), sólo puede establecer la consistencia de un conjunto con un modelo finito. Si el conjunto sólo es consistente bajo un modelo infinito, el método no puede probarlo. El resultado será siempre un árbol infinito sin ramas abiertas completas. En consecuencia, la definición de un árbol abierto debe incluir las dos posibilidades:

> Un árbol de verdad de *LC* es un ***árbol abierto*** si y sólo si tiene al menos una rama abierta completa o una rama infinita.

El siguiente conjunto sólo es consistente en un modelo con un domino infinito, como los números naturales.

(18) $\{(\forall x)(\exists y)\mathrm{N}yx,\ (\forall x){\sim}\mathrm{N}xx,\ (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(\mathrm{N}xy\ \&\ \mathrm{N}yz) \supset \mathrm{N}xz]\}$

En consecuencia, el conjunto generará un árbol abierto sin ramas abiertas completas. No se debe caer en el error de pensar que en el futuro alguien descubrirá una modificación del método de los árboles de verdad que permitirá construir un árbol con ramas abiertas completas para este conjunto. Como vimos en el capítulo anterior, Church y Turing demostraron que no puede existir un procedimiento efectivo de decisión para todas las fórmulas, conjuntos y argumentos de *LC*.

Ejercicio 8.3

Utilice el método *modificado* de los árboles de verdad para determinar si los siguientes conjuntos son semánticamente consistentes en *LC*. Si el árbol tiene una rama abierta completa, utilice la información en la rama para construir un modelo para el conjunto.

1. $\{(\forall x)(\exists y)\mathrm{H}xy\}$
2. $\{(\forall x)(\exists y)(\mathrm{F}x \vee \mathrm{G}y)\}$
3. $\{(\forall x)(\exists y)[(\mathrm{F}x \vee \mathrm{Fa})\ \&\ \mathrm{G}y]\}$
4. $\{(\forall x)(\forall y)(\exists z)[\mathrm{F}x \vee (\mathrm{G}y\ \&\ \mathrm{H}z)]\}$
5. $\{(\forall x)(\exists y)[(\mathrm{F}x \vee {\sim}\mathrm{F}x) \supset (\mathrm{G}y\ \&\ {\sim}\mathrm{G}y)]\}$
6. $\{{\sim}((\exists x){\sim}\mathrm{F}x \supset (\mathrm{Fa} \supset {\sim}\mathrm{Fb}))\}$
7. $\{(\forall x)(\exists y)\mathrm{H}xy\ \&\ (\exists x)(\forall y)\mathrm{H}xy\}$
8. $\{{\sim}(\exists x)\mathrm{F}xx\ \&\ (\forall x)(\exists y)\mathrm{F}xy\}$
9. $\{(\forall x)(\exists y)(\exists z)[(\mathrm{F}x \vee \mathrm{G}z)\ \&\ (\mathrm{F}y \vee \mathrm{H}z)]\}$
10. $\{(\forall x){\sim}(\exists y)\mathrm{G}xy,\ (\forall x)(\forall y)(\mathrm{F}xy \vee {\sim}\mathrm{G}xy),\ {\sim}(\exists x){\sim}(\exists z)\mathrm{F}xz\}$

8.6 Árboles de verdad de *LCI*

El método de los árboles de verdad puede ser extendido fácilmente a la lógica cuantificada con identidad[2]. Basta con añadir una regla para la descomposición del operador de identidad y modificar la definición de una rama abierta completa.

Recordemos que una fórmula de forma **a** = **b** es verdadera si y sólo si las constantes **a** y **b** tienen la misma extensión, es decir, denotan el mismo objeto. Por lo tanto, si una de las constantes aparece en una fórmula, debe ser posible reemplazarla por la otra sin afectar el valor de verdad de la fórmula. La siguiente regla resume esta idea:

Descomposición del operador de identidad (=)

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}$$
$$\mathcal{P}\mathbf{a}$$

$$\mathcal{P}(\mathbf{b}/\mathbf{a})$$

La regla debe ser entendida de la siguiente manera: $\mathcal{P}$**a** es una fórmula en la cual la constante **a** ocurre una o más veces. Si **a** = **b** ocurre en la misma rama que $\mathcal{P}$**a**, entonces la regla nos permite agregar al final de la rama una fórmula en la cual al menos una **a** en $\mathcal{P}$**a** es reemplazada por **b**. Las fórmulas de forma **a** = **b** y $\mathcal{P}$**a** nunca se marcan como descompuestas porque pueden volver a ser utilizadas más adelante. A diferencia de todas las demás reglas, la regla (=) requiere la presencia de dos fórmulas para poder agregar una nueva fórmula al final de la rama.

Consideremos un ejemplo. Probaremos que el siguiente conjunto es semánticamente inconsistente en *LCI*:

(19) {Mab, a = b, ~Mba}

1	Mab	MC
2	a = b	MC
3	~Mba	MC
4	Mbb	1, 2 (=)
5	~Mbb	2, 3 (=)
	×	

Consideremos un ejemplo un poco más difícil. Demostraremos que el siguiente conjunto es semánticamente inconsistente en *LCI*:

2. En esta sección no utilizaremos ejemplos que generen árboles infinitos. Por esa razón usaremos la regla (∃) en lugar de la regla (B). Sin embargo, todas las consideraciones acerca de los árboles infinitos de *LC* también se aplican a los árboles de *LCI*.

Cap-8.pmd 288 13/07/07, 03:24 p.m.

(20) $\{(\forall x)Axx,\ (\exists x)(\exists y)\sim Axy,\ (\forall x)\ x = a\}$

1	$(\forall x)Axx$	MC
2	$(\exists x)(\exists y)\sim Axy$ ✓	MC
3	$(\forall x)\ x = a$	MC
4	$(\exists y)\sim Aby$ ✓	2 (∃)
5	~Abc	4 (∃)
6	Aaa	1 (∀)
7	c = a	3 (∀)
8	Aac	6, 7 (=)
9	b = a	3 (∀)
10	Abc	8, 9 (=)
	×	

Analicemos el ejemplo. La tercera fórmula nos dice que todas las cosas son idénticas al objeto denotado por “a”. Por lo tanto, debe ser posible transformar cualquier fórmula con una constante cualquiera en una fórmula con la constante “a” y viceversa. El árbol transforma la fórmula “Aaa” en “Abc” para crear así una contradicción con “~Abc”.

Desafortunadamente no es posible utilizar el método de los árboles de verdad en *LCI* simplemente añadiendo la regla (=). Para ver por qué, consideremos el siguiente conjunto:

(21) {a = b, ~(b = a)}

Claramente el conjunto es inconsistente. Pero el árbol que podemos construir con la ayuda de (=) no lo prueba.

1	a = b	MC
2	~(b = a)	MC
3	~(b = b)	1, 2 (=)
4	~(a = a)	1, 2 (=)

La única rama del árbol es una rama abierta completa puesto que hemos utilizado todas las reglas posibles y el árbol no contiene ninguna contradicción. Sin embargo, sabemos que el conjunto inicial es inconsistente. Es necesario, por tanto, modificar el método de los árboles de verdad para que arroje el resultado deseado.

La solución es modificar la definición de una *rama cerrada*. Recordemos que una rama de un árbol de verdad es una rama cerrada si y sólo si contiene una fórmula y su negación. Modificaremos la definición para que una rama también sea una rama cerrada cuando contenga una fórmula de forma ~(**a** = **a**):

Cap-8.pmd 289 13/07/07, 03:24 p.m.

> Una rama de un árbol de verdad de *LCI* es una ***rama cerrada*** si y sólo si contiene una fórmula $\mathcal{P}$ y su negación $\sim\mathcal{P}$, o si contiene una fórmula de forma ~(**a** = **a**).

Con la ayuda de esta nueva definición, podemos cerrar el árbol de verdad del conjunto **(21)**:

1	a = b	MC
2	~(b = a)	MC
3	~(b = b)	1, 2 (=)
	×	

Los siguientes ejemplos utilizan la nueva regla y la nueva definición. Probaremos que el siguiente conjunto es semánticamente inconsistente en *LCI*:

(22) {(∀*x*)(*x* = a ⊃ K*x*b), ~(∃*x*)K*xx*, a = b}

1	(∀*x*)(*x* = a ⊃ K*x*b)		MC
2	~(∃*x*)K*xx* ✓		MC
3	a = b		MC
4	(∀*x*)~K*xx*		2 (~∃)
5	a = a ⊃ Kab ✓		1 (∀)
6	~(a = a)	Kab	5 (⊃)
7	×	~Kaa	4 (∀)
8		~Kab	3, 7 (=)
		×	

Ahora probaremos que el siguiente argumento es válido en *LCI*:

(23) (∀*x*)((F*x* & ~G*x*) ⊃ ~(*x* = a))
~(Fa & ~Ga)

1	(∀*x*)((F*x* & ~G*x*) ⊃ ~(*x* = a))			MC
2	~~(Fa & ~Ga) ✓			MC
3	Fa & ~Ga ✓			2 (~~)
4	Fa			3 (&)
5	~Ga			3 (&)
6	(Fa & ~Ga) ⊃ ~(a = a) ✓			1 (∀)
7	~(Fa & ~Ga) ✓		~(a = a)	6 (⊃)
			×	
8	~Fa	~~Ga		7 (~&)
	×	×		

Cap-8.pmd 290 13/07/07, 03:24 p.m.

Antes de continuar debemos ajustar el protocolo de descomposición para incluir las nuevas reglas. De nuevo, el orden de descomposición es de suma importancia para garantizar que todos los conjuntos inconsistentes en *LCI* tengan un árbol de verdad cerrado. El nuevo protocolo es como sigue:

Protocolo de descomposición en *LCI*

Las reglas de descomposición deben ser utilizadas en el siguiente orden. En cada paso del árbol utilice inicialmente las reglas indicadas en el numeral 1. Si no es posible utilizar dichas reglas, utilice las reglas en el numeral 2, y así sucesivamente.

1. Reglas (~~), (&), (~∨), (~∃) y (~∀)
2. Reglas (∨), (⊃), (~&), (≡) y (~≡)
3. Regla (=)
4. Regla (∃)
5. Regla (∀)

Si las reglas de descomposición son utilizadas de acuerdo con este protocolo, cualquier conjunto inconsistente en *LCI* tendrá un árbol de verdad cerrado.

La introducción de la nueva regla también nos obliga a agregar un cuarto criterio a la definición de una rama abierta completa. La nueva definición es como sigue:

Una rama de un árbol de verdad de *LCI* es una ***rama abierta completa*** si y sólo si es una rama abierta finita y cada fórmula que aparece en la rama corresponde a alguno de los siguientes casos:

1. Una fórmula atómica o su negación, excepto si tiene la forma ~(**a** = **a**).
2. Una fórmula molecular o existencialmente cuantificada descompuesta.
3. Una fórmula universalmente cuantificada (∀**x**)$\mathcal{P}$ tal que: (i) al menos una instancia de $\mathcal{P}(\mathbf{a}_i/\mathbf{x})$ también ocurra en la rama; y (ii) para cada constante $\mathbf{a}_j$ que aparezca en la rama, $\mathcal{P}(\mathbf{a}_j/\mathbf{x})$ también ocurra en la rama.
4. Si la rama contiene una fórmula atómica de forma **a** = **b**, también debe contener todas las fórmulas atómicas de forma $\mathcal{P}$**ba**, o sus negaciones, que puedan ser agregadas al árbol utilizando la regla (=), excepto aquellas de forma **a** = **a**.

Cap-8.pmd 291 13/07/07, 03:24 p.m.

El cuarto criterio excluye las fórmulas de forma **a** = **a** porque es inoficioso agregar a la rama fórmulas que no pueden generar contradicciones. Si la rama contiene la negación de este tipo de fórmulas, por definición es una rama cerrada. A pesar de esta excepción, la cuarta cláusula nos obliga a agregar un número considerable de fórmulas al final de una rama antes de poder declararla una rama abierta completa

Consideremos un ejemplo de un árbol que contiene una rama abierta completa. Probaremos que el siguiente conjunto es consistente en *LCI*:

(24) {~(a = b), ~(b = c) ∨ (b = c), ~~(a = c)}

1	~(a = b)		MC
2	~(b = c) ∨ (b = c) ✓		MC
3	~~(a = c) ✓		MC
4	a = c		3 (~~)
5	~(b = c)	b = c	2 (∨)
6	~(c = b)	~(c = b)	1, 4 (=)
7		~(c = c)	5, 6 (=)
8	~(b = a)	×	4, 5 (=)
9	~(a = b)		4, 6 (=)

La rama de la izquierda es una rama abierta completa de acuerdo con la nueva definición: hemos combinado la única fórmula de identidad en el árbol, la fórmula "a = c", con todas las fórmulas atómicas, o sus negaciones, utilizando la regla (=).

Finalmente, también es posible construir una valuación en *LCI* utilizando la información proporcionada por una rama abierta completa. A los seis criterios estudiados en la sección 8.2 agregaremos un séptimo criterio:

7. Si $\mathcal{P}$ es una fórmula de *LCI* de forma **a** = **b** en una rama abierta completa, la extensión asignada a las constantes es el elemento del UD que le haya sido asignado a alguna constante con la cual hayan sido identificadas en un paso anterior. Si no han sido identificadas con alguna otra constante, la constante alfabéticamente anterior conserva la extensión asignada por el criterio 1.

El criterio es difícil de entender en abstracto. Consideremos un caso concreto: construiremos una valuación a partir del árbol correspondiente al conjunto **(24)**. El primer paso en la construcción de un modelo para el conjunto es la determinación del UD. La rama abierta completa contiene tres constantes, así que provisionalmente diremos que

Cap-8.pmd 292 13/07/07, 03:24 p.m.

el UD es el conjunto {1, 2, 3}. Sin embargo, como la fórmula "a = c" aparece en la rama, debemos asignarle a las dos constantes la misma extensión, lo cual reduce el UD a dos elementos. Ahora bien, lo que dice el criterio 6 recién introducido es que a ambas constantes debemos asignarles como extensión el elemento del UD que le haya sido asignado a la constante alfabéticamente anterior de acuerdo con el criterio 1. Como el criterio 1 le asigna a "a" el número 1, también debemos asignarle a "c" el número 1 como extensión. La valuación completa es la siguiente:

UD:	{1, 2}
a:	1
b:	2
c:	1

Consideremos un ejemplo final. Probaremos que el siguiente argumento es semánticamente inválido en *LCI*:

(25) $(\forall x)(\mathrm{R}x\mathrm{c} \supset x = \mathrm{a})$
$\sim(\mathrm{c} = \mathrm{a})$
$\sim(\exists x)\mathrm{R}x\mathrm{c}$

1			$(\forall x)(\mathrm{R}x\mathrm{c} \supset x = \mathrm{a})$			MC
2			$\sim(\mathrm{c} = \mathrm{a})$			MC
3			$\sim\sim(\exists x)\mathrm{R}x\mathrm{c}$ ✓			MC
4			$(\exists x)\mathrm{R}x\mathrm{c}$ ✓			3 (~~)
5			Rbc			4 (∃)
6			Rbc ⊃ b = a ✓			1 (∀)
7	~Rbc		b = a			6 (⊃)
8	×		Rac ⊃ a = a ✓			1 (∀)
9		~Rac		a = a		6 (⊃)
10		~Rbc				7, 9 (=)
11		×		Rcc ⊃ c = a ✓		1 (∀)
12			~Rcc		c = a	11 (⊃)
13			~(c = b)		×	2, 7 (=)
14			a = b			7, 9 (=)
15			Rac			5, 7 (=)

El árbol tiene una rama abierta completa. Por lo tanto el argumento es semánticamente inválido en *LCI*. Bajo la siguiente valuación las premisas son verdaderas y la conclusión falsa:

UD:	$\{1, 2\}$
Rxy:	$\{<1, 2>\}$
a:	1
b:	1
c:	2

A pesar de que hay tres constantes en el árbol, el UD sólo tiene dos elementos porque "a" y "b" denotan el mismo número. Como está predeterminado que "a" reciba como denotación el número 1, "b" también debe denotar el número 1.

Ejercicio 8.4

A. Utilice el método de los árboles de verdad para determinar si los siguientes conjuntos son semánticamente consistentes en *LCI*. Si el conjunto tiene una rama abierta completa, utilice la información en la rama para construir un modelo del conjunto.

1. $\{\sim(\forall x)\ x = x\}$
2. $\{\sim(\mathrm{a} = \mathrm{b} \equiv \mathrm{b} = \mathrm{a})\}$
3. $\{(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \vee y = z)\}$
4. $\{\sim(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(x = z\ \&\ y = z) \supset x = y]\}$
5. $\{(\forall x)(\forall y)[\mathrm{A}xy \equiv (\exists z)(y = z\ \&\ \sim\mathrm{A}xz)]\}$
6. $\{(\forall x)\mathrm{H}xx,\ (\forall x)\ x = \mathrm{a},\ (\exists x)(\exists y)\sim\mathrm{H}xy\}$
7. $\{(\forall x)(x = \mathrm{a} \supset \sim\mathrm{A}x\mathrm{c}),\ \mathrm{a} = \mathrm{c},\ (\exists x)\sim\mathrm{A}xx\}$
8. $\{(\forall x)(\mathrm{G}x\mathrm{b} \supset x = \mathrm{a}),\ (\exists x)\mathrm{G}x\mathrm{b},\ \sim(\mathrm{b} = \mathrm{a})\}$
9. $\{(\forall x)((\mathrm{A}x\ \&\ \sim\mathrm{B}x) \supset \sim(x = \mathrm{a})),\ \mathrm{Aa}\ \&\ \sim\mathrm{Ba}\}$
10. $\{(\exists x)\mathrm{F}x\mathrm{a}\ \&\ (\exists x)\mathrm{F}x\mathrm{b},\ \sim(\forall x)(\forall y)((\mathrm{F}x\mathrm{a}\ \&\ \mathrm{F}y\mathrm{b}) \supset \sim(x = y)),\ \sim(\mathrm{a} = \mathrm{b})\}$

B. Utilice el método de los árboles de verdad para determinar si los siguientes argumentos son semánticamente válidos en *LCI*.

1.
$$\frac{\begin{array}{l}\mathrm{Aa}\\ \mathrm{a} = \mathrm{b}\end{array}}{\mathrm{Ba}}$$

2.
$$\frac{\begin{array}{l}\mathrm{Fa}\\ \sim\mathrm{Gb}\end{array}}{\sim(\mathrm{a} = \mathrm{b})}$$

Cap-8.pmd 294 13/07/07, 03:24 p.m.

3. $(\forall x)(Ax \supset Bx)$
$\sim Aa$
$\overline{(\exists x)\sim(x = a)}$

4. Fab
$\overline{(\exists x)(\exists y)\sim(x = y)}$

5. $(\forall x)(a = x \supset (Ax \vee Bx))$
$(\forall x)\sim Bx$
$(\exists x)\ x = a$
$\overline{(\exists x)Ax}$

6. $Fa \ \& \ (\forall x)(Fx \supset x = a)$
$(\exists x)(Gx \ \& \ Fx)$
$\overline{Ga}$

7. $(\forall x)(Ax \supset x = a) \vee (\forall x)(Bx \supset x = b)$
$\overline{(\forall x)(x = a \vee x = b)}$

8. $(\forall x)(\exists y)(Fy \ \& \ Gyx)$
$\sim Fa$
$\overline{(\exists x)(Fx \ \& \ \sim(x = a))}$

9. $(\forall x)[Abcx \ \& \ (\forall y)(Abcy \supset y = x)]$
$\overline{\sim(\exists z)Abcz \vee (\exists x)(\exists y)(Abcx \ \& \ Abcy)}$

10. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Fxy \vee Gyz) \supset (\exists w)(Hw \ \& \ y = w)]$
$(\forall z)(z = z \equiv Gzz)$
$\overline{(\exists x)Hx}$

Cap-8.pmd 295 13/07/07, 03:24 p.m.

9. Deducción natural en *LC*

En este capítulo desarrollaremos un sistema de deducción natural para la lógica cuantificada llamado *DNC* (Deducción Natural Cuantificada). El sistema nos proporciona un método *sintáctico* para operar con fórmulas del lenguaje *LC*. Como vimos en el capítulo 5, un sistema deductivo consiste de una serie de transformaciones sintácticas de unas fórmulas en otras siguiendo un criterio predeterminado. En principio, es posible escoger cualquier criterio. Por ejemplo, es posible construir un sistema deductivo en el que las reglas transformativas inviertan el valor de verdad de cualquier fórmula. Dicho criterio, sin embargo, tendría muy poca utilidad. La virtud de la lógica deductiva reside en que, dada una serie de fórmulas verdaderas, o que se asumen como verdaderas, nos permite deducir sólo sus consecuencias verdaderas. Por esa razón el criterio que deben cumplir las reglas de transformación sintáctica en un sistema de deducción natural es *la preservación de la verdad*.

9.1 El sistema *DNC*

El sistema *DNC* incluye todas las reglas de derivación de *SDN*, el sistema de deducción natural de la lógica proposicional, con la salvedad de que ahora se aplican a fórmulas de *LC*. El sistema posee además cuatro reglas que nos permiten introducir y eliminar los cuantificadores. Estudiaremos cada una de estas reglas con detenimiento.

9.1.1 *Eliminación del universal*

La primera regla nos permite eliminar el cuantificador universal en una fórmula, reemplazando la variable universalmente cuantificada por cualquiera de sus instancias. Esta regla se conoce generalmente como "Instanciación Universal". Aquí la llamaremos "Eliminación del Universal" para mantener la coherencia con las demás reglas. Consideremos un ejemplo antes de ver la definición formal. Demostraremos que el siguiente argumento es válido en *DNC* derivando la conclusión de las premisas:

Cap-9.pmd 296 22/06/07, 12:11 p.m.

(1) Todos los matemáticos fuman pipa.
Gödel es matemático.
———————————————
Gödel fuma pipa.

La primera premisa hace una afirmación acerca de todos los matemáticos, a saber, les atribuye la propiedad de ser fumadores de pipa. La segunda premisa identifica a uno de esos matemáticos, lo cual nos permite adscribirle a ese matemático en particular la propiedad de ser fumador de pipa. Formalmente, la derivación sería como sigue:

Derive: Pg

1	$(\forall y)(\text{M}y \supset \text{P}y)$	Suposición
2	Mg	Suposición
3	$\text{Mg} \supset \text{Pg}$	1 ($\forall$E)
4	Pg	2, 3 ($\supset$E)

Para definir formalmente esta regla utilizaremos una vez más el concepto de *instancia de sustitución*. Recordemos que la instancia de sustitución $\mathcal{P}(\mathbf{a}/\mathbf{x})$ de una fórmula cuantificada se genera al reemplazar cada instancia de la variable cuantificada **x** por una constante **a**. En la derivación anterior, "$\text{Mg} \supset \text{Pg}$" es una instancia de sustitución de "$(\forall y)(\text{M}y \supset \text{P}y)$". La regla de derivación "Eliminación del Universal" nos permite derivar una instancia de sustitución de una fórmula universalmente cuantificada. La regla es:

Eliminación del universal ($\forall$E)

	$(\forall \mathbf{x})\mathcal{P}$
▶	$\mathcal{P}(\mathbf{a}/\mathbf{x})$

La constante individual utilizada para crear la instancia de sustitución puede ocurrir en la fórmula cuantificada. Por ejemplo, si queremos eliminar el cuantificador universal en la fórmula:

(2) $(\forall x)(\text{S}x\text{a} \supset \text{H}x\text{a})$

cualquiera de las siguientes dos fórmulas es una instancia de sustitución permitida:

(2a) $\text{S}\underline{\text{b}}\text{a} \supset \text{H}\underline{\text{b}}\text{a}$

(2b) $\text{S}\underline{\text{a}}\text{a} \supset \text{H}\underline{\text{a}}\text{a}$

Cap-9.pmd 297 22/06/07, 12:11 p.m.

La regla sólo nos permite eliminar un cuantificador a la vez. Consideremos el siguiente argumento:

(3) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Vxy \ \& \ Vyz) \supset Vxz]$
Vab & Vbc

Vac

Derive: Vac

1	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Vxy \ \& \ Vyz) \supset Vxz]$	Suposición
2	Vab & Vbc	Suposición
3	$(\forall y)(\forall z)[(Vay \ \& \ Vyz) \supset Vaz]$	1 ($\forall$E)
4	$(\forall z)[(Vab \ \& \ Vbz) \supset Vaz]$	3 ($\forall$E)
5	$(Vab \ \& \ Vbc) \supset Vac$	4 ($\forall$E)
6	Vac	2, 5 ($\supset$E)

La constante utilizada para crear la instancia de sustitución en los pasos 3, 4 y 5 está determinada por la estrategia de derivación. La estrategia más adecuada es construir un condicional cuyo antecedente sea la fórmula 2 y cuyo consecuente sea la fórmula que queremos derivar.

9.1.2 *Introducción del existencial*

La siguiente regla que estudiaremos es conocida como "Generalización Existencial". En *DNC* la llamaremos "Introducción del Existencial". La regla nos permite generalizar, a partir de una caso particular, la existencia de al menos un elemento en la extensión de un predicado. Consideremos el siguiente ejemplo:

(4) Margarita es una clarinetista.

Existe alguien que es clarinetista.

La conclusión se sigue de la premisa, pues es una generalización existencial a partir de uno de sus casos. Formalmente:

Derive: $(\exists x)Cx$

1	Cm	Suposición
2	$(\exists x)Cx$	1 ($\exists$I)

Cap-9.pmd 298 22/06/07, 12:11 p.m.

Podemos definir la regla de la siguiente manera:

Introducción del existencial (∃I)

	$\mathcal{P}\,(\mathbf{a}/\mathbf{x})$
▶	$(\exists \mathbf{x})\mathcal{P}$

La regla no requiere la generalización de todas las instancias de una constante. Por ejemplo, las siguientes tres derivaciones son aplicaciones correctas de la regla:

(5)

1	Rmm	María respeta a María.
2	$(\exists x)\mathrm{R}xx$	Existe algo que se respeta a sí mismo.

(6)

1	Rmm	María respeta a María.
2	$(\exists x)\mathrm{R}x\mathrm{m}$	Existe algo que respeta a María.

(7)

1	Rmm	María respeta a María.
2	$(\exists x)\mathrm{Rm}x$	Existe algo que María respeta.

La fórmula “Rmm” es una instancia de sustitución de “$(\exists x)\mathrm{R}xx$”, de “$(\exists x)\mathrm{R}x\mathrm{m}$” y de “$(\exists x)\mathrm{Rm}x$”. Por eso es posible derivar cualquiera de las tres fórmulas cuantificadas a partir de esa instancia de sustitución.

La regla sólo nos permite introducir un cuantificador a la vez. Para derivar la conclusión del siguiente argumento, por ejemplo, necesitamos aplicar la regla dos veces:

(8) Andrea ama a Abel y Abel ama a Andrea.
Hay dos personas que se aman.

Derive: $(\exists x)(\exists y)(\mathrm{A}xy \ \& \ \mathrm{A}yx)$

1	Aab & Aba	Suposición
2	$(\exists y)(\mathrm{Aa}y \ \& \ \mathrm{A}y\mathrm{a})$	1 (∃I)
3	$(\exists x)(\exists y)(\mathrm{A}xy \ \& \ \mathrm{A}yx)$	2 (∃I)

El cuantificador nuevo siempre es el operador lógico principal. Por eso los cuantificadores deben ser introducidos en el orden inverso al orden en el que queramos que aparezcan.

Cap-9.pmd 299 22/06/07, 12:11 p.m.

9.1.3 *Introducción del universal*

La regla de introducción para el cuantificador universal es a veces llamada "Generalización Universal". Aquí la llamaremos "Introducción del Universal". Comenzaremos el estudio de la regla a través de un ejemplo:

(9) Todo aquél que haya sido elegido Papa es sacerdote católico.
Todo aquél que sea sacerdote católico es célibe.
———
Todo aquél que haya sido elegido Papa es célibe.

Si tomamos un individuo arbitrario, por ejemplo, José Pérez, podemos afirmar que si José Pérez fue elegido Papa, es un sacerdote católico, y que si es un sacerdote católico, es célibe. De aquí se sigue que si José Pérez fue elegido Papa, es célibe. Podemos hacer el mismo ejercicio con cualquier individuo, y el resultado será el mismo. La regla "Introducción del Universal" nos permite derivar una fórmula universal de una instancia de sustitución de esa fórmula, siempre y cuando la constante en la instancia de sustitución pueda ser reemplazada arbitrariamente por cualquier otra *salva veritate*, es decir, sin cambiar su valor de verdad. La formalización del anterior argumento nos ayudará a entender cómo funciona la regla:

Derive: $(\forall x)(\mathrm{P}x \supset \mathrm{C}x)$

1	$(\forall x)(\mathrm{P}x \supset \mathrm{S}x)$	Suposición
2	$(\forall x)(\mathrm{S}x \supset \mathrm{C}x)$	Suposición
3	$\mathrm{Pa} \supset \mathrm{Sa}$	1 $(\forall\mathrm{E})$
4	$\mathrm{Sa} \supset \mathrm{Ca}$	2 $(\forall\mathrm{E})$
5	│ Pa	Suposición
6	│ Sa	3, 5 $(\supset\mathrm{E})$
7	│ Ca	4, 6 $(\supset\mathrm{E})$
8	$\mathrm{Pa} \supset \mathrm{Ca}$	5-7 $(\supset\mathrm{I})$
9	$(\forall x)(\mathrm{P}x \supset \mathrm{C}x)$	8 $(\forall\mathrm{I})$

La constante "a" ha sido seleccionada arbitrariamente en el sentido de que cualquier otra constante hubiera podido ocupar su lugar para producir un resultado análogo al obtenido en la línea 8. Como "a" no aparece en ninguna de las suposiciones principales de la derivación, no utilizamos ninguna información específica acerca del individuo designado por "a". Por lo tanto, el resultado obtenido en la línea 8 puede ser generalizado.

Examinemos ahora un caso en el que *no* es posible llevar a cabo una generalización universal:

Cap-9.pmd 300 22/06/07, 12:11 p.m.

(10) Joseph Ratzinger fue elegido Papa.
Todo aquél que haya sido elegido Papa es un sacerdote católico.
Todo aquél sea un sacerdote católico es célibe.
Joseph Ratzinger es célibe.

Supongamos que intentamos generalizar la conclusión de este argumento y afirmar que todos los individuos son célibes. Como el individuo no fue arbitrariamente seleccionado, esta generalización no está permitida. Por ejemplo, no podemos inferir que Felipe o Alfonso o Jaime es célibe porque el argumento no nos dice que alguno de ellos haya sido elegido Papa. El argumento se puede formalizar de la siguiente manera:

(10a) Derive: $(\forall x)Cx$

1	Pr	Suposición	
2	$(\forall x)(Px \supset Sx)$	Suposición	
3	$(\forall x)(Sx \supset Cx)$	Suposición	
4	$Pr \supset Sr$	2 ($\forall$E)	
5	Sr	1, 4 ($\supset$E)	
6	$Sr \supset Cr$	3 ($\forall$E)	
7	Cr	5, 6 ($\supset$E)	
8	$(\forall x)Cx$	7 ($\forall$I)	**ERROR**

De "Cr" no podemos inferir que "$(\forall x)Cx$" porque la constante "r" no fue arbitrariamente seleccionada. La constante ocurre en la primera suposición, y esa información es utilizada para derivar "Cr". No hubiéramos podido derivar, por ejemplo, "Ca" en la línea 7.

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos definir la regla de la siguiente manera:

Introducción del universal ($\forall$I)

| $\mathcal{P}$ (**a**/**x**)
|
▶ | $(\forall \mathbf{x})\mathcal{P}$

Siempre y cuando:

(i) **a** no ocurra en una suposición que no haya sido desechada.

(ii) **a** no ocurra en $(\forall \mathbf{x})\mathcal{P}$.

Las dos condiciones que debe cumplir la regla son de suma importancia. El siguiente es un ejemplo de un fragmento de derivación en el que la primera condición no se cumple:

Cap-9.pmd 301 22/06/07, 12:11 p.m.

(11)

1	Pb	Suposición	
2	$(\forall x)Px$	1 ($\forall$I)	**ERROR**

El error en este caso reside en que la constante “b” utilizada para crear la generalización existencial no es arbitraria. Sabemos que el objeto denotado por “b” está en la extensión de “P”, pero no podemos utilizar esa información para afirmar que cualquier objeto del UD también está en la extensión de “P”. Por ejemplo, del hecho de que Baudelaire sea un poeta no podemos inferir que todas las personas sean poetas.

En el siguiente fragmento de una derivación, se viola la segunda condición:

(12)

1	$(\forall x)Pxx$	Suposición	
2	Paa	1 ($\forall$E)	
3	$(\forall x)Pxa$	2 ($\forall$I)	**ERROR**

El error reside en que la constante arbitraria seleccionada en la línea 2 deja de serlo en la línea 3, pues allí se afirma que todos los elementos del UD tienen la relación “P” con el objeto denotado por ella. Por ejemplo, del hecho de que 5 sea mayor o igual a 5 no se sigue que todos los números sean mayores o iguales a 5.

Los siguientes ejemplos combinan las tres reglas estudiadas hasta ahora. Para demostrar que el siguiente argumento es válido, derivaremos la conclusión de las premisas:

(13) $\sim(\exists x)Cx$

$(\forall x)\sim Cx$

Derive: $(\forall x)\sim Cx$

1	$\sim(\exists x)Cx$	Suposición
2	| Ca	Suposición
3	| $(\exists x)Cx$	2 ($\exists$I)
4	| $\sim(\exists x)Cx$	1 (R)
5	$\sim$Ca	2-4 ($\sim$I)
6	$(\forall x)\sim Cx$	5 ($\forall$I)

La derivación utiliza la estrategia de la reducción al absurdo. El paso 6 está justificado porque hubiéramos podido utilizar cualquier constante en lugar de “a” y el resultado en la línea 5 habría sido el mismo. Consideremos un segundo ejemplo:

(14) $\sim(\forall x)Cx$

$(\exists x)\sim Cx$

Cap-9.pmd 302 22/06/07, 12:11 p.m.

Derive: $(\exists x){\sim}Cx$

1	$\sim(\forall x)Cx$	Suposición
2	$\quad \sim(\exists x){\sim}Cx$	Suposición
3	$\quad\quad \sim Ca$	Suposición
4	$\quad\quad (\exists x){\sim}Cx$	3 (∃I)
5	$\quad\quad \sim(\exists x){\sim}Cx$	2 (R)
6	$\quad Ca$	3-5 (~E)
7	$\quad (\forall x)Cx$	6 (∀I)
8	$\quad \sim(\forall x)Cx$	1 (R)
9	$(\exists x)Cx$	2-8 (~E)

Aunque esta derivación es más compleja que las anteriores, las estrategias utilizadas son las mismas del capítulo 5. La única diferencia es que en *DNC* hay que tener en cuenta más elementos al construir la derivación.

9.1.4 *Eliminación del existencial*

La última regla del sistema *DNC* es conocida como "Instanciación Existencial"; aquí la llamaremos "Eliminación del Existencial". Es la regla que requiere de más cuidado en su aplicación, pues sólo es posible utilizarla bajo ciertas condiciones específicas. La complicación surge del hecho de que una fórmula existencialmente cuantificada como "$(\exists x)Gx$", por ejemplo, sólo nos dice que hay al menos un elemento del UD que está en la extensión de "G", pero no nos dice cuál es ese elemento. Por eso la regla no nos permite reemplazar directamente la variable por una constante. El siguiente ejemplo ilustra cómo se debe usar la regla:

(15) Algunos cantantes son egipcios.
———————————————
Algunos egipcios son cantantes.

Este argumento se puede simbolizar de la siguiente manera:

(15a) $(\exists x)(Cx \ \& \ Ex)$
———————————————
$(\exists x)(Ex \ \& \ Cx)$

Es evidente que el argumento es válido. Sin embargo, al intentar construir una derivación en *DNC* nos encontramos inmediatamente con un obstáculo: no podemos acceder al contenido de la premisa sin antes eliminar el cuantificador existencial. Pero podemos razonar de la siguiente manera. Supongamos que Ahmed es un cantante egipcio. En tal caso, podemos decir que Ahmed es egipcio y también podemos decir que es un cantante. Por lo tanto, podemos decir que es un egipcio que es cantante. Y de manera más general, podemos decir que hay egipcios que son cantantes. Podemos hacer el mismo ejercicio con cualquier otro individuo y el resultado será el mismo.

Cap-9.pmd 303 22/06/07, 12:11 p.m.

Ahmed es simplemente un intermediario que nos permite manipular el orden de los predicados. En particular, no usamos ninguna información acerca de Ahmed para obtener la conclusión. La derivación es como sigue:

Derive: $(\exists x)(Ex \ \& \ Cx)$

1	$(\exists x)(Cx \ \& \ Ex)$	Suposición
2	$\quad$ Ca & Ea	Suposición
3	$\quad$ Ca	2 (&E)
4	$\quad$ Ea	2 (&E)
5	$\quad$ Ea & Ca	3, 4 (&I)
6	$\quad (\exists x)(Ex \ \& \ Cx)$	5 ($\exists$I)
7	$(\exists x)(Ex \ \& \ Cx)$	1, 2-6 ($\exists$E)

En la derivación reemplazamos la variable en la fórmula existencialmente cuantificada por una constante arbitraria (paso 2) y logramos derivar una fórmula nueva (paso 6). En la siguiente línea de rango (paso 7) afirmamos que la nueva fórmula se sigue de la fórmula existencialmente cuantificada. El paso de la línea 6 a la 7 está justificado porque en la subderivación podríamos haber utilizado cualquier otra constante y el resultado habría sido exactamente el mismo. En la justificación de la línea 7 indicamos la línea en la que está la fórmula existencialmente cuantificada y los pasos de la subderivación que nos permitió derivar el resultado.

La definición de la regla sintetiza estos resultados:

Eliminación del existencial ($\exists$E)

| $(\exists \mathbf{x})\mathcal{P}$
| $\quad$ | $\mathcal{P}$ **(a/x)**
| $\quad$ | ———
| $\quad$ | $\mathcal{Q}$
▶ | $\mathcal{Q}$

Siempre y cuando:

(i) **a** no ocurra en una suposición que no haya sido desechada.

(ii) **a** no ocurra en $(\exists \mathbf{x})\mathcal{P}$.

(iii) **a** no ocurra en $\mathcal{Q}$.

Cap-9.pmd 304 22/06/07, 12:11 p.m.

Estas tres condiciones garantizan que la constante **a** sea completamente arbitraria. La siguiente derivación ilustra las consecuencias de utilizar la regla cuando no se cumple la primera condición:

(16)

1	Hb	Suposición	
2	$(\exists x)\mathrm{M}x$	Suposición	
3	Mb	Suposición	**ERROR**
4	Hb & Mb	1, 3 (&I)	
5	$(\exists x)(\mathrm{H}x \;\&\; \mathrm{M}x)$	4 (∃I)	
6	$(\exists x)(\mathrm{H}x \;\&\; \mathrm{M}x)$	2, 3-5 (∃E)	

El error reside en que “b” ocurre en la primera suposición, lo cual hace que no sea una constante arbitraria. Ya sabemos que el objeto designado por “b” está en la extensión de “H”. Por ejemplo, del hecho de que Russell sea un hombre, y de que exista al menos una mujer, no se sigue que exista un hombre que es mujer.

Podemos ilustrar las consecuencias de violar la segunda condición con el siguiente ejemplo:

(17)

1	$(\exists y)\mathrm{A}y\mathrm{a}$	Suposición	
2	Aaa	Suposición	**ERROR**
3	$(\exists x)\mathrm{A}xx$	2 (∃I)	
4	$(\exists x)\mathrm{A}xx$	1, 2-3 (∃E)	

El error reside en que “a” ocurre en “$(\exists y)\mathrm{A}y\mathrm{a}$”. La fórmula “$(\exists y)\mathrm{A}y\mathrm{a}$” nos proporciona información acerca del objeto designado por “a”, y por lo tanto “a” no es una constante arbitraria. Por ejemplo, del hecho de que alguien ame a Ahmed, no se sigue que alguien se ame a sí mismo.

Finalmente, la siguiente derivación ilustra la violación de la tercera condición:

(18)

1	$(\exists x)(\mathrm{C}x \;\&\; \mathrm{E}x)$	Suposición	
2	Ca & Ea	Suposición	
3	Ca	2 (&E)	
4	Ca	1, 2-3 (∃E)	**ERROR**

En este caso la constante “a” introducida en la línea 2 no sirvió sólo de intermediaria, sino que fue utilizada sustancialmente para obtener “Ca”. Por ejemplo, del hecho de que exista un cantante egipcio no se sigue que Aristóteles sea cantante.

Cap-9.pmd 305 22/06/07, 12:11 p.m.

Los siguientes ejemplos ilustran el uso correcto de la regla.

(19) Derive: Kb

1	$(\forall x)(Kx \supset Kb)$	Suposición
2	$(\exists x)Kx$	Suposición
3	$\quad Ka$	Suposición
4	$\quad Ka \supset Kb$	1 (∀E)
5	$\quad Kb$	3, 4 (⊃E)
6	Kb	2, 3-5 (∃E)

En la derivación reemplazamos la variable en "$(\exists x)Kx$" por la constante "a" para obtener "Kb", pero hubiéramos podido utilizar cualquier otra constante (excepto "b") y el resultado habría sido el mismo. Por eso afirmamos que "Kb" se sigue de "$(\exists x)Kx$".

Demostraremos ahora que el siguiente argumento es válido derivando la conclusión de las premisas:

(20) $\dfrac{\sim(\exists x)(Ax \vee Bx)}{\sim(\exists x)Ax}$

Derive: $\sim(\exists x)Ax$

1	$\sim(\exists x)(Ax \vee Bx)$	Suposición
2	$\quad (\exists x)Ax$	Suposición
3	$\quad\quad Ab$	Suposición
4	$\quad\quad Ab \vee Bb$	3 (∨I)
5	$\quad\quad (\exists x)(Ax \vee Bx)$	4 (∃I)
6	$\quad (\exists x)(Ax \vee Bx)$	2, 3-5 (∃E)
7	$\quad \sim(\exists x)(Ax \vee Bx)$	1 (R)
8	$\sim(\exists x)Ax$	2-7 (~I)

Terminaremos esta sección señalando algunos errores comunes al utilizar las reglas. El primero consiste en aplicar una de las reglas a una parte de una fórmula y no a la fórmula completa, como en el siguiente ejemplo:

(21)

1	$(\forall x)Fx \supset Gd$	Suposición	
2	$Fd \supset Gd$	1 (∀E)	**ERROR**

La regla de eliminación del cuantificador universal sólo puede ser aplicada cuando el cuantificador es el operador lógico principal. En la suposición, el operador lógico principal es el condicional. La derivación nos permitiría construir el siguiente argumento inválido:

Cap-9.pmd 306 22/06/07, 12:11 p.m.

(21a) Si todos contribuyen dinero, entonces David puede pagar la matrícula.
_____
Si David contribuye dinero, entonces David puede pagar la matrícula.

Supongamos que David contribuyó dinero pero no todos lo hicieron; en consecuencia, David no pudo pagar la matrícula. Bajo estas circunstancias, la premisa del argumento sería verdadera y la conclusión falsa.

La lectura errónea de la negación también es un error frecuente. Consideremos el siguiente caso:

(22)

1	$\sim(\forall x)Fx$	Suposición	
2	$\sim Fd$	1 ($\forall$E)	**ERROR**

Al igual que en el caso anterior, no es posible aplicar la regla porque el operador lógico principal no es el cuantificador. La derivación nos permitiría construir el siguiente argumento inválido:

(22a) No todos los números naturales son pares.
_____
Dos no es par.

Para poder aplicar la regla de eliminación del cuantificador universal en este caso es necesario eliminar la negación primero utilizando alguna de las otras reglas del sistema.

La siguiente derivación ilustra un error muy frecuente en la aplicación de la generalización existencial:

(23)

1	$Fd \supset Gd$	Suposición	
2	$(\exists x)Fx \supset Gd$	1 ($\exists$I)	**ERROR**

Aunque la regla para la introducción del cuantificador existencial no requiere la generalización de todas las instancias de una constante, el cuantificador debe ser el operador lógico principal de la fórmula resultante. En este caso el operador lógico principal es el condicional. La derivación nos permitiría construir el siguiente argumento inválido:

(23a) Si David es bonaerense, entonces David es argentino.
_____
Si alguien es bonaerense, entonces David es argentino.

Supongamos que David es chileno y el UD son las personas. En tal caso la premisa es verdadera pero la conclusión es falsa. La aplicación correcta de la regla es:

(24)

1	$Fd \supset Gd$	Suposición
2	$(\exists x)(Fx \supset Gd)$	1 ($\exists$I)

Finalmente, no se debe caer en la tentación de aplicar la regla de eliminación del cuantificador universal sobre dos cuantificadores a la vez, como en el siguiente ejemplo:

(25)	1	$(\forall x)Fx \supset (\forall x)Gx$	Suposición	
	2	$Fa \supset Ga$	1 $(\forall E)$	**ERROR**

Esta derivación no preserva la verdad de la suposición inicial cuando "Fa" es verdadera y "$(\forall x)Fx$", "$(\forall x)Gx$" y "Ga" son falsas.

Ejercicio 9.1

Complete las siguientes derivaciones.

1. Derive: (Na & Nb) & Nc

1	$(\forall x)Nx$	Suposición

2. Derive: $Fa \vee Ga$

1	$(\forall x)(\forall y)Gxy$	Suposición
2	$Gab \supset Fa$	Suposición

3. Derive: $(\exists x)Sxdx$

1	Sddd	Suposición

4. Derive: $(\exists x)(Dx \ \&\ Ex)$

1	Eb	Suposición
2	Db	Suposición

5. Derive: $(\forall y)Hy$

1	$(\forall x)Hx$	Suposición

Cap-9.pmd 308 22/06/07, 12:11 p.m.

6. Derive: $(\forall x)(Ax \& Cx)$

1	$(\forall y)Ay$	Suposición
2	$(\forall z)Cz$	Suposición

7. Derive: $(\exists x)(Fx \vee Gx)$

1	$(\exists y)Fy$	Suposición

8. Derive: $(\exists x)Bx$

1	$(\forall x)(Ax \supset Bx)$	Suposición
2	$(\exists x)Ax$	Suposición

9. Derive: Ts & Sa

1	$(\forall x)Rx$	Suposición
2	$(\forall x){\sim}Rx$	Suposición

10. Derive Fb $\supset$ Gb

1	$(\forall x)(Fx \supset Hx)$	Suposición
2	$(\forall z)(Hz \equiv Gz)$	Suposición

11. Derive: $(\exists x)(\exists y)Jxy$

1	$(\forall w)(\forall z)Jwz$	Suposición

12. Derive: Bc

1	$(\forall x)Cx$	Suposición
2	$(\exists z)Cz \supset (\forall z)Bz$	Suposición

Cap-9.pmd 309 22/06/07, 12:11 p.m.

13. Derive: $(\forall y)(\mathrm{T}y \supset \mathrm{U}y)$

1	$(\forall x)(\mathrm{T}x \supset \mathrm{V}x)$	Suposición
2	$(\forall x)(\mathrm{V}x \supset \mathrm{U}x)$	Suposición

14. Derive: $(\forall x)\sim(\mathrm{F}x \vee \mathrm{G}x)$

1	$(\forall z)(\forall y)\mathrm{H}zy$	Suposición
2	$(\forall x)(\forall y)(\mathrm{H}xy \supset \sim(\mathrm{F}x \vee \mathrm{G}x))$	Suposición

15. Derive: $(\forall x)(\exists y)\mathrm{K}xy$

1	$(\exists y)(\forall x)\mathrm{K}xy$	Suposición

9.2 Conceptos básicos de *DNC*

Los conceptos básicos del sistema *DNC* son análogos a los de *SDN*. El concepto básico del sistema es el de ***derivación***. Definiremos una *derivación de LC* como una serie finita de fórmulas de *LC* en la cual cada fórmula es, o bien una suposición, o bien una fórmula justificada por alguna de las reglas del sistema. Utilizando este concepto podemos pasar a definir los demás conceptos sintácticos.

9.2.1 *Derivabilidad*

El primer concepto que definiremos es el de implicación sintáctica o derivabilidad en *DNC*:

> Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LC* es ***derivable en DNC*** de un conjunto Γ de fórmulas de *LC* si y sólo si hay una derivación en *DNC* en la cual todas las suposiciones principales son elementos de Γ y $\mathcal{P}$ ocurre sólo en el rango de esas suposiciones. Cuando $\mathcal{P}$ es derivable de un conjunto Γ, diremos que Γ implica semánticamente a $\mathcal{P}$.

Representaremos la relación de implicación sintáctica de la siguiente manera:

$$\Gamma \vdash \mathcal{P}$$

Cap-9.pmd 310 22/06/07, 12:11 p.m.

Para negar que $\mathcal{P}$ es derivable de Γ utilizaremos el siguiente símbolo:

$$\Gamma \nvdash \mathcal{P}$$

El símbolo para la implicación sintáctica no hace parte de *LC*, el lenguaje objeto, sino del metalenguaje. Es un signo metalingüístico que nos permite referirnos a la relación lógica entre un conjunto de fórmulas y una fórmula de *LC*. Por eso la fórmula derivable siempre va entre comillas.

Demostraremos que la siguiente implicación se cumple construyendo la derivación que exige la definición:

(26) $\{(\forall x)\sim Kx,\ (\forall x)(\sim Kx \supset \sim Sx)\} \vdash$ "$(\forall x)(Hx \vee \sim Sx)$"

Derive: $(\forall x)(Hx \vee \sim Sx)$

1	$(\forall x)\sim Kx$	Suposición
2	$(\forall x)(\sim Kx \supset \sim Sx)$	Suposición
3	$\sim Ka$	1 ($\forall$E)
4	$\sim Ka \supset \sim Sa$	2 ($\forall$E)
5	$\sim Sa$	3, 4 ($\supset$E)
6	$Ha \vee \sim Sa$	5 ($\vee$I)
7	$(\forall x)(Hx \vee \sim Sx)$	6 ($\forall$I)

La fórmula que queremos derivar está universalmente cuantificada. La estrategia más natural es por tanto intentar derivar una instancia de sustitución que pueda ser generalizada.

Demostraremos ahora que la siguiente implicación también se cumple:

(27) $\{(\exists x)(\exists y)Sxy\} \vdash$ "$(\exists y)(\exists x)Sxy$"

Derive: $(\exists y)(\exists x)Sxy$

1	$(\exists x)(\exists y)Sxy$	Suposición
2	$\quad(\exists y)Say$	Suposición
3	$\quad\quad Sab$	Suposición
4	$\quad\quad(\exists x)Sxb$	3 ($\exists$I)
5	$\quad\quad(\exists y)(\exists x)Sxy$	4 ($\exists$I)
6	$\quad(\exists y)(\exists x)Sxy$	2, 3-5 ($\exists$E)
7	$(\exists y)(\exists x)Sxy$	1, 2-6 ($\exists$E)

Como queremos derivar una fórmula existencialmente cuantificada, la estrategia más adecuada es construirla a partir de una instancia de sustitución. La complicación en esta derivación reside en que la única suposición principal es, a su vez, una fórmula existencialmente cuantificada. Por esa razón la estructura de la derivación

Cap-9.pmd 311 22/06/07, 12:11 p.m.

está diseñada en función de la eliminación de los cuantificadores existenciales de la suposición.

Ejercicio 9.2

Demuestre cada una de las siguientes implicaciones. Omitimos las comillas para mayor claridad:

1. $\{(\exists x)\mathrm{G}xx\} \vdash (\exists y)\mathrm{G}yy$
2. $\{(\forall x)(\mathrm{F}x \supset \mathrm{G}x), \mathrm{Fa}\} \vdash (\exists x)\mathrm{G}x$
3. $\{(\forall y)\mathrm{H}y\} \vdash (\forall x)(\sim\mathrm{H}x \supset \mathrm{H}x)$
4. $\{(\exists x)\mathrm{L}xxx\} \vdash (\exists x)(\exists y)(\exists z)\mathrm{L}xyz$
5. $\{(\forall y)[(\sim\mathrm{M}y \;\&\; \mathrm{N}y) \supset \mathrm{O}y], (\exists x)(\mathrm{N}x \;\&\; \mathrm{P}x),$
   $(\forall z)(\mathrm{P}z \;\&\; \sim\mathrm{M}z)\} \vdash (\exists x)(\mathrm{O}x \;\&\; \mathrm{P}x)$

9.2.2 *Validez*

El siguiente concepto que definiremos es el de validez en el sistema de deducción natural cuantificada:

> Un argumento de *LC* es ***válido en DNC*** si y sólo si la conclusión del argumento es derivable del conjunto que contiene a las premisas como únicos elementos.

Los conceptos de implicación sintáctica y validez en *DNC* están relacionados de la siguiente manera: un argumento de *LC* es válido en *DNC* si y sólo si las premisas implican sintácticamente a la conclusión.

Mostraremos que el siguiente argumento es válido en *DNC*:

(28)
$$\begin{array}{l} (\forall y)[(\mathrm{H}y \;\&\; \mathrm{F}y) \supset \mathrm{G}y] \\ (\forall z)\mathrm{F}z \;\&\; \sim(\forall x)\mathrm{K}x\mathrm{b} \\ \hline (\forall x)(\mathrm{H}x \supset \mathrm{G}x) \end{array}$$

Queremos derivar una fórmula universalmente cuantificada. Por lo tanto, la estrategia más natural es tratar de derivar una instancia de sustitución que pueda ser generalizada. Como la instancia de sustitución debe ser una fórmula condicional, la estructura de la derivación está diseñada de tal forma que sea posible utilizar ($\supset$I). La derivación es como sigue:

Cap-9.pmd 312 22/06/07, 12:11 p.m.

Derive: $(\forall x)(\mathrm{H}x \supset \mathrm{G}x)$

1	$(\forall y)[(\mathrm{H}y \,\&\, \mathrm{F}y) \supset \mathrm{G}y]$	Suposición
2	$(\forall z)\mathrm{F}z \,\&\, \sim(\forall x)\mathrm{K}x\mathrm{b}$	Suposición
3	$\quad$ Ha	Suposición
4	$\quad$ (Ha & Fa) $\supset$ Ga	1 ($\forall$E)
5	$\quad (\forall z)\mathrm{F}z$	2 (&E)
6	$\quad$ Fa	5 ($\forall$E)
7	$\quad$ Ha & Fa	3, 6 (&I)
8	$\quad$ Ga	4, 7 ($\supset$E)
9	Ha $\supset$ Ga	3-8 ($\supset$I)
10	$(\forall x)(\mathrm{H}x \supset \mathrm{G}x)$	9 ($\forall$I)

Consideremos un segundo ejemplo. Demostraremos que el siguiente argumento es válido en *DNC*. En esta derivación se debe prestar especial atención a las constantes seleccionadas al utilizar las reglas de derivación:

(29) $(\forall z)(\forall y)((\exists w)\mathrm{A}yw \supset \mathrm{A}zy)$
Ars
$\overline{(\forall x)(\forall y)\mathrm{A}xy}$

Derive: $(\forall x)(\forall y)\mathrm{A}xy$

1	$(\forall z)(\forall y)((\exists w)\mathrm{A}yw \supset \mathrm{A}zy)$	Suposición
2	Ars	Suposición
3	$(\exists w)\mathrm{Ar}w$	2 ($\exists$I)
4	$(\forall y)((\exists w)\mathrm{A}yw \supset \mathrm{Am}y)$	1 ($\forall$E)
5	$(\exists w)\mathrm{Ar}w \supset \mathrm{Amr}$	4 ($\forall$E)
6	Amr	3, 5 ($\supset$E)
7	$(\exists w)\mathrm{Am}w$	6 ($\exists$I)
8	$(\forall y)((\exists w)\mathrm{A}yw \supset \mathrm{An}y)$	1 ($\forall$E)
9	$(\exists w)\mathrm{Am}w \supset \mathrm{Anm}$	8 ($\forall$E)
10	Anm	7, 9 ($\supset$E)
11	$(\forall \mathrm{y})\mathrm{An}y$	10 ($\forall$I)
12	$(\forall x)(\forall y)\mathrm{A}xy$	11 ($\forall$I)

Como la fórmula que queremos derivar, “$(\forall x)(\forall y)\mathrm{A}xy$”, contiene dos cuantificadores universales, debemos introducir un cuantificador a la vez; la estrategia es encontrar una fórmula en la que dos constantes arbitrarias posean la relación “A” para poder utilizar la regla de generalización universal. Estas constantes no pueden ser ni “r” ni “s”, pues éstas aparecen en las suposiciones principales. Por eso en la derivación es necesario introducir dos constantes completamente nuevas.

Cap-9.pmd 313 22/06/07, 12:11 p.m.

Ejercicio 9.3

Demuestre que cada uno de los siguientes argumentos es válido en *DNC*:

1. $\dfrac{(\forall x)(\forall y)Fxy \ \& \ (\exists z)Fz}{(Fnn \ \& \ Fno) \ \& \ (Fon \ \& \ Foo)}$

2. $(\forall x)(Dx \supset Ex)$
   $\dfrac{\sim Ea}{\sim Da}$

3. $(\forall x)((Tx \ \& \ Sx) \supset Rx)$
   $\dfrac{(\exists w)\sim Uwc \ \& \ (\forall z)Sz}{(\forall y)(Ty \supset Ry)}$

4. $\dfrac{(\exists x)Mx \supset Ma}{(\exists x)Mx \equiv Ma}$

5. $(\forall y)(\sim Hy \supset Iy)$
   $\dfrac{\sim(\forall x)Hx}{(\exists z)(Iz \vee \sim Jzb)}$

9.2.3 *Teoremas*

El siguiente concepto que introduciremos es el de teorema del sistema *DNC*:

> Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LC* es un ***teorema de DNC*** si y sólo si $\mathcal{P}$ es derivable del conjunto nulo o vacío.

Para afirmar en el metalenguaje que $\mathcal{P}$ es un teorema de *DNC*, utilizamos el signo de la implicación sintáctica:

$$\vdash \mathcal{P}$$

Probaremos que la siguiente fórmula es un teorema de *DNC*:

(30) $\vdash (\exists x)(Fx \ \& \ Gx) \supset ((\exists x)Fx \ \& \ (\exists x)Gx)$

Para probar que la fórmula es un teorema, construimos una derivación sin ninguna suposición principal. Como la fórmula es un condicional, la estructura de la derivación está determinada por la regla ($\supset$I):

Cap-9.pmd 314 22/06/07, 12:11 p.m.

Derive: $(\exists x)(Fx \;\&\; Gx) \supset ((\exists x)Fx \;\&\; (\exists x)Gx)$

1	$(\exists x)(Fx \;\&\; Gx)$	Suposición
2	$Fa \;\&\; Ga$	Suposición
3	Fa	2 (&E)
4	Ga	2 (&E)
5	$(\exists x)Fx$	3 (∃I)
6	$(\exists x)Gx$	4 (∃I)
7	$(\exists x)Fx \;\&\; (\exists x)Gx$	5, 6 (&I)
8	$(\exists x)Fx \;\&\; (\exists x)Gx$	1, 2-7 (∃E)
9	$(\exists x)(Fx \;\&\; Gx) \supset ((\exists x)Fx \;\&(\exists x)Gx)$	1-8 (⊃I)

Consideremos un segundo ejemplo. Probaremos que la siguiente fórmula es un teorema de *DNC*. Como la fórmula es un bicondicional, la estructura de la derivación estará determinada por la regla (≡I).

(31) $\vdash (\forall y)(Fy \supset Ga) \equiv ((\exists y)Fy \supset Ga)$

Derive: $(\forall y)(Fy \supset Ga) \equiv ((\exists y)Fy \supset Ga)$

1	$(\forall y)(Fy \supset Ga)$	Suposición
2	$(\exists y)Fy$	Suposición
3	Fb	Suposición
4	$Fb \supset Ga$	1 (∀E)
5	Ga	3, 4 (⊃E)
6	Ga	2, 3-5 (∃E)
7	$(\exists y)Fy \supset Ga$	2-6 (⊃I)
8	$(\exists x)Fy \supset Ga$	Suposición
9	Fb	Suposición
10	$(\exists x)Fy$	9 (∃I)
11	Ga	8, 10 (⊃E)
12	$Fb \supset Ga$	9-11 (⊃I)
13	$(\forall y)(Fy \supset Ga)$	12 (∀I)
14	$(\forall y)(Fy \supset Ga) \equiv ((\exists y)Fy \supset Ga)$	1-13 (≡I)

Ejercicio 9.4

Demuestre que las siguientes fórmulas son teoremas de *DNC*.

1. $(\forall z)(\exists w)(Fw \supset Fz)$
2. $(\forall y)(Sy \supset \sim\sim Sy)$
3. $(\forall x)(Mx \supset Nx) \supset ((\forall x)Mx \supset (\forall x)Nx)$
4. $(\forall x)(Axx \supset (\exists y)By) \equiv ((\exists x)Axx \supset (\exists y)By)$
5. $(\forall x)(Ga \supset Fx) \equiv (Ga \supset (\forall x)Fx)$

Cap-9.pmd 315 22/06/07, 12:11 p.m.

9.2.4 *Equivalencia*

El siguiente concepto que introduciremos es el de equivalencia en el sistema *DNC*:

> Dos fórmulas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ de *LC* son ***equivalentes en DNC*** si y sólo si $\mathcal{Q}$ es derivable de $\{\mathcal{P}\}$ y $\mathcal{P}$ es derivable de $\{\mathcal{Q}\}$.

Según la definición, para demostrar que dos fórmulas son equivalentes en *DNC* debemos construir dos derivaciones. Demostraremos que las siguientes fórmulas son equivalentes en *DNC*.

(32) $(\forall x)\sim \mathrm{A}x$

(33) $\sim(\exists x)\mathrm{A}x$

Comenzamos derivando la segunda fórmula de la primera utilizando una reducción al absurdo:

Derive: $\sim(\exists x)\mathrm{A}x$

1	│ $(\forall x)\sim \mathrm{A}x$	Suposición
2	│ │ $(\exists x)\mathrm{A}x$	Suposición
3	│ │ │ Aa	Suposición
4	│ │ │ │ ~Ab	Suposición
5	│ │ │ │ Aa	3 (R)
6	│ │ │ │ ~Aa	1 ($\forall$E)
7	│ │ │ Ab	4-6 (~E)
8	│ │ Ab	2, 3-7 ($\exists$E)
9	│ │ ~Ab	1 ($\forall$E)
10	│ $\sim(\exists x)\mathrm{A}x$	2-9 (~I)

Derivaremos ahora la primera fórmula de la segunda:

Derive: $(\forall x)\sim \mathrm{A}x$

1	│ $\sim(\exists x)\mathrm{A}x$	Suposición
2	│ │ Aa	Suposición
3	│ │ $(\exists x)\mathrm{A}x$	2 ($\exists$I)
4	│ │ $\sim(\exists x)\mathrm{A}x$	1 (R)
5	│ ~Aa	2-4 (~I)
6	│ $(\forall x)\sim \mathrm{A}x$	5 ($\forall$I)

Cap-9.pmd 316 22/06/07, 12:11 p.m.

Consideremos un segundo ejemplo de dos fórmulas equivalentes en *DNC*:

(34) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(\mathrm{H}x\ \&\ \mathrm{I}y) \supset \mathrm{J}z]$

(35) $(\exists x)\mathrm{H}x \supset [(\exists y)\mathrm{I}y \supset (\forall z)\mathrm{J}z]$

Las dos derivaciones en este caso son bastante más difíciles que las anteriores. Comenzaremos derivando la primera fórmula de la segunda. Como queremos derivar una fórmula con tres cuantificadores universales, debemos introducirlos paso a paso a partir de una instancia de sustitución (paso 10). Así, el corazón del problema reside en llegar a esa instancia de sustitución.

Derive: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(\mathrm{H}x\ \&\ \mathrm{I}y) \supset \mathrm{J}z]$

1	$(\exists x)\mathrm{H}x \supset [(\exists y)\mathrm{I}y \supset (\forall z)\mathrm{J}z]$	Suposición
2	| Ha & Ib	Suposición
3	| Ha	2 (&E)
4	| $(\exists x)\mathrm{H}x$	3 (∃I)
5	| $(\exists y)\mathrm{I}y \supset (\forall z)\mathrm{J}z$	1, 4 (⊃E)
6	| Ib	2 (&E)
7	| $(\exists y)\mathrm{I}y$	6 (∃I)
8	| $(\forall z)\mathrm{J}z$	5, 7 (⊃E)
9	| Jc	8 (∀E)
10	(Ha & Ib) ⊃ Jc	2-9 (⊃I)
11	$(\forall z)[(\mathrm{Ha}\ \&\ \mathrm{Ib}) \supset \mathrm{J}z]$	10 (∀I)
12	$(\forall y)(\forall z)[(\mathrm{Ha}\ \&\ \mathrm{I}y) \supset \mathrm{J}z]$	11 (∀I)
13	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(\mathrm{H}x\ \&\ \mathrm{I}y) \supset \mathrm{J}z]$	12 (∀I)

Pasamos ahora a derivar la fórmula **(35)** de la **(34)**. La fórmula que queremos derivar es un condicional; en consecuencia, la regla (⊃I) determina la estructura principal de la derivación:

Cap-9.pmd 317 22/06/07, 12:11 p.m.

Derive: $(\exists x)\mathrm{H}x \supset [(\exists y)\mathrm{I}y \supset (\forall z)\mathrm{J}z]$

1	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(\mathrm{H}x\ \&\ \mathrm{I}y) \supset \mathrm{J}z]$	Suposición
2	$\quad(\exists x)\mathrm{H}x$	Suposición
3	$\quad\quad(\exists y)\mathrm{I}y$	Suposición
4	$\quad\quad\quad\mathrm{Ha}$	Suposición
5	$\quad\quad\quad\quad\mathrm{Ib}$	Suposición
6	$\quad\quad\quad\quad(\forall y)(\forall z)[(\mathrm{Ha}\ \&\ \mathrm{I}y) \supset \mathrm{J}z]$	1 ($\forall$E)
7	$\quad\quad\quad\quad(\forall z)[(\mathrm{Ha}\ \&\ \mathrm{Ib}) \supset \mathrm{J}z]$	6 ($\forall$E)
8	$\quad\quad\quad\quad(\mathrm{Ha}\ \&\ \mathrm{Ib}) \supset \mathrm{Jc}$	7 ($\forall$E)
9	$\quad\quad\quad\quad\mathrm{Ha}\ \&\ \mathrm{Ib}$	4, 5 (&I)
10	$\quad\quad\quad\quad\mathrm{Jc}$	8, 9 ($\supset$E)
11	$\quad\quad\quad\mathrm{Jc}$	3, 5-10 ($\exists$E)
12	$\quad\quad\mathrm{Jc}$	2, 4-11 ($\exists$E)
13	$\quad\quad(\forall z)\mathrm{J}z$	12 ($\forall$I)
14	$\quad(\exists y)\mathrm{I}y \supset (\forall z)\mathrm{J}z$	3-13 ($\supset$I)
15	$(\exists x)\mathrm{H}x \supset [(\exists y)\mathrm{I}y \supset (\forall z)\mathrm{J}z]$	2-14 ($\supset$I)

Las suposiciones requeridas para obtener las fórmulas condicionales en los pasos 14 y 15 son fórmulas existenciales (pasos 2 y 3). Para poder usar la información proporcionada por estas suposiciones, la estrategia más adecuada es utilizar ($\exists$E).

Ejercicio 9.5

Demuestre que los siguientes pares de fórmulas son equivalentes en *DNC*:

1.	$(\forall x)\mathrm{F}x$	$(\forall x)(\mathrm{F}x\ \&\ \mathrm{F}x)$
2.	$(\forall x)(\forall y)(\mathrm{F}x\ \&\ \mathrm{G}y)$	$(\forall x)\mathrm{F}x\ \&\ (\forall y)\mathrm{G}y$
3.	$(\exists x)(\mathrm{F}x \vee \mathrm{G}x)$	$(\exists x)\mathrm{F}x \vee (\exists x)\mathrm{G}x$
4.	$(\forall x)(\mathrm{F}x \supset \mathrm{G}x)$	$(\forall x)({\sim}\mathrm{G}x \supset {\sim}\mathrm{F}x)$
5.	${\sim}(\forall x)\mathrm{F}x$	$(\exists x){\sim}\mathrm{F}x$

9.2.5 *Inconsistencia*

El último concepto que definiremos es la inconsistencia de un conjunto dentro del sistema de deducción natural cuantificada:

> Un conjunto Γ de fórmulas de *LC* es ***inconsistente en DNC*** si y sólo si una fórmula $\mathcal{P}$ y su negación, ${\sim}\mathcal{P}$, son derivables de Γ.

Cap-9.pmd 318 22/06/07, 12:11 p.m.

Demostraremos que el siguiente conjunto es inconsistente en *DNC*:

(36) {($\forall x$)Rx, ($\exists x$)~Rx}

Para demostrar su inconsistencia, debemos tomar los miembros del conjunto como suposiciones principales y derivar una fórmula y su contraria en la línea de rango principal.

1	($\forall x$)Rx	Suposición
2	($\exists x$)~Rx	Suposición
3	~Ra	Suposición
4	($\forall x$)Rx	Suposición
5	Ra	4 ($\forall$E)
6	~Ra	3 (R)
7	~($\forall x$)Rx	4-6 (~I)
8	~($\forall x$)Rx	2, 3-7 ($\exists$E)
9	($\forall x$)Rx	1 (R)

La estrategia de la derivación consiste en transformar "($\exists x$)~Rx" en "~($\forall x$)Rx" para así poder crear una contradicción con la primera suposición.

Consideremos un segundo ejemplo. Demostraremos que el siguiente conjunto es inconsistente en *DNC*:

(37) {($\exists y$)(Ay & ~By), ($\forall y$)(Ay $\supset$ By)}

1	($\exists y$)(Ay & ~By)	Suposición
2	($\forall y$)(Ay $\supset$ By)	Suposición
3	Aa & ~Ba	Suposición
4	($\exists y$)(Ay & ~By)	Suposición
5	Aa $\supset$ Ba	2 ($\forall$E)
6	Aa	3 (&E)
7	Ba	5, 6 ($\supset$E)
8	~Ba	3 (&E)
9	~($\exists y$)(Ay & ~By)	4-8 (~I)
10	~($\exists y$)(Ay & ~By)	1, 3-9 ($\exists$E)
11	($\exists y$)(Ay & ~By)	1 (R)

Lo curioso de esta derivación es que transformamos a "($\exists y$)(Ay & ~By)" en su propia negación. En general, siempre es aconsejable intentar derivar la negación de una de las suposiciones originales. Naturalmente, no existe ninguna garantía de que esta estrategia funcione en todos los casos.

Cap-9.pmd 319 22/06/07, 12:11 p.m.

Ejercicio 9.6

Demuestre que los siguientes conjuntos son inconsistentes en *DNC*.

1. $\{(\forall z)\sim(Az \vee Czz),\ (\forall x)Ax\}$
2. $\{(\forall y)(Dy \equiv \sim Dy)\}$
3. $\{\sim(\exists y)\sim Cy,\ \sim(\exists x)Bx,\ (\forall z)(Bz \vee \sim Cz)\}$
4. $\{\sim(\forall y)(\exists x)Nxy,\ (\exists x)(\forall y)Nxy\}$
5. $\{(\forall x)(\forall y)(Kxy \equiv \sim Kxy)\}$

Finalizaremos esta sección con una serie de ejercicios de mayor grado de dificultad. Es aconsejable resolver los ejercicios 9.1 - 9.6 antes de intentar resolver el ejercicio 9.7.

Ejercicio 9.7

A. Demuestre cada una de las siguientes implicaciones. Omitimos las comillas para mayor claridad.

1. $\{(\forall x)(Bx \supset Ax),\ (\exists y)By\} \vdash (\exists z)Az$
2. $\{(\forall x)(\forall y)(\forall z)Axyz\} \vdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)(Axyz \supset Azyx)$
3. $\{(\forall x)(\forall z)(Abzx \supset Bxzz),\ (\forall x)(Cx \supset (\forall y)Axya)\} \vdash Cb \supset (\exists x)Bxcc$
4. $\{(\forall y)[(\exists x)\sim(Bx \,\&\, Aax) \,\&\, Dy],\ \sim(\forall x)(Bx \,\&\, Aax) \equiv \sim(\forall x)Cx\} \vdash \sim(\forall x)Cx$
5. $\{(\forall x)((\exists y)By \vee \sim Ax)\} \vdash (\exists x)Ax \supset (\exists y)By$

B. Demuestre que cada uno de los siguientes argumentos es válido en *DNC*:

1. $$\frac{(\forall x)(Sx \supset (\exists y)Ry)}{(\forall x)(Sx \supset (\exists y)(Ry \vee Py))}$$

2. $$\frac{\begin{array}{l}(\exists x)\sim(\exists y)(Sxy \,\&\, \sim Ry)\\ (\exists x)\sim(\exists y)(Sxy \,\&\, \sim Ry) \supset (\exists x)(Tx \,\&\, Ux)\end{array}}{\sim(\forall x)(Tx \supset \sim Ux)}$$

3. $$\frac{(\forall x)(Sx \supset Rx)}{\sim(\exists x)(Sx \,\&\, \sim Rx)}$$

4. $$\frac{\begin{array}{l}(\exists x)(\exists y)[Sx \,\&\, (Ry \,\&\, Txy)]\\ (\forall x)[(Sx \,\&\, Ux) \equiv (\exists y)(Ry \,\&\, Txy)]\end{array}}{(\exists y)(Sy \,\&\, Uy)}$$

5. $$\frac{\begin{array}{l}(\exists x)(Tx \,\&\, Sx)\\ (\exists x)(Tx \,\&\, (\forall y)(Sy \supset \sim Rxy)\end{array}}{(\exists x)(Tx \,\&\, \sim(\forall y)(Ty \supset Ryx)}$$

Cap-9.pmd 320 22/06/07, 12:11 p.m.

C. Demuestre que los siguientes son teoremas de *DNC*:

1. $((\exists x)Ax \supset (\forall y)By) \supset (\forall x)(\forall y)(\sim Ax \vee By)$
2. $\sim(\exists x)\sim Ax \equiv (\forall x)Ax$
3. $\sim(\forall x)\sim Ax \equiv (\exists x)Ax$
4. $((\forall x)Ax \vee Ba) \equiv (\forall x)(Ax \vee Ba)$
5. $((\exists x)Ax \supset (\exists x)Bx) \supset (\exists x)(Ax \supset Bx)$

D. Demuestre que los siguientes pares de fórmulas son equivalentes en *DNC*:

1.	$\sim(\exists x)Fx \ \& \ (\forall x)\sim Gx$	$(\forall x)(\forall y)(\sim Fx \ \& \ \sim Gx)$
2.	$(\forall x)Fx$	$(\forall x)(Fx \vee Fx)$
3.	$(\exists x)(Ga \supset Fx)$	$(Ga \supset (\exists x)Fx)$
4.	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Fx \ \& \ Gy) \supset Hz]$	$(\exists x)Fx \supset [(\exists y)Gy \supset (\forall z)Hz]$
5.	$\sim(\forall x)Fx \vee (\forall y)Gy$	$(\exists x)(\forall y)(Fx \supset Gy)$

E. Demuestre que los siguientes conjuntos son inconsistentes en *DNC*.

1. $\{\sim(\exists x)Max, (\forall y)(\exists x)Myx\}$
2. $\{(\forall x)(\sim Nx \vee Mx), (\forall y)(My \supset Ly), (\exists z)(Nz \ \& \ \sim Lz)\}$
3. $\{(\forall x)[(\sim Mx \ \& \ Nx) \equiv Lxx], (\forall y)(My \ \& \ Ny), (\exists z)(Lzz \ \& \ \sim Nz)\}$
4. $\{(\forall w)Nw, (\exists x)(\exists y)[(Ox \ \& \ \sim Oy) \ \& \ \sim Mxy], (\forall x)(\forall y)[(Ox \ \& \ Ny) \supset Mxy]\}$
5. $\{\sim(\exists y)(\forall x)(Nx \supset My), (\forall x)(\exists y)(\sim Nx \vee My)\}$

9.3* El sistema *DNC**

El sistema de deducción natural que hemos estudiado en este capítulo fue construido a partir de *SDN*, el sistema de deducción natural de la lógica proposicional. Al igual que *SDN*, el sistema *DNC* sólo contiene reglas para la introducción y eliminación de los operadores lógicos. Sin embargo, así como fue posible ampliar *SDN* con la introducción de reglas de derivación adicionales que nos ahorran tiempo y esfuerzo, también es posible ampliar *DNC* con el mismo propósito[1]. La adición de estas reglas genera un nuevo sistema que llamaremos *DNC**. Los dos sistemas son lógicamente equivalentes, pues todo lo que puede ser derivado utilizando las nuevas reglas, puede ser derivado con las reglas originales de *DNC*.

El sistema *DNC** incluye todas las reglas de inferencia y de equivalencia de *SDN** con la salvedad de que ahora éstas se aplican a fórmulas de *LC*. El sistema posee además la siguiente regla de equivalencia:

1. Es recomendable que el lector repase brevemente las reglas presentadas en la sección 5.4.

Cap-9.pmd 321 22/06/07, 12:11 p.m.

Intercambio de Cuantificadores (IC)

$(\forall \mathbf{x})\mathcal{P}$	::	$\sim(\exists \mathbf{x})\sim\mathcal{P}$
$(\exists \mathbf{x})\mathcal{P}$	::	$\sim(\forall \mathbf{x})\sim\mathcal{P}$
$(\forall \mathbf{x})\sim\mathcal{P}$	::	$\sim(\exists \mathbf{x})\mathcal{P}$
$(\exists \mathbf{x})\sim\mathcal{P}$	::	$\sim(\forall \mathbf{x})\mathcal{P}$

Con la ayuda de esta regla podemos simplificar muchas de las derivaciones que hemos estudiado hasta el momento. Tomemos, por ejemplo, el argumento **(20)** y la derivación que prueba su validez en *DNC*:

(20) $\dfrac{\sim(\exists x)(\mathrm{A}x \vee \mathrm{B}x)}{\sim(\exists x)\mathrm{A}x}$

1	$\sim(\exists x)(\mathrm{A}x \vee \mathrm{B}x)$	Suposición
2	$\quad(\exists x)\mathrm{A}x$	Suposición
3	$\quad\quad\mathrm{Ab}$	Suposición
4	$\quad\quad\mathrm{Ab} \vee \mathrm{Bb}$	3 ($\vee$I)
5	$\quad\quad(\exists x)(\mathrm{A}x \vee \mathrm{B}x)$	4 ($\exists$I)
6	$\quad(\exists x)(\mathrm{A}x \vee \mathrm{B}x)$	2, 3-5 ($\exists$E)
7	$\quad\sim(\exists x)(\mathrm{A}x \vee \mathrm{B}x)$	1 (R)
8	$\sim(\exists x)\mathrm{A}x$	2-7 (~I)

La derivación correspondiente en *DNC** es:

1	$\sim(\exists x)(\mathrm{A}x \vee \mathrm{B}x)$	Suposición
2	$(\forall x)\sim(\mathrm{A}x \vee \mathrm{B}x)$	1 (IC)
3	$\sim(\mathrm{Aa} \vee \mathrm{Ba})$	2 ($\forall$E)
4	$\sim\mathrm{Aa}\ \&\ \sim\mathrm{Ba}$	3 (DeM)
5	$\sim\mathrm{Aa}$	4 (&E)
6	$(\forall x)\sim\mathrm{A}x$	5 ($\forall$I)
7	$\sim(\exists x)\mathrm{A}x$	6 (IC)

La derivación en *DNC** es más corta, y al no utilizar subderivaciones, es más directa que su equivalente en *DNC*. Las nuevas reglas son utilizadas en los pasos 2, 4 y 7. El uso más común de (IC) es la transformación de una fórmula cuantificada negada en una no negada, como en el paso 2. Esta transformación nos permite utilizar las reglas de eliminación de los cuantificadores en la fórmula resultante, como en el paso 3.

En el siguiente ejemplo utilizaremos exclusivamente la regla (IC) para probar que el siguiente argumento es válido en *DNC**:

Cap-9.pmd 322 22/06/07, 12:11 p.m.

(38) (~(∀*x*)~(∃*y*)~A*xy* & (∃*x*)(∃*y*)~B*xy*) ⊃ (∀*z*)~(∃*w*)C*zw*
((∃*x*)~(∀*y*)A*xy* & ~(∀*x*)(∀*y*)B*xy*) ⊃ (∀*z*)(∀*w*)~C*zw*

Derive: ((∃*x*)~(∀*y*)A*xy* & ~(∀*x*)(∀*y*)B*xy*) ⊃ (∀*z*)(∀*w*)~C*zw*

1	(~(∀*x*)~(∃*y*)~A*xy* & (∃*x*)(∃*y*)~B*xy*) ⊃ (∀*z*)~(∃*w*)C*zw*	Suposición
2	((∃*x*)(∃*y*)~A*xy* & (∃*x*)(∃*y*)~B*xy*) ⊃ (∀*z*)~(∃*w*)C*zw*	1 (IC)
3	((∃*x*)~(∀*y*)A*xy* & (∃*x*)(∃*y*)~B*xy*) ⊃ (∀*z*)~(∃*w*)C*zw*	2 (IC)
4	((∃*x*)~(∀*y*)A*xy* & (∃*x*)~(∀*y*)B*xy*) ⊃ (∀*z*)~(∃*w*)C*zw*	3 (IC)
5	((∃*x*)~(∀*y*)A*xy* & ~(∀*x*)(∀*y*)B*xy*) ⊃ (∀*z*)~(∃*w*)C*zw*	4 (IC)
6	((∃*x*)~(∀*y*)A*xy* & ~(∀*x*)(∀*y*)B*xy*) ⊃ (∀*z*)(∀*w*)~C*zw*	5 (IC)

Consideremos un tercer ejemplo en el que usaremos varias de las reglas del sistema. Probaremos que el siguiente argumento es válido en *DNC**:

(39) (∀*x*)[(∃*y*)(F*y*b & H*xy*b) ⊃ G*x*]
(∃*x*)(I*x*b & H*x*ab)
(∀*x*)(I*x*b ⊃ ~G*x*) ⊃ ~Fab

Derive: (∀*x*)(I*x*b ⊃ ~G*x*) ⊃ ~Fab

1	(∀*x*)[(∃*y*)(F*y*b & H*xy*b) ⊃ G*x*]	Suposición
2	(∃*x*)(I*x*b & H*x*ab)	Suposición
3	(∀*x*)(I*x*b ⊃ ~G*x*)	Suposición
4	Icb & Hcab	Suposición
5	Icb	4 (&E)
6	Icb ⊃ ~Gc	3 (∀E)
7	~Gc	5, 6 (⊃E)
8	(∃*y*)(F*y*b & Hc*y*b) ⊃ Gc	1 (∀E)
9	~(∃*y*)(F*y*b & Hc*y*b)	7, 8 (MT)
10	(∀*y*)~(F*y*b & Hc*y*b)	9 (IC)
11	~(Fab & Hcab)	10 (∀E)
12	~Fab ∨ ~Hcab	11 (DeM)
13	Hcab	4 (&E)
14	~~Hcab	13 (DN)
15	~Fab	12, 14 (SD)
16	~Fab	2, 4-15 (∃E)
17	(∀*x*)(I*x*b ⊃ ~G*x*) ⊃ ~Fab	3-16 (⊃I)

A pesar de la complejidad de esta derivación, el lector debe considerar que la derivación correspondiente en *DNC* tiene cerca de 30 pasos. Así, es claro que el sistema *DNC** tiene grandes ventajas desde un punto de vista práctico. Sin embargo, desde un punto de vista teórico, *DNC* posee una mayor simplicidad, pues sólo contiene las

Cap-9.pmd 323 22/06/07, 12:11 p.m.

reglas estrictamente necesarias para construir pruebas de las propiedades sintácticas de fórmulas, conjuntos y argumentos.

Ejercicio 9.8

A. Demuestre cada una de las siguientes implicaciones. Omitimos las comillas para mayor claridad.

1. $\{(\exists x)Fx \supset \sim(\exists x)Gx,\ (\forall x)\sim Gx \supset (\forall x)\sim Hx\} \vdash (\exists x)Fx \supset \sim(\exists x)Hx$
2. $\{\sim(\exists x)(\sim Fx \ \&\ Gxx),\ Gbb\} \vdash Fb$
3. $\{(\exists x)(Hx \ \&\ Gx) \supset (\forall x)Ix,\ \sim Ia\} \vdash (\forall x)(Hx \supset \sim Gx)$
4. $\{\sim(\exists x)(Fx \ \&\ \sim Gx),\ \sim(\forall x)(\sim Hx \vee Gx)\} \vdash (\exists x)\sim Fx$

B. Demuestre que cada uno de los siguientes argumentos es válido en *DNC**:

1. $$\begin{array}{l} \sim(\exists x)(Ax \ \&\ \sim Cx) \\ \sim(\exists x)(Ax \ \&\ \sim Bx) \\ \hline (\forall x)[Ax \supset (Bx \ \&\ Cx)] \end{array}$$
2. $$\begin{array}{l} (\exists x)\sim Ax \supset (\forall y)\sim By \\ (\exists x)\sim Ax \supset (\exists y)By \\ (\forall x)(Ax \supset Cx) \\ \hline (\forall x)Cx \end{array}$$
3. $$\begin{array}{l} \sim(\exists x)(Ax \vee Bx) \\ (\exists x)Cx \supset (\exists x)Ax \\ (\exists x)Dx \supset (\exists x)Bx \\ \hline \sim(\exists x)(Cx \vee Dx) \end{array}$$
4. $$\begin{array}{l} (\exists x)[\sim Dxa \ \&\ (\forall y)(Cy \supset \sim Axy)] \\ (\forall z)[\sim(\forall y)(By \supset Azy) \supset Dza] \\ \hline (\forall x)(Cx \supset \sim Bx) \end{array}$$

C. Demuestre que los siguientes son teoremas de *DNC**:

1. $(\forall x)(Fx \supset Gx) \vee (\exists x)Fx$
2. $[(\forall x)((Fx \ \&\ Gx) \supset Hx) \ \&\ \sim(\forall x)(Fx \supset Hx)] \supset \sim(\forall x)Gx$
3. $(\forall x)(\exists y)(Fx \vee Gy) \equiv (\exists y)(\forall x)(Fx \vee Gy)$
4. $((\forall x)Fx \vee (\forall y)Gy) \supset (\forall z)(Fz \vee Gz)$

   Pista: Utilice (Trans) en el último paso.

Cap-9.pmd 324 22/06/07, 12:11 p.m.

9.4* El sistema *DNC*=

Para poder construir derivaciones utilizando fórmulas de *LCI*, la lógica cuantificada con identidad, debemos introducir una nueva serie de reglas. El sistema resultante, llamado *DNC*=, incluye todas las reglas de *DNC** con la salvedad de que éstas se aplican a fórmulas de *LCI*.

La primera regla de *DNC*= nos permite afirmar la siguiente identidad en cualquier línea de una derivación:

Introducción de la identidad (=I)

▶ | **a = a**

La regla no es ni una regla de inferencia ni una de sustitución. Por esa razón no hace falta citar ninguna línea de la derivación al justificar su introducción en una derivación.

Consideremos un ejemplo que hace uso de esta regla. Probaremos que el siguiente argumento es válido en *SDN*=:

(40) $(\forall x)(\forall y)(x = y \supset \mathrm{N}xy)$
$\overline{}$
Naa

Derive: Naa

1	$(\forall x)(\forall y)(x = y \supset \mathrm{N}xy)$	Suposición
2	$(\forall y)(\mathrm{a} = y \supset \mathrm{Na}y)$	1 (∀E)
3	$\mathrm{a} = \mathrm{a} \supset \mathrm{Naa}$	2 (∀E)
4	a = a	(=I)
5	Naa	3, 4 (⊃E)

Ahora probaremos que la siguiente fórmula es un teorema en *DNC*=:

(41) $\vdash \sim(\exists x)\sim(x = x)$

Derive: $\sim(\exists x)\sim(x = x)$

1	$(\exists x)\sim(x = x)$	Suposición
2	a = a	(=I)
3	$(\forall x)(x = x)$	2 (∀I)
4	$\sim(\forall x)(x = x)$	1 (IC)
5	$\sim(\exists x)\sim(x = x)$	1-4 (~I)

Cap-9.pmd 325 22/06/07, 12:11 p.m.

La segunda regla de *DNC*= nos permite eliminar el operador de identidad. Es análoga a la regla algebraica que nos permite sustituir idénticos por idénticos:

Eliminación de la Identidad (=E)

	a = b			**a = b**
	$\mathscr{P}$**a**	o		$\mathscr{P}$**b**
▶	$\mathscr{P}$(**b**/**a**)		▶	$\mathscr{P}$(**a**/**b**)

$\mathscr{P}$**a** es cualquier fórmula de *LCI* que contenga una o más instancias de la constante **a**, y $\mathscr{P}$(**b/a**) es la fórmula que resulta de sustituir uno o más instancias de **a** por **b** en $\mathscr{P}$.

Consideremos un ejemplo muy sencillo que utiliza esta regla. Demostraremos que la siguiente fórmula de *LCI* es un teorema en *DNC*=:

(42) $\vdash$ (Fa & a = b) ⊃ Fb

Derive: (Fa & a = b) ⊃ Fb

1	Fa & a = b	Suposición
2	Fa	1 (&E)
3	a = b	1 (&E)
4	Fb	2, 3 (=E)
5	(Fa & a = b) ⊃ Fb	1-4 (⊃I)

Una de las peculiaridades de la regla (=E) es que, en ciertos casos, las dos fórmulas requeridas para la inferencia (**a** = **b** y $\mathscr{P}$**a**) pueden ser la misma fórmula. Tomemos, por ejemplo, la siguiente derivación:

(43)

1	a = b	Suposición
2	a = a	1, 1 (=E)
3	b = b	1, 1 (=E)

Tanto el paso 2 como el 3 son derivados directamente de la suposición. Ahora bien, si queremos derivar “b = a” de “a = b”, necesitamos dos pasos:

(44)

1	a = b	Suposición
2	b = b	1, 1 (=E)
3	b = a	1, 2 (=E)

Cap-9.pmd 326 22/06/07, 12:11 p.m.

Demostraremos ahora que el siguiente argumento es válido en *DNC*=:

(45) $(\forall x)(\forall y)(Mxy \supset x = y)$
Ma
$\sim\mathrm{Mb}$
———————
$\sim\mathrm{Mab}$

Derive: $\sim\mathrm{Mab}$

1	$(\forall x)(\forall y)(Mxy \supset x = y)$	Suposición
2	Ma	Suposición
3	$\sim\mathrm{Mb}$	Suposición
4	$(\forall y)(\mathrm{Ma}y \supset \mathrm{a} = y)$	1 ($\forall$E)
5	$\mathrm{Mab} \supset \mathrm{a = b}$	4 ($\forall$E)
6	$\quad \mathrm{Mab}$	Suposición
7	$\quad \mathrm{a = b}$	5, 6 ($\supset$E)
8	$\quad \mathrm{Mb}$	2, 7 (=E)
9	$\quad \sim\mathrm{Mb}$	3 (R)
10	$\sim\mathrm{Mab}$	6-9 (~I)

Finalizaremos esta sección probando que la siguiente fórmula de *LCI* es un teorema de *DNC*=:

(46) $\vdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(x = y \;\&\; y = z) \supset x = z]$

Derive: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(x = y \;\&\; y = z) \supset x = z]$

1	$\quad \mathrm{a = b} \;\&\; \mathrm{b = c}$	Suposición
2	$\quad \mathrm{a = b}$	1 (&E)
3	$\quad \mathrm{b = c}$	1 (&E)
4	$\quad \mathrm{a = c}$	2, 3 (=E)
5	$(\mathrm{a = b} \;\&\; \mathrm{b = c}) \supset \mathrm{a = c}$	1-4 ($\supset$I)
6	$(\forall z)[(\mathrm{a = b} \;\&\; \mathrm{b} = z) \supset \mathrm{a} = z]$	5 ($\forall$I)
7	$(\forall y)(\forall z)[(\mathrm{a} = y \;\&\; y = z) \supset \mathrm{a} = z]$	6 ($\forall$I)
8	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(x = y \;\&\; y = z) \supset x = z]$	7 ($\forall$I)

Ejercicio 9.9

A. Demuestre cada una de las siguientes implicaciones. Omitimos las comillas para mayor claridad.

1. $\{\mathrm{Da}, \sim\mathrm{Db}\} \vdash \sim(\mathrm{a = b})$
2. $\{\mathrm{a = b}, \sim\mathrm{Nab}\} \vdash \sim(\forall x)\mathrm{N}xx$
3. $\{\mathrm{Aa} \supset \mathrm{b = a}, \mathrm{Aa} \supset \mathrm{Ba}\} \vdash \mathrm{Aa} \supset \mathrm{Bb}$
4. $\{(\forall x)(x = \mathrm{a} \vee x = \mathrm{b}), \sim\mathrm{Ga}\} \vdash (\exists x)\mathrm{G}x \supset \mathrm{Gb}$

Cap-9.pmd 327 22/06/07, 12:11 p.m.

B. Demuestre que cada uno de los siguientes argumentos es válido en *DNC*=:

1. $$\begin{array}{l} (\forall x)[\mathrm{A}x \supset (\forall y)(\mathrm{B}y \supset \mathrm{C}xy)] \\ (\mathrm{Ba} \;\&\; \mathrm{Ab}) \;\&\; \mathrm{a} = \mathrm{b} \\ \hline \mathrm{Caa} \end{array}$$

2. $$\begin{array}{l} (\exists x)[(\mathrm{A}x \;\&\; \mathrm{B}x) \;\&\; \mathrm{Cb}x] \\ \mathrm{a} = \mathrm{b} \\ \mathrm{Da} \\ \hline (\exists x)(\mathrm{D}x \;\&\; (\exists y)[(\mathrm{A}y \;\&\; \mathrm{B}y) \;\&\; \mathrm{C}xy]) \end{array}$$

3. $$\begin{array}{l} (\exists x)(\mathrm{A}x \;\&\; \mathrm{B}x) \\ \mathrm{Ba} \;\&\; {\sim}\mathrm{Aa} \\ \hline (\exists x)[(\mathrm{A}x \;\&\; \mathrm{B}x) \;\&\; {\sim}(x = \mathrm{a})] \end{array}$$

4. $$\begin{array}{l} (\forall x)(\mathrm{Aa}x \equiv \mathrm{A}x\mathrm{a}) \\ (\exists z)[(\mathrm{B}z\mathrm{c} \;\&\; (\forall y)(\mathrm{B}y\mathrm{c} \supset z = y)) \;\&\; \mathrm{A}z\mathrm{a}] \\ \mathrm{Bbc} \\ \hline \mathrm{Aba} \;\&\; \mathrm{Aab} \end{array}$$

C. Demuestre que las siguientes fórmulas son teoremas de *DNC*=:

1. $(\forall x)(\forall y)[x = y \supset (\mathrm{F}xy \supset \mathrm{F}yx)]$
2. $(\exists x)\ x = \mathrm{a}$
3. $(\forall x)(\exists y)\ x = y$
4. $(\forall x)(\forall y)(x = y \supset y = x)$

Cap-9.pmd 328 22/06/07, 12:12 p.m.

TERCERA PARTE
LA LÓGICA MODAL PROPOSICIONAL

10. Introducción a la lógica modal

Los conceptos de *necesidad* y *posibilidad* han ocupado un lugar central en la filosofía desde la época de los griegos. La validez de muchos de los argumentos acerca de la existencia de Dios, la libertad del hombre o la legaliformidad de la naturaleza dependen de cómo entendamos estos conceptos. La forma de expresar la necesidad y la posibilidad en el lenguaje natural es utilizando términos que califiquen el *modo* en que un enunciado puede ser verdadero. Así, hablamos de enunciados *necesariamente* verdaderos, *contingentemente* verdaderos o *posiblemente* verdaderos. Estos términos son llamados *modalidades aléticas* (del griego *alétheia*: verdad). En este capítulo estudiaremos la sintaxis y la semántica de varios sistemas lógicos que se ocupan de las modalidades aléticas. También veremos que existen conceptos epistemológicos, éticos y temporales cuyo análisis lógico es análogo al de las modalidades aléticas.

10.1 Enunciados necesarios, posibles y contingentes

Un enunciado ***necesariamente verdadero*** es aquél que es verdadero en cualquier situación o circunstancia, en todo tiempo y en todo lugar. ¿Existen tales enunciados? Los siguientes ejemplos son considerados verdades necesarias por la gran mayoría de filósofos:

(1) $2 + 2 = 4$

(2) La raíz cuadrada de 2 es irracional.

(3) Ayer fue lunes o ayer no fue lunes.

(4) Todos los pájaros son pájaros.

(5) Todos los cuerpos son extensos.

(6) Ningún soltero está casado.

Los primeros dos enunciados son ejemplos de *verdades matemáticas*. Con contadas excepciones, los filósofos consideran que todos los enunciados matemáticos son ver-

Cap-10.pmd 331 13/07/07, 03:26 p.m.

dades necesarias[1]. Los enunciados **(3)** y **(4)** son *verdades lógicas* o tautologías. Aunque algunos filósofos han intentado encontrar contextos específicos, como la mecánica cuántica[2], en los cuales una verdad lógica sería falsa, generalmente todas las tautologías de la lógica clásica son consideradas necesariamente verdaderas. Finalmente, los enunciados **(5)** y **(6)** son ejemplos de *verdades analíticas*. La distinción entre enunciados analíticos y sintéticos tiene una larga historia y ocupa un lugar prominente en la filosofía de Kant y de los positivistas lógicos. Los enunciados analíticos, según Kant (1781/1984), son aquéllos en los que el concepto expresado por el sujeto de un enunciado contiene al concepto expresado por el predicado. El concepto de cuerpo contiene el concepto de extensión. Por lo tanto, a través del análisis lógico, sin tener que recurrir a la experiencia ni a circunstancia alguna en el mundo real, es posible determinar la verdad del enunciado **(5)**. La distinción entre enunciados sintéticos y analíticos ha sido duramente cuestionada en la filosofía contemporánea[3] y no existe un consenso acerca del estatus de los enunciados analíticos semejante al que existe en torno a las verdades lógicas o a las verdades matemáticas.

La negación de un enunciado necesariamente verdadero es un enunciado ***necesariamente falso***. Un enunciado necesariamente falso es aquél que es falso en cualquier situación o circunstancia, en todo tiempo y en todo lugar. Suponiendo que los enunciados **(1)** al **(6)** son necesariamente verdaderos, los siguientes enunciados son necesariamente falsos.

(7) $2 + 2 \neq 4$
(8) La raíz cuadrada de 2 no es irracional.
(9) Ayer fue lunes y ayer no fue lunes.
(10) Hay pájaros que no son pájaros.
(11) Hay cuerpos que no son extensos.
(12) Hay solteros que están casados.

Un enunciado es ***posiblemente verdadero*** si es verdadero en al menos una situación o circunstancia. A diferencia de los enunciados necesariamente verdaderos, un enunciado posiblemente verdadero puede ser de hecho falso. Lo importante es que haya algún contexto en el cual el enunciado pueda ser fáctica o contrafácticamente verdadero. Consideremos los siguientes enunciados:

1. La excepción más notable es John Stuart Mill (1843), quien consideraba que los enunciados matemáticos son generalizaciones empíricas. Como tales, siempre existe la posibilidad de que sean refutados por la experiencia.

2. Putnam (1968/1976).

3. El principal crítico de la distinción es Quine (1953/1984). La respuesta más conocida a las críticas de Quine es la de Grice & Strawson (1957).

Cap-10.pmd 332 13/07/07, 03:26 p.m.

(13) Marte tiene dos lunas.
(14) Marte tiene tres lunas.
(15) Marte no tiene dos lunas.

El enunciado **(13)** es posiblemente verdadero porque hay un contexto en el cual el enunciado es verdadero, a saber, la configuración presente del universo. Todo enunciado verdadero es a la vez posiblemente verdadero. El enunciado **(14)** también es posiblemente verdadero porque, aunque Marte no tiene tres lunas, hay múltiples configuraciones del universo bajo las cuales las tendría. El enunciado **(15)** también es posiblemente verdadero porque si es posible que Marte tenga tres lunas, naturalmente es posible que no tenga dos.

Cuando un enunciado es falso en al menos una situación o circunstancia, decimos que el enunciado es ***posiblemente falso***. Los enunciados **(13)** al **(15)** son todos posiblemente falsos. El **(14)** y el **(15)** son falsos bajo la presente configuración del universo. Todos los enunciados falsos son a la vez posiblemente falsos. El enunciado **(13)**, por su parte, es falso bajo una configuración del universo en la que Marte no tenga dos lunas.

Cuando un enunciado es verdadero, pero es posiblemente falso, decimos que el enunciado es ***contingentemente verdadero***. El enunciado **(13)** es verdadero, pero es sólo contingentemente verdadero porque es posible que Marte no tenga dos lunas. Y cuando un enunciado es falso, pero es posiblemente verdadero, decimos que el enunciado es ***contingentemente falso***. El enunciado **(15)** es falso, pero sólo contingentemente falso porque es posible que Marte tenga dos lunas.

Al definir los conceptos anteriores utilizamos las frases: "verdadero en cualquier situación o circunstancia" y "verdadero en al menos una situación o circunstancia"[4]. Estas frases son ambiguas y generan varios interrogantes: ¿Hay algún límite intrínseco en las situaciones que debemos considerar? ¿O acaso el rango de situaciones está determinado únicamente por la riqueza de nuestra imaginación? La respuesta a estas preguntas ha generado grandes controversias en la historia reciente de la filosofía. Aquí sólo podemos considerar algunos aspectos fundamentales del problema. Para comenzar, las situaciones y circunstancias a las que se refieren las definiciones no pueden estar supeditadas a nuestra capacidad de imaginar o concebir. Si hacemos que las modalidades dependan de la riqueza de nuestra imaginación, introducimos un elemento subjetivo como fundamento de los conceptos de necesidad y posibilidad, lo cual es inaceptable para la gran mayoría de los filósofos. ¿Dónde, entonces, residen los límites de las situaciones posibles a las que se refieren las definiciones? Los filósofos han establecido una distinción entre varios conceptos de necesidad de acuerdo

4. Como veremos en la sección 10.5, los filósofos usan la frase "mundos posibles" para referirse a las situaciones y circunstancias mencionadas en las definiciones.

con los límites que se deben imponer sobre las situaciones que se deben tomar en cuenta. Nos referiremos aquí a tres de ellas: la necesidad física, la necesidad metafísica y la necesidad lógica.

Un enunciado es ***físicamente posible*** si y sólo si describe un evento que no viola las leyes de la naturaleza. Es ***físicamente necesario*** si y sólo si es verdadero bajo cualquier situación o circunstancia permitido por las leyes de la naturaleza. Tomemos el caso de las lunas de Marte. Desde el punto de vista de la física, no existe ninguna razón para pensar que el número de lunas que orbitan a Marte no hubiera podido ser otro. Si las condiciones iniciales del sistema solar hubieran sido diferentes, Marte podría haber tenido un número mayor o menor de lunas. Por eso es físicamente posible que Marte no tenga dos lunas. En contraste, consideremos el siguiente enunciado:

(16) Hay personas que corren una maratón en un minuto.

Una persona tendría que correr a 2520 kilómetros por hora para que el enunciado fuera verdadero. Dada la constitución biológica del ser humano y las leyes de la naturaleza, el enunciado **(16)** es ***físicamente imposible***.

El segundo tipo de necesidad al que nos referiremos es la necesidad metafísica. Un enunciado es ***metafísicamente posible*** si y sólo si describe un evento que no contradice algún principio metafísico inquebrantable. Es ***metafísicamente necesario*** si y sólo si es verdadero bajo cualquier situación o circunstancia permitida por ese principio metafísico. Las lunas de Marte nos servirán una vez más como ejemplo. Kepler, uno de los padres de la astronomía moderna, consideraba que era metafísicamente necesario que Marte tuviera dos lunas. Cuando Galileo descubrió a través del telescopio que Júpiter tenía cuatro lunas, Kepler inmediatamente conjeturó que si la Tierra tenía una luna y Júpiter cuatro, Marte necesariamente debía tener dos porque el número de lunas en el universo debía aumentar en proporción geométrica o aritmética. Para Kepler, Dios le había otorgado al universo una estructura matemática en el momento de la creación y era imposible que un fenómeno natural no hiciera parte de la armonía universal. Su conjetura acerca del número de las lunas de Marte era la única que lograba establecer una relación matemática entre el número de lunas descubiertas hasta ese momento en el sistema solar. Hay múltiples ejemplos en la historia de la ciencia y de la filosofía en los que la obediencia a algún principio teológico o filosófico moldea las concepciones de lo posible y lo necesario.

El último tipo de necesidad al que nos referiremos es la necesidad lógica. Un enunciado es ***lógicamente posible*** si y sólo si no implica una contradicción lógica. Es ***lógicamente necesario*** si y sólo si su negación implica una contradicción lógica. El caso más simple es el de las tautologías y las contradicciones. Las tautologías son lógicamente necesarias porque su negación es una contradicción lógica. Y las contradicciones son lógicamente imposibles por obvias razones. Los casos menos claros tienen que ver con la posibilidad lógica de los demás tipos de enunciados.

Retomemos el ejemplo **(16)**. Aunque es *físicamente* imposible que un ser humano corra una maratón en un minuto, ¿es *lógicamente* posible que lo haga? La respuesta a esta pregunta depende de si hay una contradicción lógica entre ser un ser humano y correr una maratón en un minuto. Para poder correr a la velocidad requerida, la configuración biológica del ser humano debe ser radicalmente distinta. La capacidad muscular, la resistencia a la fricción y la capacidad pulmonar de un individuo capaz de correr a 2520 kilómetros por hora serían increíblemente mayores que las de un ser humano en nuestra situación actual. La pregunta que surge es: ¿Sigue siendo tal individuo un ser humano? ¿O acaso hace parte de la naturaleza humana correr a una velocidad máxima de aproximadamente 36 kilómetros por hora? Si ese ser superdotado no es un ser humano, entonces no es lógicamente posible que un ser humano corra una maratón en un minuto. La razón es la siguiente. Supongamos que "S" representa la propiedad de correr una maratón en un minuto y "H" representa la propiedad de ser humano. Si hace parte de la naturaleza humana correr a una velocidad máxima de aproximadamente 36 kilómetros por hora, entonces la siguiente afirmación es cierta:

(17) $(\forall x)(\mathrm{H}x \supset \sim\mathrm{S}x)$

Consideremos ahora la simbolización del enunciado **(16)**:

(16a) $(\exists x)(\mathrm{H}x \ \& \ \mathrm{S}x)$

La conjunción de estas dos fórmulas implica una contradicción. En consecuencia, si somos lentos por naturaleza, es lógicamente imposible que corramos una maratón en un minuto.

El asunto, en última instancia, depende de cómo entendamos la esencia del ser humano. ¿Qué le pertenece a esa esencia? Aquellos filósofos que creen que la naturaleza misma de las cosas determina la respuesta a esta pregunta son llamados *realistas*. Los realistas creen que existen esencias independientes del pensamiento humano que determinan cuáles propiedades no pueden ser cambiadas en un objeto si queremos que siga perteneciendo a la misma especie. Los *nominalistas* se oponen a los realistas, pues consideran que las esencias o definiciones de las cosas son creadas por nuestras prácticas lingüísticas. Para un nominalista no existe un criterio inmodificable que determine cuáles propiedades pueden o no pueden ser atribuidas a una especie. Como se ve, la definición de la necesidad lógica nos conduce inmediatamente a un problema filosófico cuya resolución no cae bajo la esfera de la lógica. Peor aún, la definición de la necesidad lógica amenaza con devolvernos a la definición de la necesidad metafísica.

¿Es posible evadir las disputas metafísicas al tratar de establecer cuáles enunciados son lógicamente posibles? La única forma de hacerlo es concibiendo los objetos del mundo como carentes de esencia. Si permitimos que un enunciado le atribuya cualquier propiedad a cualquier individuo en cualquier situación, entonces todos los enunciados que no sean autocontradictorios serán lógicamente posibles. Un enunciado es autocontradictorio si y sólo si le atribuye a un individuo una propiedad y su negación, como en el siguiente ejemplo:

(18) Juan tiene 54 años y no tiene 54 años.

El enunciado **(16)**, por su parte, resulta ser lógicamente posible desde este punto de vista. Podemos atribuirle cualquier propiedad a los seres humanos, incluso la capacidad de correr a 2520 kilómetros por hora. La lógica modal proposicional requiere de esta concepción amplia de la necesidad lógica como punto de partida para la caracterización lógica de los sistemas que estudiaremos en éste y en los siguientes capítulos.

10.2 Propiedades lógicas de las modalidades

Desde un punto de vista formal, las modalidades aléticas son operadores lógicos monádicos que generan nuevas fórmulas al ser antepuestos a una fórmula de *LP* o de *LC*[5]. Los operadores aléticos "necesariamente" y "posiblemente" son simbolizados generalmente con un cuadrado "□" y un diamante "◊", respectivamente[6]. Algunos autores incluyen un símbolo adicional para el operador "contingentemente", pero como éste puede ser expresado fácilmente en términos de cualquiera de los otros dos operadores, no seguiremos esa práctica.

Antes de poder considerar las propiedades lógicas de las modalidades es necesario ampliar el vocabulario del lenguaje *LP* para incluir los operadores modales □ y ◊. Las fórmulas modales aléticas pueden ser añadidas a *LP* mediante la siguiente cláusula:

Si $\mathcal{P}$ es una fórmula, también lo son $\Box\mathcal{P}$ y $\Diamond\mathcal{P}$.

El lenguaje resultante es una extensión sintáctica de *LP* que llamaremos *LM*, por Lógica Modal.

El operador □ generalmente es considerado el operador primitivo, del cual es posible derivar el operador ◊. Como afirmar que es posible que $\mathcal{P}$ sea verdadera es lo mismo que afirmar que es falso que $\mathcal{P}$ sea necesariamente falsa, podemos establecer la siguiente equivalencia:

$$\Diamond\mathcal{P} \ =_{\text{Def}} \ {\sim}\Box{\sim}\mathcal{P}$$

5. En lo que resta de este libro nos limitaremos al caso de la lógica proposicional dada la complejidad de los problemas filosóficos generados por la lógica modal cuantificada. El lector interesado en esta última puede consultar Fitting & Mendelsohn (1998).

6. Algunos textos –Hughes & Cresswell (1968), por ejemplo– utilizan las letras "*L*" y "*M*" en lugar de "□" y "◊", respectivamente. Las letras corresponden a los términos en alemán para verdad lógica (*logische Warheit*) y verdad posible (*mögliche Warheit*).

Cap-10.pmd 336 13/07/07, 03:26 p.m.

Ahora bien, si consideramos el operador $\Diamond$ como el operador primitivo, es posible definir $\Box$ en términos de $\Diamond$:

$$\Box\mathcal{P} \;=_{\text{Def}}\; \sim\Diamond\sim\mathcal{P}$$

Afirmar que $\mathcal{P}$ es necesariamente verdadera es lo mismo que afirmar que no es posible que $\mathcal{P}$ sea falsa. La posibilidad de interdefinir los operadores aléticos será de gran utilidad en los siguientes capítulos.

Para expresar que una fórmula $\mathcal{P}$ es contingentemente verdadera, utilizamos cualquiera de las siguientes conjunciones:

$$\mathcal{P} \,\&\, \Diamond\sim\mathcal{P} \quad \text{o} \quad \mathcal{P} \,\&\, \sim\Box\mathcal{P}$$

Y para expresar que $\mathcal{P}$ es contingentemente falsa, utilizamos cualquiera de las siguientes conjunciones:

$$\sim\mathcal{P} \,\&\, \Diamond\mathcal{P} \quad \text{o} \quad \sim\mathcal{P} \,\&\, \sim\Box\sim\mathcal{P}$$

Aunque son operadores lógicos, los operadores aléticos no son operadores veritativo-funcionales, es decir, el valor de verdad de la fórmula que resulta de añadir un operador modal a una fórmula no es una función del valor de verdad de la fórmula original. Si los operadores modales fueran veritativo-funcionales, bastaría con construir una tabla de verdad para determinar el valor de verdad de una fórmula modal. Por ejemplo, examinemos la siguiente tabla de verdad:

$\mathcal{P}$	$\Box\mathcal{P}$
V	?
F	F

Si una fórmula es falsa, no puede ser necesariamente verdadera. Pero si es verdadera, esa información no es suficiente para determinar si es verdadera en todo tiempo y en todo lugar. Por lo tanto no podemos asignarle un valor de verdad a $\Box\mathcal{P}$ en ese caso.

Consideremos ahora el caso del operador "$\Diamond$":

$\mathcal{P}$	$\Diamond\mathcal{P}$
V	V
F	?

Si una fórmula es verdadera, naturalmente es posible que sea verdadera. Pero si es falsa, no podemos concluir que es falsa en todo tiempo y en todo lugar. No podemos descartar la posibilidad de que sea verdadera bajo ciertas circunstancias, y por eso es imposible darle un valor de verdad a $\Diamond\mathcal{P}$.

10.3 Modalidades no aléticas

La lógica modal, en el sentido más estrecho, es el estudio de la sintaxis y la semántica de las modalidades aléticas, es decir, aquellas que modifican la verdad de un enunciado. En un sentido más amplio, el término "lógica modal" también se utiliza para designar el estudio de otros tipos de modalidades. Éstas incluyen las *modalidades deónticas*, expresadas por palabras como "obligatorio", "permitido" y "prohibido"; las *modalidades temporales*, que se generan por los diversos tiempos verbales; y las *actitudes proposicionales*, que describen la relación entre un ser pensante y una proposición, expresadas por palabras como "creer que", "saber que", "desear que", "cuestionar que", entre otras.

El uso del término "modal" al considerar los aspectos éticos, temporales o actitudinales de un enunciado no es gratuita, pues estas modalidades comparten propiedades lógicas importantes con las modalidades aléticas. Para comenzar, todas estas modalidades también pueden ser formalizadas como operadores lógicos en un lenguaje formal. Los *operadores deónticos*[7] "es obligatorio que", "está permitido que" y "está prohibido que" son simbolizados generalmente con las letras "**O**", "**P**" y "**F**", respectivamente. Consideremos, por ejemplo, los siguientes enunciados y sus respectivas simbolizaciones:

(19) Es *obligatorio* pagar impuestos.

OI

(20) Está *permitido* el consumo de alcohol.

PA

(21) Está *prohibido* el ingreso de menores.

FM

El operador **O** es considerado el operador primitivo. Es posible definir los demás operadores en términos suyos:

$$\mathbf{P}\mathcal{P} =_{\text{Def}} \sim\mathbf{O}\sim\mathcal{P}$$

$$\mathbf{F}\mathcal{P} =_{\text{Def}} \mathbf{O}\sim\mathcal{P}$$

$\mathcal{P}$ está permitido si y sólo si no es obligatorio evitar $\mathcal{P}$; y $\mathcal{P}$ está prohibido si y sólo si es obligatorio evitar hacer $\mathcal{P}$. Al igual que en el caso de los operadores aléticos, es posible definir el operador primitivo **O** en términos de los operadores no primitivos:

7. La lógica deóntica fue desarrollada por von Wright (1951a).

Cap-10.pmd 338 13/07/07, 03:26 p.m.

$$\mathbf{O}\mathcal{P} =_{\text{Def}} {\sim}\mathbf{P}{\sim}\mathcal{P}$$
$$\mathbf{O}\mathcal{P} =_{\text{Def}} \mathbf{F}{\sim}\mathcal{P}$$

La primera equivalencia dice que $\mathcal{P}$ es obligatorio si y sólo si no está permitido evitar $\mathcal{P}$; la segunda, que $\mathcal{P}$ es obligatorio si y sólo si está prohibido evitar $\mathcal{P}$.

Pasamos a examinar la lógica temporal[8]. Existen varios *operadores temporales*: "siempre será el caso que $\mathcal{P}$", "será el caso que $\mathcal{P}$", "siempre ha sido el caso que $\mathcal{P}$" y "alguna vez fue el caso que $\mathcal{P}$", los cuales se representan con las letras "**G**", "**F**", "**H**" y "**P**", respectivamente. Consideremos un ejemplo de cada uno:

(22) Siempre será cierto que 2 + 2 = 4.

GD

(23) Algún día el hombre habitará la Luna.

FL

(24) El invierno siempre ha llegado después del otoño.

HF

(25) En alguna época Panamá fue parte de Colombia.

PC

Generalmente los operadores **G** y **H**, el futuro constante y el pasado constante, son considerados los operadores primitivos. El operador **F**, el futuro puntual, se puede definir en términos de **G**:

$$\mathbf{F}\mathcal{P} =_{\text{Def}} {\sim}\mathbf{G}{\sim}\mathcal{P}$$

En palabras: algún día será el caso que $\mathcal{P}$ si y sólo si no es cierto que siempre será falso que $\mathcal{P}$. Del mismo modo, podemos definir **P**, el pasado puntual, en términos de **H**:

$$\mathbf{P}\mathcal{P} =_{\text{Def}} {\sim}\mathbf{H}{\sim}\mathcal{P}$$

En palabras: en algún momento fue cierto que $\mathcal{P}$ si y sólo si no es cierto que siempre ha sido falso que $\mathcal{P}$. Al igual que en los casos anteriores, estos dos pares de operadores son interdefinibles. Así, podemos definir el futuro constante en términos del futuro puntual:

$$\mathbf{G}\mathcal{P} =_{\text{Def}} {\sim}\mathbf{F}{\sim}\mathcal{P}$$

8. La lógica temporal fue desarrollada por Arthur Prior (1957, 1967, 1969).

Cap-10.pmd 339 13/07/07, 03:26 p.m.

En palabras: siempre será el caso que $\mathcal{P}$ si y sólo si no es cierto que en algún momento no será cierto que $\mathcal{P}$. Y podemos definir el pasado constante en términos del pasado puntual:

$$\mathbf{H}\mathcal{P} =_{\mathrm{Def}} \sim\mathbf{P}\sim\mathcal{P}$$

En palabras: siempre fue el caso que $\mathcal{P}$ si y sólo si no es cierto que en algún momento no fue cierto que $\mathcal{P}$.

Finalmente, consideremos los *operadores actitudinales*. A diferencia de los operadores anteriores, éstos son binarios. Pero a diferencia de operadores lógicos como la disyunción o la conjunción, que conectan dos fórmulas para formar una fórmula nueva, los operadores actitudinales conectan una constante y una fórmula para formar una nueva fórmula. Los principales operadores de este tipo son los *operadores epistémicos* "saber que" y "creer que", los cuales son representados con las letras "**K**" y "**B**", respectivamente[9]. Consideremos, por ejemplo, los siguientes enunciados y sus respectivas simbolizaciones:

(26) Patricia *sabe que* Islamabad está en Pakistán.

KpI

(27) Tomás *cree que* las águilas vuelan.

BtA

Los dos operadores epistémicos son interdefinibles:

$$\mathbf{Ka}\mathcal{P} =_{\mathrm{Def}} \sim\mathbf{Ba}\sim\mathcal{P}$$
$$\mathbf{Ba}\mathcal{P} =_{\mathrm{Def}} \sim\mathbf{Ka}\sim\mathcal{P}$$

Para que estas definiciones tengan sentido, la noción de creencia debe ser interpretada de la siguiente forma: "**a** cree que $\mathcal{P}$" quiere decir que la verdad de $\mathcal{P}$ es compatible o consistente con las creencias de **a**, así **a** no sea consciente de que $\mathcal{P}$. Así, afirmar que **a** sabe que $\mathcal{P}$ es lo mismo que decir que la falsedad de $\mathcal{P}$ no es compatible con las creencias de **a**; y afirmar que **a** cree que $\mathcal{P}$ es equivalente a afirmar que no es el caso que **a** sepa que $\mathcal{P}$ es falsa.

En lo que resta del libro nos ocuparemos principalmente de las modalidades aléticas, pero es importante tener presente que éstas son tan sólo un caso específico de un concepto más amplio y en constante desarrollo.

9. El estudio formal de la lógica epistémica surge con von Wright (1951b) y Hintikka (1962), aunque la Edad Media no fue ajena al tema; *véase* Boh (1993) y Knuutila (1993).

Cap-10.pmd 340 13/07/07, 03:26 p.m.

Ejercicio 10.1

Simbolice los siguientes enunciados utilizando los operadores modales estudiados en las dos últimas secciones. Utilice “D” para simbolizar el enunciado “Dios existe”.

1. Es posible que Dios exista.
2. Necesariamente, Dios no existe.
3. Dios existe, pero no necesariamente.
4. Es imposible que Dios no exista.
5. Es posible que Dios exista, pero de hecho no existe.
6. Dios existe contingentemente.
7. Si Dios existe, existe necesariamente.
8. Dios existe necesariamente o su existencia es imposible.
9. Dios existe si y sólo si es imposible que no exista.
10. Dios siempre ha existido.
11. Dios no existirá en ningún momento.
12. Hubo una época en que Dios existió.
13 El Papa cree que Dios existe.
14. El Papa no sabe si Dios existe pero así lo cree.
15. Tomás sabe que Dios no existe.
16. Francisca no cree que Dios no exista.
17. Es posible que sea necesario que Dios exista.
18. Es necesario que sea posible que Dios exista.
19. Es imposible que sea necesario que Dios no exista.
20. Es necesario que sea necesario que Dios exista.

10.4 Los axiomas de la lógica modal proposicional

Los sistemas de lógica modal generalmente son descritos en términos de los axiomas o principios sintácticos aceptados en cada uno. En este libro hemos desarrollado la lógica proposicional y la lógica de predicados sin utilizar axiomas. En su lugar, hemos introducido reglas de transformación sintáctica, las reglas de los sistemas de deducción natural, que reflejan los axiomas de la lógica clásica. En el caso de la lógica modal seguiremos el mismo procedimiento. Sin embargo, es importante estudiar cómo funciona un sistema axiomático, cuáles son los axiomas de la lógica proposicional y cuáles son los axiomas de los diferentes sistemas de lógica modal proposicional para entender las diferencias fundamentales entre dichos sistemas.

Un sistema axiomático para un sistema lógico consiste de (i) una lista de los símbolos primitivos, junto con cualquier definición que se crea conveniente; (ii) un conjunto de reglas de formación que especifiquen cuáles expresiones son las fórmulas del sistema; (iii) un conjunto de fórmulas seleccionadas como axiomas; y (iv) un conjunto de reglas de transformación que permitan operaciones sobre los axiomas y sobre las fórmulas obtenidas a partir de las transformaciones previas de los axiomas. Las fórmulas obtenidas al aplicar las reglas de transformación se denominan *teoremas*. Una fórmula que sea o bien un axioma o bien un teorema del sistema se denomina una *tesis* del mismo.

La axiomatización más conocida de la lógica proposicional es la propuesta por Whitehead y Russell en *Principia Mathematica* (1910-1913). El sistema consiste de cuatro[10] axiomas esquemáticos:

Axioma 1	$(\mathcal{P} \vee \mathcal{P}) \supset \mathcal{P}$
Axioma 2	$\mathcal{Q} \supset (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$
Axioma 3	$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \supset (\mathcal{Q} \vee \mathcal{P})$
Axioma 4	$(\mathcal{Q} \supset \mathcal{R}) \supset [(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \supset (\mathcal{P} \vee \mathcal{R})]$

y una regla de transformación:

Modus Ponens: Si $\mathcal{P}$ y $(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q})$ son tesis, $\mathcal{Q}$ también lo es.

A partir de estos axiomas y de la regla de transformación es posible deducir la totalidad de la lógica proposicional clásica.

Para caracterizar los diferentes sistemas modales que discutiremos en este libro, utilizaremos como punto de partida el siguiente axioma esquemático:

Axioma K: $\Box(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}) \supset (\Box\mathcal{P} \supset \Box\mathcal{Q})$

y la siguiente regla de transformación:

Necesitación: Si $\mathcal{P}$ es una tesis de la lógica proposicional, entonces $\Box\mathcal{P}$.

El **sistema K** es el resultado de añadir el axioma K y la regla de necesitación a la lógica proposicional. El sistema K, que fue bautizado en honor a Saul Kripke, es el sistema modal normal más débil, es decir, todas sus tesis hacen parte de todos los demás sistemas de lógica modal, pero no todas las tesis de los demás sistemas son tesis en K.

10. El sistema original incluía un quinto axioma: $[\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})] \supset [\mathcal{Q} \vee (\mathcal{P} \vee \mathcal{R})]$, pero más adelante se demostró que este axioma no es necesario. El desarrollo histórico de la lógica moderna es claramente expuesto por Church (1956).

Cap-10.pmd 342 13/07/07, 03:26 p.m.

A partir del sistema K podemos construir otros sistemas modales simplemente añadiendo nuevos axiomas a la lista. El **sistema D** se genera al añadir el siguiente axioma al sistema K:

Axioma D: Si $\Box P$, entonces $\Diamond P$.

El sistema D es el más adecuado para la lógica deóntica y de ahí proviene su nombre. El axioma D, conocido como "Ley de Kant", refleja la idea de que si algo es obligatorio, debe ser posible. En otras palabras, un sistema ético no puede exigir lo imposible.

El **sistema T** se genera al añadir el siguiente axioma al sistema K:

Axioma T: Si $\Box \wp$, entonces $\wp$.

El sistema fue bautizado y axiomatizado por primera vez por Gödel (1933). También es conocido como el sistema M. Es el único sistema modal que muchos filósofos aceptan, pues consideran indeseables las consecuencias filosóficas de los otros sistemas. El axioma T también es conocido como el Axioma de Necesidad.

El **sistema K4** se genera al añadir el siguiente axioma al sistema K:

Axioma S4: Si $\Box \wp$, entonces $\Box\Box \wp$.

El **sistema KB** se genera al añadir el siguiente axioma al sistema K:

Axioma B: Si $\wp$, entonces $\Box\Diamond \wp$.

Tomaremos ahora al sistema T como la base para la construcción de los siguientes tres sistemas. El **sistema B** se genera al añadir el axioma B al sistema T. El sistema fue bautizado en honor al matemático y filósofo Jan Brouwer (1881-1966) debido a las similitudes entre el tipo de deducciones permitidas en el sistema y su interpretación intuicionista de las matemáticas.

El **sistema S4** se genera al añadir el axioma S4 al sistema T. Finalmente, el **sistema S5** se genera al añadir el siguiente axioma al sistema T:

Axioma S5: Si $\Diamond \wp$, entonces $\Box\Diamond \wp$.

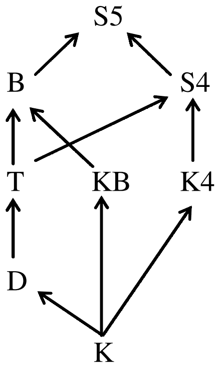
El sistema S5 es el sistema de lógica modal más fuerte de todos. Es decir, todas las tesis de los demás sistemas son tesis en S5, pero hay tesis en S5 que no son tesis en ningún otro sistema modal. Los sistemas S4 y S5, junto con los sistemas S1-S3, que no estudiaremos aquí, fueron los primeros sistemas modales en aparecer. Fueron introducidos por el filósofo estadounidense C. I. Lewis (1883-1964)[11].

---

11. *Véase* Lewis y Langford (1932). La letra "S" representa la palabra inglesa "strict". Como se explica más adelante en esta sección, Lewis concibió las lógicas S1-S5 como sistemas para la implicación estricta.

Cap-10.pmd 343 13/07/07, 03:26 p.m.

Las relaciones entre las diferentes lógicas se pueden apreciar en el siguiente gráfico. Una flecha entre dos sistemas indica que el primero, el origen de la flecha, es más débil que el segundo; es decir, todas las tesis del primer sistema son tesis en el segundo sistema, pero no todas las tesis del segundo son tesis en el primero.



K	=	Axioma K + Necesitación
D	=	K + Axioma D
T	=	K + Axioma T
KB	=	K + Axioma B
K4	=	K + Axioma S4
B	=	T + Axioma B
S4	=	T + Axioma S4
S5	=	T + Axioma S5

Existen muchísimas otras lógicas modales y su número aumenta cada día, pero las mencionadas aquí son las más comunes. No existe una razón definitiva para preferir un sistema sobre los demás. Todo depende de cuál sea el concepto de necesidad que queramos expresar simbólicamente. Por eso no es posible hablar de una sola lógica modal, sino de una (gran) familia de lógicas modales.

La introducción de los primeros sistemas modales no obedeció al interés de C. I. Lewis por los conceptos de necesidad y posibilidad. Su motivación principal fue, más bien, su insatisfacción con la noción de implicación material utilizada en *Principia Mathematica*. Un par de años después de la publicación de *Principia*, Lewis publicó una serie de artículos (1912, 1913, 1914a, 1914b) en los que explicaba los problemas inherentes al condicional material y proponía una alternativa modal. En el sistema de *Principia*, y en cualquier sistema clásico, cualquier fórmula que tenga la siguiente estructura es una tesis:

$$\mathcal{P} \supset (\mathcal{Q} \supset \mathcal{P})$$
$$\sim\mathcal{P} \supset (\mathcal{P} \supset \mathcal{Q})$$

Informalmente, la primera expresión dice que si una fórmula es verdadera, entonces cualquier fórmula la implica. La segunda dice que si una fórmula es falsa, entonces implica cualquier fórmula. Este tipo de expresiones son conocidas como las *paradojas de la implicación*, pues permiten la construcción de argumentos absurdos:

(28) Napoleón llegó a ser un adulto.
—
Por lo tanto, si Napoleón murió cuando niño, entonces llegó a ser un adulto.

(29) Napoleón no murió cuando niño.
—
Por lo tanto, si Napoleón murió cuando niño, entonces llegó a ser un adulto.

Cap-10.pmd 344 13/07/07, 03:26 p.m.

Lewis no deseaba rechazar este tipo de tesis. De hecho, afirmaba que no encerraban mayor misterio siempre y cuando fueran interpretadas adecuadamente: como casos de aplicación de un operador veritativo-funcional al que Russell y Whitehead desafortunadamente habían decidido llamar "implicación". Pero Lewis creía que la palabra "implicación" tenía un sentido más fuerte en el lenguaje natural: generalmente cuando decimos que $\mathcal{Q}$ *implica* a $\mathcal{P}$, queremos decir que $\mathcal{Q}$ *se sigue de* $\mathcal{P}$. En este sentido del término, no es cierto que una fórmula verdadera sea implicada por cualquier fórmula, ni que una fórmula falsa implique cualquier fórmula. Para diferenciar los dos sentidos de "implicación", Lewis introdujo la distinción entre "implicación material" e "implicación estricta". Lewis definió la implicación estricta de la siguiente manera:

[Def. $\Rightarrow$] $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) =_{\text{Def}} \sim\Diamond(\mathcal{P} \,\&\, \sim\mathcal{Q}) =_{\text{Def}} \Box(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q})$

Consideremos el resultado de reemplazar el condicional material por el condicional estricto en las estructuras que generan las paradojas de la implicación:

$$\mathcal{P} \Rightarrow (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$$
$$\sim\mathcal{P} \Rightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$$

Si asumimos que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ no contienen operadores modales, ninguna fórmula que tenga alguna de estas dos estructuras es una tesis en ningún sistema de lógica modal. Por lo tanto, los argumentos **(28)** y **(29)** son inválidos en cualquiera de los sistemas modales propuestos por Lewis si las relaciones condicionales son entendidas como implicaciones estrictas.

Desafortunadamente, el concepto de implicación estricta no es inmune a una reformulación de las paradojas, como Lewis mismo lo reconoció. Cualquier fórmula de *LM* que tenga alguna de las siguientes estructuras es una tesis en todos los sistemas de lógica modal:

$$\Box\mathcal{P} \Rightarrow (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$$
$$\Box\sim\mathcal{P} \Rightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$$

De la primera tesis se sigue que una verdad necesaria está estrictamente implicada por cualquier fórmula. De la segunda, que una falsedad necesaria implica estrictamente cualquier fórmula. Si le asignamos al condicional estricto el mismo sentido de un enunciado condicional en el lenguaje natural, como era la intención de Lewis, podemos construir los siguientes argumentos absurdos:

(30) Necesariamente, 2 + 2 = 4.
____
Si hoy es martes, entonces 2 + 2 = 4.

(31) Es imposible que haya círculos cuadrados.
____
Si hay círculos cuadrados, entonces Marruecos está en Asia.

Cap-10.pmd 345 13/07/07, 03:26 p.m.

Las paradojas no ocurrirían si restringiéramos los enunciados que pueden ser conectados con una implicación estricta a enunciados contingentes, pero esta solución eliminaría la posibilidad de construir cualquier sistema de lógica modal.

El problema de la representación formal de los enunciados condicionales sigue siendo un área activa de investigación hoy en día[12]. Hay lógicas no clásicas que logran evitar estas paradojas al crear relaciones de relevancia entre el antecedente y el consecuente del condicional, pero el precio que pagan es una complejidad creciente en sus formalismos.

10.5 Semántica de la lógica modal

La lógica modal tuvo inicialmente sólo un interés sintáctico, pues era difícil imaginar cómo se debían interpretar los diferentes sistemas resultantes. A comienzos de la década de 1960, Saul Kripke introdujo la *semántica de mundos posibles*. En una serie de artículos (1959, 1963a, 1963b), Kripke propuso un modelo que permitía darle una interpretación intuitiva a cada uno de los sistemas modales propuestos hasta el momento. Para entender cómo funciona el modelo kripkeano, consideraremos inicialmente la semántica propuesta informalmente por Leibniz dos siglos antes.

10.5.1 *Semántica leibniziana*

La posibilidad de definir los operadores aléticos el uno en términos del otro tiene una enorme similitud con la dualidad de los cuantificadores de *LC*:

$$(\forall \mathbf{x})\mathcal{P} \;=_{\text{Def}}\; \sim(\exists \mathbf{x})\sim\mathcal{P}$$
$$(\exists \mathbf{x})\mathcal{P} \;=_{\text{Def}}\; \sim(\forall \mathbf{x})\sim\mathcal{P}$$

Esta similitud no es solamente superficial. Leibniz, quien fue uno de los primeros filósofos modernos en explorar la lógica de los operadores aléticos, consideró que éstos pueden ser entendidos como una forma de cuantificación. Su semántica está basada en una idea muy sencilla: nuestro universo no es más que uno entre un número infinito de universos o mundos posibles. Cada uno de estos mundos tiene una historia completa, desde el comienzo hasta el final del tiempo (si es que ese mundo tiene un comienzo y un final). Leibniz utiliza esta noción especialmente en su *Teodicea* (1710/1962): Dios, al crear el mundo, contempló todos los mundos posibles y decidió actua-

12. Un buen lugar para comenzar a estudiar la naturaleza de los condicionales es Jackson (1991). La disputa en torno a la naturaleza del condicional es tan antigua como la filosofía misma. En el siglo III A.C., los filósofos megáricos Diodoro de Cronos y su alumno Filón de Megara sostuvieron una disputa pública acerca del condicional que llevó a Calímaco de Cirene a proclamar: "Hasta los cuervos en los tejados graznan acerca de la naturaleza del condicional" (citado por Kneale y Kneale, 1962: 128).

lizar solamente el mejor, que corresponde a nuestro mundo. Como éste es el mejor de todos los mundos posibles, el sufrimiento y el mal que contiene son inevitables.

La noción de mundo posible es interesante desde un punto de vista lógico debido a la forma en que Leibniz la utiliza informalmente para darle sentido a las modalidades aléticas. Según Leibniz,

> $\mathcal{P}$ es necesariamente verdadera si y sólo si $\mathcal{P}$ es verdadera en todos los mundos posibles.
>
> $\mathcal{P}$ es posiblemente verdadera si y sólo si $\mathcal{P}$ es verdadera en al menos un mundo posible.

Estas definiciones hacen que los operadores "□" y "◊" sean análogos al cuantificador universal y existencial de *LC*, respectivamente, cuando el UD es el conjunto de todos los mundos posibles[13]. Los mundos posibles son análogos a las situaciones o circunstancias *lógicamente* posibles que discutimos al comienzo del capítulo.

Para poder introducir una formulación más estricta de la semántica sugerida por Leibniz, debemos introducir la noción de una valuación leibniziana:

> Una ***valuación leibniziana*** es una dupla $\langle W, V\rangle$, donde W es un conjunto no vacío de objetos que entenderemos como mundos posibles, y V es una función que le asigna en cada mundo w_i un valor de verdad **V** o **F** a cada una de las letras proposicionales de la lógica modal proposicional. Escribiremos la valuación de $\mathcal{P}$ en w_i como $\mathcal{V}(\mathcal{P}, w_i)$.

Las reglas de valuación para fórmulas compuestas son las mismas de la lógica proposicional, excepto que están relativizadas a un mundo posible:

$\mathcal{V}(\sim\mathcal{P}, w_i) = \mathbf{V}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}, w_i) = \mathbf{F}$
$\mathcal{V}(\sim\mathcal{P}, w_i) = \mathbf{F}$ en caso contrario.

$\mathcal{V}(\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q}, w_i) = \mathbf{V}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}, w_i) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}(\mathcal{Q}, w_i) = \mathbf{V}$
$\mathcal{V}(\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q}, w_i) = \mathbf{F}$ en caso contrario.

$\mathcal{V}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}, w_i) = \mathbf{V}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}, w_i) = \mathbf{V}$ o $\mathcal{V}(\mathcal{Q}, w_i) = \mathbf{V}$
$\mathcal{V}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}, w_i) = \mathbf{F}$ en caso contrario.

13. Aunque Leibniz no extendió esta definición a los demás operadores modales, la idea de mundos posibles también nos permite construir una semántica para ellos. Los operadores deónticos serían análogos a los cuantificadores cuando el UD es el conjunto de todos los mundos moralmente posibles, los operadores epistémicos lo serían cuando el UD es el conjunto de todos los mundos epistémicamente posibles, y los operadores temporales cuando el UD son los instantes del tiempo.

Cap-10.pmd 347 13/07/07, 03:26 p.m.

$\mathcal{V}(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}, w_i) = \mathbf{V}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}, w_i) = \mathbf{F}$ o $\mathcal{V}(\mathcal{Q}, w_i) = \mathbf{V}$
$\mathcal{V}(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}, w_i) = \mathbf{F}$ en caso contrario.

$\mathcal{V}(\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}, w_i) = \mathbf{V}$ si y sólo si $\mathcal{V}(\mathcal{P}, w_i) = \mathcal{V}(\mathcal{Q}, w_i)$
$\mathcal{V}(\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}, w_i) = \mathbf{F}$ en caso contrario.

Las reglas de valuación para fórmulas modales en el modelo leibniziano son las siguientes:

$\mathcal{V}(\Box\mathcal{P}, w_i) = \mathbf{V}$ si y sólo si para todo $w_i \in W$, $\mathcal{V}(\mathcal{P}, w_i) = \mathbf{V}$
$\mathcal{V}(\Box\mathcal{P}, w_i) = \mathbf{F}$ en caso contrario.

$\mathcal{V}(\Diamond\mathcal{P}, w_i) = \mathbf{V}$ si y sólo si hay al menos un $w_i \in W$ tal que $\mathcal{V}(\mathcal{P}, w_i) = \mathbf{V}$
$\mathcal{V}(\Diamond\mathcal{P}, w_i) = \mathbf{F}$ en caso contrario.

Consideremos un ejemplo de una valuación leibniziana:

(32) Supongamos que sólo existen tres mundos posibles: $W = \{w_1, w_2, w_3\}$. En cada uno de estos mundos son verdaderas las siguientes fórmulas:

w_1: {A, C, L, M, ~N}
w_2: {B, C, ~L, M, ~N}
w_3: {A, B, C, ~N, P}

De acuerdo con las definiciones anteriores y la información proporcionada, podemos concluir que las siguientes fórmulas son verdaderas en w_1:

□C, □~N, ◊A, ◊B, ◊L, ◊~L, ◊M, ◊P

Sólo "C" y "~N" son verdaderas en todos los $w_i \in W$ y por eso son necesariamente verdaderas en w_1. Las demás fórmulas son verdaderas en algún $w_i \in W$ pero no en todos; por eso sólo son posiblemente verdaderas en w_1.

La definición de una tautología en la semántica leibniziana es como sigue:

Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LM* es una ***tautología*** en la semántica leibniziana si y sólo si es verdadera bajo cualquier valuación leibniziana.

Informalmente, lo que dice la definición es que una fórmula es una tautología si y sólo si la formula es verdadera en todos los mundos posibles bajo cualquier valuación de las letras proposicionales que la componen.

Probaremos, por ejemplo, que la siguiente fórmula es una tautología en la semántica leibniziana:

(33) □N ⊃ N

Cap-10.pmd 348 13/07/07, 03:26 p.m.

Prueba: Supongamos que "□N ⊃ N" no es una tautología. En tal caso, $\mathcal{V}$(□N, w_i) = **V** y $\mathcal{V}$(N, w_i) = **F** en algún w_i. Si $\mathcal{V}$(□N, w_i) = **V**, entonces "N" es verdadera en todos los mundos posibles, incluyendo a w_i. Pero esto contradice la suposición inicial. En consecuencia, "□N ⊃ N" es una tautología en la semántica leibniziana.

La siguiente fórmula también es una tautología en la semántica leibniziana:

(34) □N ⊃ □□N

Prueba: Supongamos que "□N ⊃ □□N" no es una tautología. En tal caso, $\mathcal{V}$(□N, w_i) = **V** y $\mathcal{V}$(□□N, w_i) = **F** en algún w_i. Si $\mathcal{V}$(□□N, w_i) = **F**, entonces existe un mundo w_j en el cual $\mathcal{V}$(□N, w_j) = **F**. En tal caso, existe un mundo w_k en el cual $\mathcal{V}$(N, w_k) = **F**. Ahora bien, si $\mathcal{V}$(□N, w_i) = **V** entonces "N" es verdadera en todos los mundos posibles, incluyendo a w_k. Pero esto contradice la suposición inicial. En consecuencia, "□N ⊃ □□N" es una tautología en la semántica leibniziana.

Podríamos definir los demás conceptos semánticos del sistema leibniziano como hemos hecho en capítulos anteriores, pero nos abstendremos de hacerlo. Como veremos en un momento, la semántica leibniziana es insatisfactoria porque no nos permite diferenciar los sistemas de lógica modal caracterizados sintácticamente en la sección anterior.

10.5.2 *Semántica kripkeana*

Aunque la semántica leibniziana es intuitivamente simple, es una lógica demasiado permisiva. Consideremos, por ejemplo, la fórmula **(33)**, que es una tautología en la semántica leibniziana:

(33) □N ⊃ N

La fórmula correspondiente en la lógica deóntica no es aceptable como tautología:

(33a) **O**N ⊃ N

Desafortunadamente no todo lo que es obligatorio es verdadero, es decir, hay mundos posibles en donde lo que es obligatorio no se cumple. Para poder reflejar la estructura del razonamiento ético, la lógica deóntica requiere un sistema que contenga restricciones que impidan que la fórmula **(33a**) sea una tautología.

Algo similar ocurre con la fórmula **(34)**:

(34) □N ⊃ □□N

Aunque la fórmula es una tautología en la semántica leibniziana, muchos filósofos sostienen que su equivalente en la lógica epistémica es inaceptable:

(34a) **K**aP ⊃ **K**a**K**aP

Esta fórmula, generalmente conocida como el principio KK, afirma que si alguien sabe que $\mathcal{P}$, no se sigue que sepa que sabe que $\mathcal{P}$. Naturalmente la aceptabilidad del principio depende de qué entendamos por conocimiento. Las teorías externalistas del conocimiento, por ejemplo, generalmente rechazan el principio KK[14].

Para poder limitar el tipo de fórmulas que queremos aceptar como tautologías en la lógica modal, debemos introducir ciertas restricciones formales. En la semántica de Leibniz, la pluralidad de los mundos es contemplada desde la perspectiva de un ser omnisciente que tiene acceso a todos los mundos lógicamente posibles. Esa característica hace que sea una semántica apropiada para la necesidad lógica. Pero cuando nos ocupamos de otros tipos de necesidad, no todos los mundos son posibles desde la perspectiva de cualquier mundo. Un mundo donde se violan las leyes de la naturaleza no es físicamente posible desde la perspectiva de nuestro mundo. Un mundo en el cual son verdaderos enunciados incompatibles con mi conocimiento es epistémicamente imposible desde el punto de vista de mi mundo posible. En general, hay mundos que son imposibles desde la perspectiva de un mundo, pero que son posibles desde la perspectiva de otro, dependiendo del tipo de necesidad y posibilidad que estemos utilizando.

La semántica de Kripke crea un lugar para el perspectivismo. Cuando un mundo es posible desde la perspectiva de otro, decimos que el primero es *accesible* desde el segundo. A través de la relación de accesibilidad podemos imponer límites a las fórmulas que queremos aceptar como tautologías. Comenzaremos definiendo una valuación kripkeana:

> Una ***valuación kripkeana*** de la lógica modal es una tripla $\langle W, R, V\rangle$. W es un conjunto no vacío de objetos, que entenderemos como mundos posibles. R es una relación binaria en W. Si u y v son mundos en W, entonces R puede o no relacionarlos. Si lo hace, escribiremos uRv y diremos que v es *accesible* desde u. V es una función que le asigna en cada mundo w_i un valor de verdad **V** o **F** a cada una de las letras proposicionales de la lógica modal proposicional. Escribiremos la valuación de $\mathcal{P}$ en w_i como $\mathcal{V}(\mathcal{P}, w_i)$.

En el caso del modelo kripkeano, las reglas de valuación de las fórmulas modales deben incluir la relación de accesibilidad:

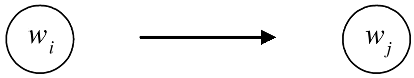
$\mathcal{V}(\Box\mathcal{P}, w_i) = \mathbf{V}$ si y sólo si para todo $w_j \in W$ tal que w_iRw_j, $\mathcal{V}(\mathcal{P}, w_j) = \mathbf{V}$
$\mathcal{V}(\Box\mathcal{P}, w_i) = \mathbf{F}$ en caso contrario.

14. Para una discusión reciente del problema, *véase* Kornblith (2001) o BonJour & Sosa (2003).

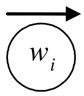
Cap-10.pmd 350 13/07/07, 03:26 p.m.

$\mathcal{V}(\Diamond\mathcal{P}, w_i) = \mathbf{V}$ si y sólo si hay al menos un $w_j \in W$ tal que $w_i R w_j$, $\mathcal{V}(\mathcal{P}, w_j) = \mathbf{V}$
$\mathcal{V}(\Diamond\mathcal{P}, w_i) = \mathbf{F}$ en caso contrario.

Podemos representar gráficamente cada mundo en W con un círculo y la relación de accesibilidad con una flecha. El siguiente gráfico representa la relación de accesibilidad $w_i R w_j$.



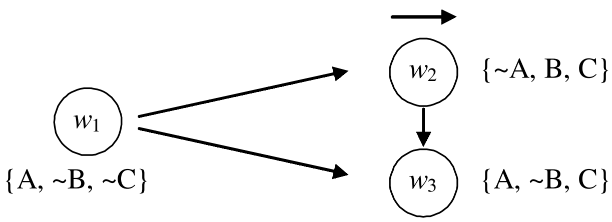
Cuando un mundo es accesible a sí mismo, es decir, cuando $w_i R w_i$, dibujaremos una flecha encima de ese mundo de la siguiente manera:



Consideremos un ejemplo de un fragmento de una valuación kripkeana. Se trata sólo de un fragmento porque una valuación le asigna un valor de verdad en cada mundo a cada una de las letras proposicionales de la lógica modal proposicional.

(35) $W = \{w_1, w_2, w_3\}$
$R = \{w_1 R w_2,\ w_1 R w_3,\ w_2 R w_2,\ w_2 R w_3\}$.
w_1: {A, ~B, ~C}
w_2: {~A, B, C}
w_3: {A, ~B, C}

Gráficamente, podemos representar la situación de la siguiente manera:



Con la información provista podemos afirmar que las siguientes fórmulas son verdaderas en cada uno de los mundos:

w_1: {◊A, ◊~A, ◊B, ◊~B, □C}
w_2: {◊A, ◊~A, ◊B, ◊~B, □C}
w_3: {□A, ~◊A, □B, ~◊B, □C, ~◊C}

Cap-10.pmd 351 13/07/07, 03:26 p.m.

Consideremos la situación en cada uno de los mundos. En w_1 sólo "C" es necesariamente cierta porque es la única fórmula que es verdadera en todos los mundos accesibles desde w_1. Lo interesante de este caso es que "C" es necesariamente cierta en w_1 a pesar de ser falsa en ese mundo. Este resultado revela claramente la diferencia entre el modelo leibniziano y el kripkeano. En este último pueden ocurrir estas situaciones cuando un mundo no tiene acceso a sí mismo. Si w_1 tuviera acceso a sí mismo, sería imposible que "□C" y "~C" fueran ambas verdaderas en ese mundo porque "C" no sería verdadera en todos los mundos accesibles desde w_1, como lo exigen las reglas de valuación. Por otra parte, las demás fórmulas son verdaderas en algún mundo accesible desde w_1, pero no son verdaderas en todos los mundos accesibles desde w_1; por eso sólo son posiblemente ciertas.

En w_2 son verdaderas las mismas fórmulas modales que en w_1 porque, a pesar de las apariencias, ambos mundos tienen acceso a exactamente los mismos mundos posibles.

Finalmente, la situación menos clara ocurre en w_3, un mundo que no tiene acceso a ningún otro mundo. Cuando consideramos un mundo w_i desde el cual no hay acceso a otros mundos posibles, cualquier proposición de la forma $\Diamond\mathcal{P}$ será falsa en ese mundo y cualquier proposición de la forma $\Box\mathcal{P}$ será verdadera en ese mundo. La razón es la siguiente. Para que $\Diamond\mathcal{P}$ sea verdadera en w_i, debe haber al menos un mundo accesible desde w_i donde $\mathcal{P}$ sea verdadera. Como no existe tal mundo, $\Diamond\mathcal{P}$ es falsa en w_i. En el caso de $\Box\mathcal{P}$, si $\mathcal{P}$ es verdadera en todos los mundos posibles accesibles desde w_i, $\Box\mathcal{P}$ será verdadera en w_i. Como no hay ningún mundo accesible desde w_i, $\Box\mathcal{P}$ es trivialmente verdadera. Recordemos que la definición del operador de necesidad es un enunciado universal en el que cuantificamos sobre mundos posibles, y un enunciado universal es trivialmente verdadero cuando el antecedente es falso, es decir, cuando no existen mundos posibles accesibles desde w_i.

Podemos definir una tautología en la semántica kripkeana de manera análoga a como lo hicimos en la semántica leibniziana:

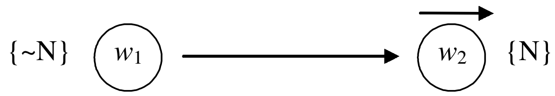
Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LM* es una ***tautología*** en la semántica kripkeana si y sólo si es verdadera bajo cualquier valuación kripkeana.

A partir de esta definición es relativamente sencillo demostrar que la fórmula **(33)** no es una tautología en la semántica kripkeana.

(33) $\Box N \supset N$

Basta encontrar una valuación bajo la cual la fórmula sea falsa. El siguiente fragmento de una valuación demuestra que la fórmula no es una tautología en la semántica kripkeana:

$W = \{w_1, w_2\}$
$R = \{w_1Rw_2, w_2Rw_2\}$
w_1: $\{\sim N\}$
w_2: $\{N\}$

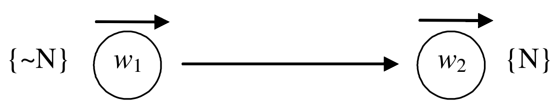


Con la información proporcionada podemos concluir que $\mathcal{V}(\Box N, w_1) = \mathbf{V}$ porque "N" es verdadera en todos los mundos accesibles desde w_1. Pero como $\mathcal{V}(\sim N, w_1) = \mathbf{V}$, se sigue que $\mathcal{V}(N, w_1) = \mathbf{F}$. Pero en tal caso, $\mathcal{V}(\Box N \supset N, w_1) = \mathbf{F}$. Como existe al menos una valuación bajo la cual "$\Box N \supset N$" es falsa, la fórmula no es una tautología en la semántica kripkeana.

Aunque este resultado es bienvenido en la lógica deóntica, pues el equivalente deóntico de la fórmula **(33)** es inaceptable, el resultado es preocupante en la lógica alética. Como todas las tautologías de *LP* son necesariamente verdaderas, si la fórmula **(33)** admite excepciones, ¡habrá mundos posibles en los que las tautologías no son verdaderas!

El problema surge porque, a pesar de que los diferentes sistemas de lógica modal están determinados sintácticamente por axiomas diferentes, la definición de tautología en la semántica kripkeana no discrimina entre ellos. La solución reside en relativizar la noción de tautología a cada uno de los sistemas. Una tautología de la lógica deóntica no tiene por qué ser una tautología de la lógica alética porque, a pesar de que ambas son lógicas modales, el tipo de modalidad del que se ocupan es diferente. La pregunta es, ¿cómo utilizar la semántica kripkeana para delimitar los diferentes sistemas modales?

Consideremos una vez más la fórmula **(33)**. Para garantizar que la fórmula sea una tautología, la lógica alética impone una condición sobre la relación de accesibilidad: ésta debe ser reflexiva, es decir, todos los mundos deben ser accesibles a sí mismos. Si requerimos que la relación sea reflexiva, es imposible construir el contraejemplo anterior:



Bajo esta valuación, "$\Box$N" no es verdadera en w_1 porque existe un mundo accesible desde w_1 donde "N" no es verdadera, a saber, w_1 mismo. En el capítulo siguiente probaremos que esta fórmula es una tautología en cualquier sistema cuya relación de accesibilidad sea reflexiva.

Cap-10.pmd 353 13/07/07, 03:26 p.m.

Imponiendo ésta y otras restricciones sobre la relación de accesibilidad podemos generar todos los sistemas de lógica modal descritos en la sección anterior:

Lógica	**Condiciones sobre *R***	**Axioma característico**
K	Sin condiciones	$\Box(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}) \supset (\Box\mathcal{P} \supset \Box\mathcal{Q})$
D	Serial	$\Box\mathcal{P} \supset \Diamond\mathcal{P}$
T	Reflexiva	$\Box\mathcal{P} \supset \mathcal{P}$
KB	Simétrica	$\mathcal{P} \supset \Box\Diamond\mathcal{P}$
B	Reflexiva y simétrica	
K4	Transitiva	$\Box\mathcal{P} \supset \Box\Box\mathcal{P}$
S4	Reflexiva y transitiva	
S5	Reflexiva, simétrica y transitiva	$\Diamond\mathcal{P} \supset \Box\Diamond\mathcal{P}$

En el siguiente capítulo, en donde desarrollemos un método semántico de prueba para la lógica modal proposicional, estudiaremos en detalle todas estas restricciones sobre la relación de accesibilidad.

Terminaremos el capítulo estudiando los conceptos semánticos generados por las valuaciones kripkeanas de la lógica modal. Las definiciones, como acabamos de ver, deben ser relativizadas a un sistema, el cual está delimitado por las condiciones impuestas sobre la relación de accesibilidad. Por ejemplo, la definición de tautología en el sistema T sería como sigue:

> Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LM* es una ***tautología*** en el sistema T de lógica modal si y sólo si es verdadera bajo cualquier valuación kripkeana cuya relación de accesibilidad sea reflexiva.

Completaremos las demás definiciones semánticas para el sistema T. Las definiciones para los demás sistemas modales simplemente reemplazan la restricción de reflexividad por la restricción que define a ese sistema.

Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LM* es una ***contradicción*** en el sistema T de lógica modal si y sólo si es falsa bajo cualquier valuación kripkeana cuya relación de accesibilidad sea reflexiva.

Una fórmula $\mathcal{P}$ de *LM* es ***semánticamente indeterminada*** en el sistema T de lógica modal si y sólo si no es ni una tautología ni una contradicción en T.

Dos fórmulas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ de *LM* son ***semánticamente equivalentes*** en el sistema T de lógica modal si y sólo si no hay ninguna valuación kripkeana cuya relación de accesibilidad sea reflexiva bajo la cual tengan valores de verdad diferentes.

Un conjunto de fórmulas de *LM* es ***semánticamente consistente*** en el sistema T de lógica modal si y sólo si hay al menos una valuación kripkeana cuya relación de accesibilidad sea reflexiva bajo la cual todos los elementos del conjunto sean verdaderos.

Un argumento de *LM* es ***semánticamente válido*** en el sistema T de lógica modal si y sólo si no hay ninguna valuación kripkeana cuya relación de accesibilidad sea reflexiva bajo la cual todas las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. Un argumento de *LM* es ***semánticamente inválido*** en el sistema T si y sólo si no es válido en el sistema T.

Un conjunto finito Γ de fórmulas de *LM* ***implica semánticamente*** una fórmula $\mathcal{P}$ en el sistema T si y sólo si no hay ninguna valuación kripkeana cuya relación de accesibilidad sea reflexiva bajo la cual todos los miembros de Γ sean verdaderos y $\mathcal{P}$ sea falsa.

Cap-10.pmd 355 13/07/07, 03:26 p.m.

11. Árboles de verdad modales

En el capítulo anterior estudiamos algunos de los sistemas de lógica modal más importantes. En este capítulo utilizaremos el método de los árboles de verdad para construir pruebas de las propiedades semánticas de fórmulas, conjuntos y argumentos en cada uno de estos sistemas modales. Comencemos por recordar las características esenciales del método de los árboles de verdad. Los árboles de verdad son un algoritmo o procedimiento mecánico de decisión. El método es utilizado para probar la consistencia semántica de un conjunto de fórmulas. Como es posible definir todas las propiedades semánticas de fórmulas y argumentos en términos de la consistencia semántica de un conjunto, el método también permite probar las demás propiedades semánticas.

11.1 Reglas para el sistema K

Inicialmente estudiaremos las reglas de descomposición de la lógica modal más simple de todas, el sistema K, y posteriormente iremos agregando las reglas características de los demás sistemas. En lo que sigue haremos uso de todas las reglas de descomposición introducidas en el capítulo 4, con la salvedad de que ahora se aplican a fórmulas de *LM*.

La primera regla nos permite descomponer la negación de una fórmula modal en su fórmula dual:

*Dualidad (*D*)*

$$\begin{array}{ccc} {\sim}\Box\mathcal{P},\ i\ \checkmark & \qquad\qquad & {\sim}\Diamond\mathcal{P},\ i\ \checkmark \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Diamond{\sim}\mathcal{P},\ i & & \Box{\sim}\mathcal{P},\ i \end{array}$$

Esta regla es de gran utilidad porque muchas de las reglas de descomposición de los árboles de verdad modales se aplican a fórmulas cuyo operador lógico principal es un

Cap-11.pmd 356 13/07/07, 03:30 p.m.

operador modal. Nótese que cada fórmula va seguida de un número *i*. Este número representa el mundo en el que la fórmula es verdadera. El mundo de partida siempre es el mundo 0.

La siguiente regla utiliza la relación de accesibilidad para extraer una consecuencia de una fórmula necesaria.

Descomposición del operador de necesidad (□)

$$\begin{array}{c} \Box\mathcal{P},\ i \\ iRj \\ \downarrow \\ \mathcal{P},\ j \end{array}$$

La regla dice que si $\mathcal{P}$ es necesaria en el mundo *i*, y el mundo *j* es accesible desde el mundo *i*, entonces $\mathcal{P}$ es verdadera en el mundo *j*. La fórmula necesaria nunca se marca como descompuesta porque si se descubre que hay otros mundos además de *j* que son accesibles desde *i*, podemos utilizar la regla de nuevo para afirmar que $\mathcal{P}$ es verdadera en esos mundos.

La siguiente regla nos permite extraer una consecuencia de la posibilidad de $\mathcal{P}$ en un mundo *i*.

Descomposición del operador de posibilidad (◊)

$$\begin{array}{c} \Diamond\mathcal{P},\ i\ \checkmark \\ \downarrow \\ iRj \\ \mathcal{P},\ j \end{array}$$

(*j* debe ser nuevo en la rama)

La regla dice que si $\mathcal{P}$ es posible en un mundo *i*, se puede concluir que existe un mundo *j* accesible desde *i* en el cual $\mathcal{P}$ es verdadera. La regla sólo puede ser usada una vez, y el mundo cuya existencia se postula debe ser arbitrario, es decir, no debemos tener información sobre él. Por esa razón el mundo *j* debe ser un mundo nuevo en la rama donde se aplique la regla.

La siguiente regla de descomposición refleja la definición del condicional estricto propuesto por C. I. Lewis.

Descomposición de la implicación estricta (⇒)

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \checkmark$$
$$\downarrow$$
$$\Box(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q})$$

Finalmente, introduciremos una regla para eliminar la negación de la implicación estricta:

Descomposición de la negación de la implicación estricta (~⇒)

$$\sim(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \checkmark$$
$$\downarrow$$
$$\sim\Box(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q})$$

Consideremos los siguientes ejemplos de aplicación de las reglas del sistema K. Inicialmente probaremos que el siguiente argumento es semánticamente válido en K:

(1) $$\frac{A \Rightarrow B}{\Diamond A \supset \Diamond B}$$

Inicialmente creamos el conjunto {A ⇒ B, ~(◊A ⊃ ◊B)}, es decir, el conjunto que contiene la premisa y la negación de la conclusión, y comenzamos a construir un árbol de verdad para este conjunto. El punto de partida es el mundo 0:

1	A ⇒ B, 0 ✓	MC
2	~(◊A ⊃ ◊B), 0 ✓	MC
3	□(A ⊃ B), 0	1 (⇒)
4	◊A, 0 ✓	2 (~⊃)
5	~◊B, 0	2 (~⊃)
6	0*R*1	4 (◊)
7	A, 1	4 (◊)

En las líneas 3, 6 y 7 encontramos las nuevas reglas. En la línea 3 transformamos la implicación estricta en una fórmula cuyo operador lógico principal es el operador de necesidad. En las líneas 6 y 7 descomponemos la fórmula de la línea 4 utilizando la

Cap-11.pmd 358 13/07/07, 03:30 p.m.

regla para la descomposición del operador de posibilidad (◊). Si “A” es posible en el mundo 0, entonces existe un mundo 1, accesible desde 0, donde “A” es verdadera.

Una vez establecida la relación de accesibilidad de 0 a 1, la regla para la descomposición del operador de necesidad (□) nos permite afirmar en el mundo 1 todas las fórmulas necesarias en el mundo 0; así, podemos afirmar “A ⊃ B” en el mundo 1. La línea 3 no se marca como descompuesta porque si llegáramos a establecer una relación de accesibilidad entre el mundo 0 y otro mundo, podríamos volver a utilizar esta fórmula. También podemos transformar la fórmula “~◊B” de la línea 5 en “□~B” utilizando la regla de dualidad (D). Esto nos permitirá afirmar “~B” en el mundo 1.

1	A ⇒ B, 0 ✓	MC
2	~(◊A ⊃ ◊B), 0 ✓	MC
3	□(A ⊃ B), 0	1 (⇒)
4	◊A, 0 ✓	2 (~⊃)
5	~◊B, 0 ✓	2 (~⊃)
6	0*R*1	4 (◊)
7	A, 1	4 (◊)
8	A ⊃ B, 1	3, 6 (□)
9	□~B, 0	5 (D)
10	~B, 1	6, 9 (□)

Para continuar con el árbol nos vemos obligados a ramificarlo, pero las dos ramas se cierran inmediatamente:

1	A ⇒ B, 0 ✓		MC
2	~(◊A ⊃ ◊B), 0 ✓		MC
3	□(A ⊃ B), 0		1 (⇒)
4	◊A, 0 ✓		2 (~⊃)
5	~◊B, 0 ✓		2 (~⊃)
6	0*R*1		4 (◊)
7	A, 1		4 (◊)
8	A ⊃ B, 1 ✓		3, 6 (□)
9	□~B, 0		5 (D)
10	~B, 1		6, 9 (□)
11	~A, 1	B, 1	8 (⊃)
	×	×	

Cap-11.pmd 359 13/07/07, 03:30 p.m.

El árbol cerrado prueba que el conjunto $\{A \Rightarrow B, \sim(\Diamond A \supset \Diamond B)\}$ es semánticamente inconsistente; por lo tanto, el argumento **(1)** es semánticamente válido en el sistema K de lógica modal.

Consideremos ahora el siguiente argumento:

(2) $$\frac{\Box(A \supset B) \ \& \ \Box(B \supset C)}{\Box(A \supset C)}$$

1	$\Box(A \supset B) \ \& \ \Box(B \supset C), 0$ ✓			MC
2	$\sim\Box(A \supset C), 0$ ✓			MC
3	$\Box(A \supset B), 0$			1 (&)
4	$\Box(B \supset C), 0$			1 (&)
5	$\Diamond\sim(A \supset C), 0$ ✓			2 (D)
6	$0R1$			5 ($\Diamond$)
7	$\sim(A \supset C), 1$ ✓			5 ($\Diamond$)
8	$A, 1$			7 ($\sim\supset$)
9	$\sim C, 1$			7 ($\sim\supset$)
10	$A \supset B, 1$ ✓			3, 6 ($\Box$)
11	$B \supset C, 1$ ✓			4, 6 ($\Box$)
12	$\sim A, 1$ ×	$B, 1$		10 ($\supset$E)
13		$\sim B, 1$ ×	$C, 1$ ×	11 ($\supset$E)

En las líneas 6 y 7 se introduce un mundo nuevo, el mundo 1, a partir de la fórmula de la línea 5. Esto nos permite afirmar en el mundo 1 las fórmulas necesarias del mundo 0, es decir, "$A \supset B$" y "$B \supset C$". La descomposición de estas fórmulas en el mundo 1 nos lleva a contradicciones que cierran todas las ramas. De este modo se demuestra que el argumento original es semánticamente válido en K.

Consideremos un tercer argumento.

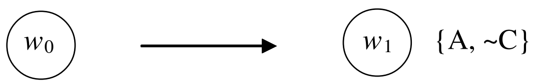
(3) $$\frac{\Box A \ \& \ \Box\sim C}{\Box(A \supset C)}$$

Cap-11.pmd 360 13/07/07, 03:30 p.m.

1	□A & □~C, 0 ✓	MC
2	~□(A ⊃ C), 0 ✓	MC
3	□A, 0	1 (&)
4	□~C, 0	1 (&)
5	◊~(A ⊃ C), 0 ✓	2 (D)
6	0*R*1	5 (◊)
7	~(A ⊃ C), 1 ✓	5 (◊)
8	A, 1	7 (~⊃)
9	~C, 1	7 (~⊃)
10	A, 1	3, 6 (□)
11	~C, 1	4, 6 (□)

El árbol está terminado porque sólo contiene letras proposicionales, sus negaciones y fórmulas necesarias que no pueden ser descompuestas. Como el árbol es un árbol abierto, el conjunto {□A & □~C, ~□(A ⊃ C)} es consistente, y el argumento **(3)** es semánticamente inválido en el sistema K.

Cuando el árbol correspondiente a un argumento no se cierra, es posible utilizar la información en cualquier rama abierta completa para construir una valuación bajo la cual el argumento es inválido. El árbol anterior nos indica que hay dos mundos, w_0 y w_1, tales que w_0Rw_1, y que $\mathcal{V}$(A, w_1) = **V** y $\mathcal{V}$(C, w_1) = **F**. Gráficamente, podemos representar la valuación de la siguiente manera:



Como w_1 es el único mundo accesible desde w_0, entonces en w_0 es cierto que "□A" y que "□~C", y por tanto, que "□A & □~C". Sin embargo, en w_0 no puede ser cierto que "□(A ⊃ C)", puesto que "A ⊃ C" no puede ser cierto en w_1. Por lo tanto, la premisa del argumento es verdadera y la conclusión es falsa en al menos una valuación.

Finalmente, usaremos el método de los árboles de verdad para demostrar que la siguiente fórmula no es una tautología en K:

(4) □A ⊃ A

Construiremos un árbol de verdad para el conjunto {~(□A ⊃ A)}:

1	~(□A ⊃ A), 0 ✓	MC
2	□A, 0	1 (~⊃)
3	~A, 0	1 (~⊃)

Cap-11.pmd 361 13/07/07, 03:30 p.m.

Es imposible continuar el árbol porque no sabemos si desde el mundo w_0 podemos acceder a otros mundos posibles. El árbol está terminado y es un árbol abierto. En consecuencia, el conjunto $\{\sim(\Box A \supset A)\}$ es semánticamente consistente y la fórmula no es una tautología. Para construir una valuación bajo la cual la fórmula sea falsa sólo necesitamos un mundo posible w_0 en el que la fórmula "$\sim$A" sea verdadera:

$$w_0 \quad \{\sim A\}$$

No hace falta indicar en el gráfico que la proposición "$\Box$A" es verdadera en w_0. Recordemos que cuando consideramos un mundo w_i desde el cual no hay acceso a otros mundos posibles, cualquier proposición de la forma $\Diamond\mathcal{P}$ es falsa en ese mundo y cualquier proposición de la forma $\Box\mathcal{P}$ es verdadera en ese mundo[1]. Como tanto "$\Box$A" como "$\sim$A" son verdaderas en w_0, la fórmula "$\Box A \supset A$" es falsa en w_0. Y como la fórmula es falsa en al menos una valuación, no es una tautología en K.

Ejercicio 11.1

A. Use el método de los árboles de verdad para determinar si los siguientes argumentos son semánticamente válidos en el sistema K. Si el árbol no se cierra, construya una valuación en la que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.

1.	$\Box A$	2.	$\Diamond A$	3.	$\Box A$	4.	$\Box A$
	$\Diamond B$		$\Diamond B$		$\Box B$		$\Box B$
	$\Diamond(A \,\&\, B)$		$\Diamond(A \,\&\, B)$		$\Diamond(A \,\&\, B)$		$\Box(A \,\&\, B)$

B. Use el método de los árboles de verdad para determinar si las siguientes fórmulas son tautologías en K. Si el árbol no se cierra, construya una valuación en la que la fórmula sea falsa.

1.	$(\Box A \vee \Box B) \supset \Box(A \vee B)$	2.	$\Box G \equiv \sim\Diamond\sim G$
3.	$\Box(A \vee B) \supset (\Box A \vee \Box B)$	4.	$\sim\Box\sim B \equiv \Diamond B$
5.	$\Box L \supset \Diamond L$	6.	$\Diamond(A \vee B) \supset (\Diamond A \vee \Diamond B)$
7.	$\Diamond(A \,\&\, B) \supset \Diamond A \,\&\, \Diamond B$	8.	$\Box S \supset \Box\Box S$
9.	$\Box P \equiv (\sim P \Rightarrow P)$	10.	$\Diamond T \supset \Diamond\Diamond T$
11.	$(\Box\sim B \,\&\, T) \supset \sim\Diamond B$	12.	$(A \Rightarrow B) \supset (\sim B \Rightarrow \sim A)$

1. *Véase* sección 10.5.2.

Cap-11.pmd 362 13/07/07, 03:30 p.m.

11.2 Extensiones simples de K

En esta sección estudiaremos aquellos sistemas lógicos que resultan de imponer una sola restricción sobre la relación de accesibilidad de la semántica kripkeana.

11.2.1 *El sistema T*

La primera extensión del sistema K que consideraremos es el sistema T. El sistema es el resultado de añadir la condición de *reflexividad* a la relación de accesibilidad del sistema K. La condición establece que todo mundo posible que haya sido mencionado es accesible a sí mismo. El mundo puede haber sido mencionado al afirmar que una fórmula es verdadera en ese mundo o al establecer una relación de accesibilidad hacia ese mundo. La siguiente regla resume estas dos posibilidades:

Reflexividad (R)

$$\mathcal{P}, i \text{ o } jRi$$
$$\downarrow$$
$$i\mathrm{R}i$$

Al justificar el uso de esta regla debemos mencionar la línea en la que es mencionado por primera vez ese mundo posible.

Probaremos que la fórmula **(4)**, que en la sección anterior resultó no ser una tautología del sistema K de lógica modal, sí es una tautología del sistema T:

(4) $\Box A \supset A$

Para tal fin, construimos un árbol de verdad para el conjunto $\{\sim(\Box A \supset A)\}$:

1	$\sim(\Box A \supset A), 0$ ✓	MC
2	$\Box A, 0$	1 ($\sim\supset$)
3	$\sim A, 0$	1 ($\sim\supset$)
4	$0R0$	1 (R)
5	$A, 0$	2, 4 ($\Box$)
	×	

Sin la regla (R) el árbol no se cerraría pues no habría forma de descomponer la línea 2. La fórmula **(4)** es el axioma característico del sistema T.

Cap-11.pmd 363 13/07/07, 03:30 p.m.

Ahora usaremos el método de los árboles de verdad para probar que el siguiente argumento es válido en el sistema T:

(5) □C & D
(◊C & D) ⊃ S
―――――――――
~□~S

Para tal fin, construimos el conjunto {□C & D, (◊C & D) ⊃ S, ~~□~S} y determinamos su consistencia:

1	□C & D, 0 ✓		MC
2	(◊C & D) ⊃ S, 0 ✓		MC
3	~~□~S, 0 ✓		MC
4	□~S, 0		3 (~~)
5	0R0		1 (R)
6	~S, 0		4, 5 (□)
7	□C, 0		1 (&)
8	D, 0		1 (&)
9	C, 0		5, 7 (□)
10	~(◊C & D), 0 ✓	S, 0	2 (⊃)
		×	
11	~◊C, 0 ✓ / ~D, 0		10 (~&)
12	□~C, 0 / ×		11 (D)
13	~C, 0		5, 12 (□)
	×		

El árbol es cerrado; por lo tanto, el argumento es semánticamente válido en el sistema T.

11.2.2 *El sistema KB*

El siguiente sistema que estudiaremos es el que resulta de añadir la condición de *simetría* a la relación de accesibilidad del sistema K. El sistema resultante es conocido como KB. La condición de simetría establece que si un mundo w_i es accesible desde un mundo w_j, entonces w_j es accesible desde w_i. La siguiente regla resume esta condición:

Simetría (S)

$$\begin{array}{c} iRj \\ \downarrow \\ jRi \end{array}$$

Cap-11.pmd 364 13/07/07, 03:30 p.m.

Al utilizar la regla debemos indicar la línea de la cual partimos para establecer la simetría. Representaremos la relación de simetría gráficamente utilizando la siguiente convención:

$$w_i \longleftrightarrow w_j$$

Probaremos que la siguiente fórmula es una tautología del sistema KB:

(6) A ⊃ □◊A

1	~(A ⊃ □◊A), 0 ✓	MC
2	A, 0	1 (~⊃)
3	~□◊A, 0 ✓	1 (~⊃)
4	◊~◊A,0 ✓	3 (D)
5	0*R*1	4 (◊)
6	~◊A, 1 ✓	4 (◊)
7	□~A, 1	6 (D)
8	1*R*0	5 (S)
9	~A, 0	7, 8 (□)
	×	

Sin la condición de simetría (S), y utilizando sólo las reglas del sistema K, habría sido imposible cerrar el árbol. La fórmula **(6)** es el axioma característico del sistema KB.

Probaremos que el siguiente argumento es semánticamente válido en KB:

(7) A
B
―――――――
□◊(A & B)

Para tal fin, construimos el conjunto {A, B, ~□◊(A & B)} y determinamos su consistencia:

1	A, 0		MC
2	B, 0		MC
3	~□◊(A & B), 0 ✓		MC
4	◊~◊(A & B), 0 ✓		3 (D)
5	0*R*1		4 (◊)
6	~◊(A & B), 1 ✓		4 (◊)
7	□~(A & B), 1		6 (D)
8	1*R*0		5 (S)
9	~(A & B), 0 ✓		7, 8 (□)
10	~A, 0	~B, 0	9 (~&)
	×	×	

Cap-11.pmd 365 13/07/07, 03:30 p.m.

El árbol cerrado prueba la validez semántica del argumento. Sin la regla (S) habría sido imposible cerrar el árbol.

11.2.3 *El sistema K4*

Continuaremos nuestro estudio con el sistema K4, que resulta de añadir la condición de *transitividad* a la relación de accesibilidad del sistema K. La condición establece que si un mundo w_j es accesible desde un mundo w_i (w_iRw_j), y un mundo w_k es accesible desde w_j (w_jRw_k), entonces w_k es accesible desde w_i (w_iRw_k) La siguiente regla resume esta condición:

Transitividad (T)

$$\begin{array}{c} iRj \\ jRk \\ \downarrow \\ iRk \end{array}$$

Al justificar el uso de esta regla debemos mencionar las líneas en las que se establecen las relaciones de accesibilidad previas.

Probaremos que la siguiente fórmula es una tautología del sistema K4:

(8) □A ⊃ □□A

1	~(□A ⊃ □□A), 0 ✓	MC
2	□A, 0	1 (~⊃)
3	~□□A, 0 ✓	1 (~⊃)
4	◊~□A, 0 ✓	3 (D)
5	0*R*1	4 (◊)
6	~□A, 1 ✓	4 (◊)
7	◊~A, 1 ✓	6 (D)
8	1*R*2	7 (◊)
9	~A, 2	7 (◊)
10	0*R*2	5, 8 (T)
11	A, 2	2, 10 (□)
	×	

Sin la condición de transitividad (T) utilizada en el paso 10 habría sido imposible cerrar el árbol en K. La implicación en la dirección opuesta no se cumple en K4, como lo demuestra el siguiente árbol de verdad:

(9) $\Box\Box A \supset \Box A$

1	$\sim(\Box\Box A \supset \Box A)$, 0 ✓	MC
2	$\Box\Box A$, 0	1 ($\sim\supset$)
3	$\sim\Box A$, 0 ✓	1 ($\sim\supset$)
4	$\Diamond\sim A$, 0 ✓	3 (D)
5	$0R1$	4 ($\Diamond$)
6	$\sim A$, 1	4 ($\Diamond$)
7	$\Box A$, 1	2, 5 ($\Box$)

El árbol está terminado y es un árbol abierto, lo cual prueba que la fórmula no es una tautología en K4. Si el sistema tuviera la regla de reflexividad, sería una tautología. Los pasos faltantes serían:

8	$1R1$	(R)
9	A, 1	7, 8 ($\Box$)
	×	

En otras palabras, para que la fórmula:

(10) $\Box A \equiv \Box\Box A$

sea una tautología, el sistema debe ser tanto transitivo como reflexivo. Como veremos más adelante en este capítulo, el sistema S4 cumple con esas condiciones.

11.2.4 *El sistema D*

La última extensión simple de K que consideraremos es el sistema D, que resulta de añadir la condición de *extensibilidad* o *serialidad* a la relación de accesibilidad de K. La condición establece que desde todo mundo posible que haya sido mencionado, siempre es posible acceder a otro mundo posible. La regla que resume esta condición es la siguiente:

Extensibilidad o Serialidad (E)

$$\mathcal{P}, i \;\text{ o }\; jRi$$
$$\downarrow$$
$$iRk$$

(*k* debe ser nuevo en la rama)

Al justificar el uso de esta regla debemos mencionar la línea en la que es mencionado por primera vez el mundo posible desde el cual accedemos al mundo nuevo. La aplicación de esta regla debe hacerse con mucho cuidado pues fácilmente puede generar

Cap-11.pmd 367 28/08/07, 02:58 p.m.

un árbol de verdad infinito. La razón es muy sencilla: si partimos de un mundo w_i, la regla nos permite introducir un mundo w_j, el cual, a su vez, nos permite introducir un mundo w_k, y así *ad infinitum*. Por eso la regla no debe usarse inmediatamente, impidiendo la aplicación de otras reglas.

A continuación demostraremos que la siguiente fórmula es una tautología en D:

(11) $\Box A \supset \Diamond A$

1	$\sim(\Box A \supset \Diamond A), 0$ ✓	MC
2	$\Box A, 0$	1 ($\sim\supset$)
3	$\sim\Diamond A, 0$ ✓	1 ($\sim\supset$)
4	$\Box\sim A, 0$	3 (D)
5	$0R1$	1 (E)
6	$\sim A, 1$	4, 5 ($\Box$)
7	$A, 1$	2, 5 ($\Box$)
	×	

Sin la condición de serialidad (E) habría sido imposible cerrar el árbol en K. La fórmula **(11)** es el axioma característico de la lógica modal D. Como vimos en el capítulo anterior, el axioma refleja la idea de que cualquier acción moralmente obligatoria debe ser moralmente posible.

Finalmente, probaremos que la siguiente fórmula no es una tautología en D:

(12) $\Diamond C \supset \Box\Diamond C$

1	$\sim(\Diamond C \supset \Box\Diamond C), 0$ ✓	MC
2	$\Diamond C, 0$ ✓	1 ($\sim\supset$)
3	$\sim\Box\Diamond C, 0$ ✓	1 ($\sim\supset$)
4	$\Diamond\sim\Diamond C, 0$ ✓	3 (D)
5	$0R1$	4 ($\Diamond$)
6	$\sim\Diamond C, 1$ ✓	4 ($\Diamond$)
7	$\Box\sim C, 1$	6 (D)
8	0R2	2 ($\Diamond$)
9	C, 2	2 ($\Diamond$)
10	1R3	5 (S)
11	~C, 3	7, 10 ($\Box$)
12	3R4	10 (E)
13	2R5	8 (E)
	...	

El árbol podría continuar *ad infinitum* si aplicáramos indefinidamente la regla de serialidad. Esa posibilidad está representada por los tres puntos al final del árbol. Sin embargo, no importa cuán largo sea el árbol, éste jamás será un árbol cerrado porque no podemos descomponer ninguna de las fórmulas en los nuevos mundos que introdu-

Cap-11.pmd 368 13/07/07, 03:30 p.m.

ce la condición de serialidad. Por eso podemos afirmar que la fórmula no es una tautología en D. La fórmula es falsa bajo la siguiente valuación:

$$\cdots\ w_5 \longleftarrow \underset{\{C\}}{w_2} \longleftarrow w_0 \longrightarrow w_1 \longrightarrow \underset{\{\sim C\}}{w_3} \longrightarrow w_4\ \cdots$$

Como hay al menos un mundo accesible desde w_0 en el cual "C" es verdadera, $\mathcal{V}(\Diamond C, w_0) = \mathbf{V}$. Sin embargo, $\mathcal{V}(\Box\Diamond C, w_0) = \mathbf{F}$ porque $\mathcal{V}(\Diamond C, w_1) = \mathbf{F}$.

Ejercicio 11.2

Use el método de los árboles de verdad para determinar si los siguientes argumentos son semánticamente válidos en el sistema indicado. Si el árbol no se cierra, construya una valuación que muestre la invalidez del argumento.

A. Sistema T

1. $\begin{array}{l} \Box A \\ \hline \Diamond A \end{array}$

2. $\begin{array}{l} \sim\Diamond\sim B \\ \hline B \end{array}$

3. $\begin{array}{l} \Box(A \,\&\, B) \\ \hline \Diamond B \end{array}$

4. $\begin{array}{l} \sim\Diamond E \\ \hline \sim E \end{array}$

B. Sistema KB

1. $\begin{array}{l} \Diamond\Box\Diamond\Box E \\ \hline E \end{array}$

2. $\begin{array}{l} F \supset G \\ \hline \Box\sim\Box(F \,\&\, \sim G) \end{array}$

3. $\begin{array}{l} \Diamond\Box\sim F \,\&\, \Diamond\Diamond G \\ \sim\Diamond G \\ \hline \sim\Box\Box F \end{array}$

4. $\begin{array}{l} \Diamond(G \vee H) \\ \hline \Diamond\Diamond(G \vee H) \end{array}$

C. Sistema K4

1. $\begin{array}{l} \Diamond\Diamond(A \supset \sim B) \\ \hline \Diamond(\sim A \vee \sim B) \end{array}$

2. $\begin{array}{l} \Diamond\Diamond\Box A \\ \hline \Diamond A \end{array}$

3. $\begin{array}{l} \Box\Box A \\ \Diamond\Diamond\sim\Box A \\ \hline \Box A \end{array}$

4. $\begin{array}{l} \sim\Diamond(A \,\&\, \sim B) \\ \hline \Box A \supset \Diamond\Box B \end{array}$

D. Sistema D

1. $\begin{array}{l} O \Rightarrow P \\ \hline \Diamond\sim(O \,\&\, \sim P) \end{array}$

2. $\begin{array}{l} K \\ \hline \Diamond(K \vee \sim K) \end{array}$

3. $\begin{array}{l} \Box\Diamond\sim N \\ \hline \Diamond\Diamond\sim N \end{array}$

4. $\begin{array}{l} \sim\Diamond(M \,\&\, \sim N) \\ \hline \Diamond(M \supset N) \end{array}$

Cap-11.pmd 369 13/07/07, 03:30 p.m.

11.3 Extensiones compuestas de K

Los sistemas que hemos considerado hasta el momento son el resultado de añadir una sola condición a la relación de accesibilidad entre mundos posibles del sistema K. En esta sección estudiaremos los sistemas que resultan de combinar varias de las condiciones estudiadas en la sección anterior.

Para facilitar la construcción de los árboles de verdad para los sistemas compuestos, seguiremos las siguientes estrategias de descomposición:

Estrategias de descomposición

1. Si el sistema es reflexivo, comenzamos estableciendo esa relación de accesibilidad en el mundo 0 y extrayendo toda la información posible sobre ese mundo.
2. A continuación introducimos los mundos nuevos utilizando la regla para la descomposición del operador de posibilidad ($\Diamond$).
3. Una vez establecida la relación de accesibilidad entre los dos mundos, añadimos toda la información que podamos a partir de esta relación. Por ejemplo, si el sistema es simétrico, inmediatamente después de obtener iRj, anotamos jRi.
4. Finalmente, nos devolvemos a los mundos introducidos anteriormente y si es posible aplicamos la regla para la descomposición del operador de necesidad ($\Box$) en el mundo nuevo.

11.3.1 *El sistema B*

El primer sistema compuesto que estudiaremos es el sistema B de lógica modal. El sistema es el resultado de añadir las condiciones de *reflexividad* y *simetría* a la relación de accesibilidad del sistema K.

En el siguiente ejemplo pondremos en práctica las estrategias de descomposición recién introducidas. Probaremos que la siguiente fórmula es una tautología en el sistema B:

Cap-11.pmd 370 13/07/07, 03:30 p.m.

(13) (A & ~B) ⊃ □◊(A & ~B)

1	~[(A & ~B) ⊃ □◊(A & ~B)], 0 ✓		MC
2	0*R*0		1 (R)
3	A & ~B, 0 ✓		1 (~⊃)
4	~□◊(A & ~B), 0 ✓		1 (~⊃)
5	A, 0		3 (&)
6	~B, 0		3 (&)
7	◊~◊(A & ~B), 0 ✓		4 (D)
8	0*R*1		7 (◊)
9	~◊(A & ~B), 1 ✓		7 (◊)
10	1*R*1		8 (R)
11	1*R*0		8 (S)
12	□~(A & ~B), 1		9 (D)
13	~(A & ~B), 1		10, 12 (□)
14	~(A & ~B), 0		11, 12 (□)
15	~A, 0	~~B, 0	14 (~&)
	×	×	

Las líneas 2, 5, 6, 10, 13 y 15 no son necesarias para completar el árbol puesto que existe una contradicción entre las líneas 3 y 14, pero las incluimos en este ejemplo para mostrar una aplicación al pie de la letra de la estrategia de descomposición que acabamos de estudiar.

11.3.2 *El sistema S4*

El siguiente sistema compuesto que estudiaremos es el sistema S4 de lógica modal. El sistema es el resultado de añadir las condiciones de *reflexividad* y *transitividad* a la relación de accesibilidad del sistema K.

Probaremos que el siguiente argumento es semánticamente válido en el sistema S4 de lógica modal:

(14) □(◊A ⊃ ~□□B)
□B
―――――――
~A

Cap-11.pmd 371 13/07/07, 03:30 p.m.

1	□ (◊A ⊃ ~□□B), 0			MC
2	□B, 0			MC
3	~~A, 0 ✓			MC
4	0*R*0			1 (R)
5	A, 0			3 (~~)
6	◊A ⊃ ~□□B, 0 ✓			1, 4 (□)
7	B, 0			2, 4 (□)
8		~◊A, 0 ✓	~□□B, 0 ✓	6 (⊃)
9		□~A, 0		8 (D)
10		~A, 0		4, 9 (□)
		×		
11			◊~□B, 0 ✓	8 (D)
12			0*R*1	11 (◊)
13			~□B, 1 ✓	11 (◊)
14			1*R*1	12 (R)
15			◊~B, 1 ✓	13 (D)
16			1*R*2	15 (◊)
17			~B, 2	15 (◊)
18			0*R*2	12, 16 (T)
19			B, 2	2, 18 (□)
			×	

La línea 14 no era necesaria para completar el árbol, pero la incluimos para demostrar cómo se deben poner en práctica las estrategias de descomposición.

11.3.3 *El sistema S5*

El último sistema compuesto que estudiaremos es el sistema S5 de lógica modal. El sistema es el resultado de añadir las condiciones de *reflexividad*, *simetría* y *transitividad* a la relación de accesibilidad del sistema K. Estas condiciones hacen que todos los mundos en *W* estén conectados entre sí y consigo mismos. Por esa razón el sistema S5 es lógicamente equivalente a la lógica modal leibniziana.

Probaremos que la siguiente fórmula es una tautología en S5:

(15) ◊A ⊃ □◊A

Cap-11.pmd 372 22/08/07, 08:52 a.m.

1	~(◊A ⊃ □◊A), 0 ✓	MC
2	0*R*0	1 (R)
3	◊A, 0 ✓	1 (~⊃)
4	~□◊A, 0 ✓	1 (~⊃)
5	◊~◊A, 0 ✓	4 (D)
6	0*R*1	3 (◊)
7	A, 1	3 (◊)
8	1*R*1	6 (R)
9	1*R*0	6 (S)
10	0*R*2	5 (◊)
11	~◊A, 2 ✓	5 (◊)
12	2R2	10 (R)
13	2R0	10 (S)
14	1R2	9, 10 (T)
15	2R1	14 (S)
16	□~A, 2	11 (D)
17	~A, 2	12, 16 (□)
18	~A, 1	15, 16 (□)
	×	

De nuevo, las líneas 2, 8, 12, 13 y 17 no eran necesarias para cerrar el árbol, pero las incluimos para ejemplificar la aplicación estricta de la estrategia de descomposición descrita al comienzo de esta sección. La fórmula **(15)** es el axioma característico del sistema S5.

Ejercicio 11.3

Utilice el método de los árboles de verdad para determinar si los siguientes argumentos son válidos en el sistema indicado. Si el árbol no se cierra, construya una valuación que muestre la invalidez del argumento.

A. Sistema B

1. ◊□~B
   ———
   ~B

2. ◊~◊A
   ———
   ~A

3. A ∨ B
   ———
   □~□(~A & ~B)

4. ◊~◊◊□B
   ———
   ~◊□B

B. Sistema S4

1. $$\begin{array}{l} \Diamond J \\ \hline \Diamond\Diamond J \end{array}$$

2. $$\begin{array}{l} \Diamond{\sim}\Box K \\ \hline \Diamond{\sim}K \end{array}$$

3. $$\begin{array}{l} {\sim}\Diamond L \\ \hline \Box{\sim}\Diamond L \end{array}$$

4. $$\begin{array}{l} \Diamond\Box{\sim}H \\ \Diamond G \supset \Diamond H \\ \hline {\sim}G \end{array}$$

C. Sistema S5

1. $$\begin{array}{l} \Box\Diamond\Box\Diamond F \\ \hline \Diamond F \end{array}$$

2. $$\begin{array}{l} \Diamond\Box\Diamond\Box T \\ \hline T \end{array}$$

3. $$\begin{array}{l} \Diamond\Diamond R \\ \hline \Box\Diamond R \end{array}$$

4. $$\begin{array}{l} \Box\Box\Diamond\Diamond S \\ \hline \Diamond S \end{array}$$

5. $$\begin{array}{l} \Box\Box A \Rightarrow B \\ \Box A \\ \hline B \end{array}$$

6. $$\begin{array}{l} \Box{\sim}Q \Rightarrow \Box\Box{\sim}R \\ \Diamond R \\ \hline \Diamond Q \end{array}$$

7. $$\begin{array}{l} \Box A \\ A \Rightarrow B \\ \hline \Box\Box B \end{array}$$

8. $$\begin{array}{l} \Diamond\Box N \Rightarrow \Diamond\Diamond P \\ {\sim}\Diamond P \\ \hline {\sim}\Box N \end{array}$$

9. $$\begin{array}{l} \Box\Box(A \ \& \ B) \\ \hline \Box A \ \& \ \Box\Box B \end{array}$$

10. $$\begin{array}{l} \Box\Box E \Rightarrow \Box\Box F \\ \Diamond{\sim}F \\ \hline {\sim}\Box E \end{array}$$

11. $$\begin{array}{l} \Diamond\Box J \\ \Diamond\Diamond K \Rightarrow {\sim}\Box J \\ \hline {\sim}\Diamond K \end{array}$$

12. $$\begin{array}{l} \Diamond\Box{\sim}H \\ \Diamond C \Rightarrow \Diamond H \\ \hline {\sim}C \end{array}$$

13. $$\begin{array}{l} \Diamond G \\ \Box\Diamond G \Rightarrow \Diamond\Box H \\ \hline H \end{array}$$

14. $$\begin{array}{l} \Diamond\Diamond T \Rightarrow \Box\Diamond P \\ \hline {\sim}\Diamond(\Diamond T \ \& \ {\sim}\Diamond P) \end{array}$$

15. $$\begin{array}{l} \Diamond\Diamond(P \vee Q) \\ \hline \Diamond P \vee \Diamond Q \end{array}$$

16. $$\begin{array}{l} {\sim}\Diamond(A \ \& \ {\sim}B) \\ \hline \Diamond\Box A \Rightarrow \Diamond\Box B \end{array}$$

Cap-11.pmd 374 13/07/07, 03:30 p.m.

12. Deducción natural modal

En este capítulo desarrollaremos un sistema de deducción natural para la lógica modal T, uno para el sistema S4 y otro para el sistema S5. Las lógicas modales son una extensión de la lógica proposicional estudiada en la primera parte de este libro. Por esa razón haremos uso de todas las reglas de inferencia del sistema *SDN** al construir los sistemas modales de deducción, con la salvedad de que estas reglas ahora se aplican a fórmulas de *LM*[1].

12.1 El sistema T

En esta sección estudiaremos un sistema de derivación natural para la lógica modal T, el cual llamaremos *SDT* (Sistema de Derivación T). Comenzaremos con una regla de inferencia equivalente a la regla de necesitación: Si $\mathcal{P}$ es un teorema de la lógica proposicional, entonces $\Box\mathcal{P}$:

Introducción de $\Box$ ($\Box$I)

$$
\begin{array}{r|l}
 & \vdash \mathcal{P} \\
\blacktriangleright & \Box\mathcal{P}
\end{array}
$$

Recordemos que una fórmula $\mathcal{P}$ de *LP* es un teorema de *SDN** si y sólo $\mathcal{P}$ puede ser derivada sin necesidad de ninguna suposición. Para poder utilizar la regla ($\Box$I) debemos demostrar primero que la fórmula $\mathcal{P}$ es un teorema de *SDN** como en el siguiente ejemplo:

1. *Véase* sección 5.4. Es posible utilizar solamente las reglas de *SDN*, no las de *SDN**, en la construcción de los sistemas modales de deducción, pero las derivaciones resultantes serían excesivamente largas y difíciles. Más adelante veremos la diferencia a través de un ejemplo.

Cap-12.pmd 375 13/07/07, 03:31 p.m.

(1) Derive: $\Box[F \supset ({\sim}G \vee F)]$

1	$\quad F$	Suposición
2	$\quad {\sim}G \vee F$	1 ($\vee$I)
3	$F \supset ({\sim}G \vee F)$	1-2 ($\supset$I)
4	$\Box[F \supset ({\sim}G \vee F)]$	3 ($\Box$I)

La siguiente regla de inferencia está basada en el axioma T: Si $\Box\mathcal{P}$, entonces $\mathcal{P}$.

Eliminación de $\Box$ ($\Box$E)

$$\begin{array}{r|l} & \Box\mathcal{P} \\ \blacktriangleright & \mathcal{P} \end{array}$$

Esta regla es conocida generalmente como "NE", una abreviación del principio medieval: *Necesse ad esse* (Del ser necesario al ser). Nosotros la llamaremos "Eliminación de $\Box$" para mantener la coherencia con las demás reglas de *SDN**.

($\Box$E) es una regla de inferencia, no de equivalencia. Por lo tanto no puede ser aplicada a una parte de una fórmula. La siguiente es una utilización incorrecta de la regla:

(2)

1	${\sim}\Box A$		
2	${\sim}A$	1 ($\Box$E)	**ERROR**

Si esta inferencia fuera permitida por la regla, el siguiente argumento sería válido:

(2a) No es necesario que yo exista.
Yo no existo.

La tercera regla de *SDT* nos dice que si una fórmula es verdadera, entonces es posible que sea verdadera:

Introducción de $\Diamond$ ($\Diamond$I)

$$\begin{array}{r|l} & \mathcal{P} \\ \blacktriangleright & \Diamond\mathcal{P} \end{array}$$

Esta regla también es conocida como "EP", una abreviación de la frase: *Esse ad posse* (Del ser al ser posible). Al igual que la regla anterior, debe ser aplicada a líneas enteras de una derivación. La siguiente es una aplicación errónea de la regla:

(3)

1	$C \supset E$		
2	$\Diamond C \supset E$	1 ($\Diamond$I)	**ERROR**

Si la anterior derivación estuviera permitida, el siguiente argumento sería válido:

(3a) Si Mónica está casada, entonces tiene un esposo.
____
Si es posible que Mónica esté casada, entonces tiene un esposo.

La siguiente regla de *SDT* no es una regla de inferencia sino de equivalencia. La regla puede ser utilizada para reemplazar una fórmula por una fórmula equivalente incluso cuando ésta hace parte de una fórmula más compleja. La regla tiene cuatro instancias que están basadas en el carácter dual o interdefinible de los operadores modales. Por eso llamaremos a la regla "Dualidad":

Dualidad (D)

$\Box\mathcal{P}$	::	$\sim\Diamond\sim\mathcal{P}$
$\Diamond\mathcal{P}$	::	$\sim\Box\sim\mathcal{P}$
$\sim\Box\mathcal{P}$	::	$\Diamond\sim\mathcal{P}$
$\Box\sim\mathcal{P}$	::	$\sim\Diamond\mathcal{P}$

En el siguiente ejemplo utilizaremos algunas de las reglas estudiadas hasta el momento. Demostraremos que el siguiente argumento es válido en *SDT*:

(4) $\Box C$ & D
($\Diamond C$ & D) $\supset$ E
____
$\Diamond E$

Como queremos derivar una fórmula posiblemente verdadera, la estrategia más sencilla es derivar la letra proposicional "E" y después utilizar ($\Diamond$I). Para derivar "E" debemos derivar el antecedente de la segunda premisa. La siguiente es la derivación completa:

1	$\Box C$ & D	Suposición
2	($\Diamond C$ & D) $\supset$ E	Suposición
3	$\Box C$	1 (&E)
4	C	3 ($\Box$E)
5	$\Diamond C$	4 ($\Diamond$I)
6	D	1 (&E)
7	$\Diamond C$ & D	5, 6 (&I)
8	E	2, 7 ($\supset$E)
9	$\Diamond E$	8 ($\Diamond$I)

Cap-12.pmd 377 13/07/07, 03:31 p.m.

Consideremos un ejemplo más complejo. Demostraremos que el siguiente argumento es válido en *SDT*:

(5) □~A ⊃ ~◊~B
◊~C ⊃ ~□~D
~(◊A ∨ □C)
―――――――――
◊D & B

Debemos derivar una conjunción. La estrategia más sencilla es derivar cada uno de los elementos de la conjunción independientemente. Para derivar "B" debemos obtener el antecedente de la primera premisa, pues es fácil derivar "B" de "~◊~B". Y para derivar "◊D" debemos obtener el antecedente de la segunda premisa, pues de "~□~D" se puede derivar "◊D" directamente. La derivación completa es como sigue:

1	□~A ⊃ ~◊~B	Suposición
2	◊~C ⊃ ~□~D	Suposición
3	~(◊A ∨ □C)	Suposición
4	~◊A & ~□C	3 (DeM)
5	~◊A	4 (&E)
6	□~A	5 (D)
7	~◊~B	1, 6 (⊃E)
8	□B	7 (D)
9	B	8 (□E)
10	~□C	4 (&E)
11	◊~C	10 (D)
12	~□~D	2, 11 (⊃E)
13	◊D	12 (D)
14	◊D & B	9, 13 (&I)

Para facilitar la derivación de proposiciones más complejas, introduciremos una serie de reglas para la *distribución* del operador modal. La primera regla es una regla de equivalencia y tiene dos instancias. Como es una regla para distribuir el operador modal, la llamaremos "Equivalencia Modal Distributiva":

Equivalencia modal distributiva (EMD)

$$\Box(\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q}) \quad :: \quad \Box\mathcal{P} \,\&\, \Box\mathcal{Q}$$
$$\Diamond(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \quad :: \quad \Diamond\mathcal{P} \vee \Diamond\mathcal{Q}$$

Si la conjunción de dos fórmulas es necesariamente verdadera, cada uno de los elementos de la conjunción debe ser necesariamente verdadero. Y si dos fórmulas son necesariamente verdaderas individualmente, entonces su conjunción es necesaria-

Cap-12.pmd 378 13/07/07, 03:31 p.m.

mente verdadera. Por otra parte, si la disyunción de dos fórmulas es posiblemente verdadera, cada uno de los elementos de la disyunción debe ser posiblemente verdadero. Y si dos fórmulas son posiblemente verdaderas individualmente, su disyunción es posiblemente verdadera.

El siguiente ejemplo hace uso de la Equivalencia Modal Distributiva. Demostraremos que el siguiente argumento es válido en *SDT*:

(6) $\Box(P \,\&\, R)$
$\sim\Diamond\sim R \supset \Diamond(S \vee T)$
$\Diamond S \vee \Diamond T$

1	$\Box(P \,\&\, R)$	Suposición
2	$\sim\Diamond\sim R \supset \Diamond(S \vee T)$	Suposición
3	$\Box P \,\&\, \Box R$	1 (EMD)
4	$\Box R$	3 (&E)
5	$\sim\Diamond\sim R$	4 (D)
6	$\Diamond(S \vee T)$	2, 5 ($\supset$E)
7	$\Diamond S \vee \Diamond T$	6 (EMD)

Es importante no olvidar que esta regla de equivalencia sólo nos permite distribuir el operador de necesidad en la conjunción y el de posibilidad en la disyunción. La regla no nos permite distribuir el operador de necesidad en la disyunción:

$$\Box(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \qquad :: \qquad \Box\mathcal{P} \vee \Box\mathcal{Q}$$

El problema reside en que de $\Box(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ no siempre es posible inferir $\Box\mathcal{P} \vee \Box\mathcal{Q}$. La inferencia no es posible cuando $\mathcal{Q}$ es la negación de $\mathcal{P}$. Por ejemplo, si $\Box(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ es "$\Box(E \vee \sim E)$", no podemos inferir "$\Box E \vee \Box\sim E$", como lo ilustra el siguiente caso:

(7) Necesariamente, Einstein nació en Ulm o no nació en Ulm.

(8) Necesariamente Einstein nació en Ulm o necesariamente Einstein no nació en Ulm.

El primer enunciado es cierto; "$(E \vee \sim E)$" es un teorema y todos los teoremas son necesariamente ciertos. Pero el segundo enunciado es falso porque Einstein no tenía que nacer necesariamente en algún sitio en particular.

Por razones análogas tampoco podemos adoptar la siguiente regla de equivalencia:

$$\Diamond(\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q}) \qquad :: \qquad \Diamond\mathcal{P} \,\&\, \Diamond\mathcal{Q}$$

El problema en este caso reside en que de $\Diamond\mathcal{P} \,\&\, \Diamond\mathcal{Q}$ no siempre es posible inferir $\Diamond(\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q})$. Consideremos el siguiente ejemplo:

Cap-12.pmd 379 13/07/07, 03:31 p.m.

(9) Es lógicamente posible que José gane la Maratón de Nueva York este año y es lógicamente posible que Pedro gane la Maratón de Nueva York este año.

(10) Es lógicamente posible que tanto José como Pedro ganen la Maratón de Nueva York este año.

El primer enunciado es verdadero pero el segundo es falso. En símbolos, "$\Diamond J \;\&\; \Diamond P$" es verdadera, pero "$\Diamond(J \;\&\; P)$" es falsa.

Aunque estos ejemplos muestran que no puede haber una regla de *equivalencia* que nos permita distribuir el operador de necesidad en la disyunción y el de posibilidad en la conjunción, sí es posible establecer una regla de *inferencia* en estos casos:

Inferencia modal distributiva (IMD)

$$\begin{array}{r|l} & \Box\mathcal{P} \vee \Box\mathcal{Q} \\ & \\ \blacktriangleright & \Box(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{r|l} & \Diamond(\mathcal{P} \;\&\; \mathcal{Q}) \\ & \\ \blacktriangleright & \Diamond\mathcal{P} \;\&\; \Diamond\mathcal{Q} \end{array}$$

El siguiente ejemplo hace uso de esta regla. Demostraremos que el siguiente argumento es válido en *SDT*:

(11) $\Diamond(C \;\&\; D)$

$\Diamond D \supset (\sim\Diamond F \vee \Box H)$

$\Box(\sim F \vee H)$

1	$\Diamond(C \;\&\; D)$	Suposición
2	$\Diamond D \supset (\sim\Diamond F \vee \Box H)$	Suposición
3	$\Diamond C \;\&\; \Diamond D$	1 (IMD)
4	$\Diamond D$	3 (&E)
5	$\sim\Diamond F \vee \Box H$	2, 4 ($\supset$E)
6	$\Box\sim F \vee \Box H$	5 (D)
7	$\Box(\sim F \vee H)$	6 (IMD)

El siguiente grupo de reglas de *SDT* se aplica a fórmulas que contengan el operador para la implicación estricta. La primera regla es una regla de equivalencia que se basa en la definición de la implicación estricta:

Implicación estricta (IE)

$$\Box(\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}) \qquad :: \qquad (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$$

La siguiente regla de *SDT* es una regla de inferencia que nos permite agregar el mismo operador modal al antecedente y al consecuente de la implicación estricta:

Operadores de la implicación estricta (OIE)

	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	y	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
▶	$\Box\mathcal{P} \Rightarrow \Box\mathcal{Q}$	▶	$\Diamond\mathcal{P} \Rightarrow \Diamond\mathcal{Q}$

La siguiente derivación utiliza las dos últimas reglas. Probaremos que el siguiente argumento es válido en *SDT*:

(12) $A \Rightarrow B$
$\Box A$
———
$\Box B$

1	$A \Rightarrow B$	Suposición
2	$\Box A$	Suposición
3	$\Box A \Rightarrow \Box B$	1 (OIE)
4	$\Box(\Box A \supset \Box B)$	3 (IE)
5	$\Box A \supset \Box B$	4 ($\Box$E)
6	$\Box B$	2, 5 ($\supset$E)

Es importante anotar que la regla OIE se aplica a la implicación estricta pero no a la implicación material. Consideremos las consecuencias de su aplicación en el siguiente caso:

(13) $A \supset B$
———
$\Box A \supset \Box B$

Este argumento tiene una premisa verdadera y una conclusión falsa cuando "A" es necesariamente verdadera y "B" es contingentemente verdadera, como en el siguiente ejemplo:

(13a) Si todos los maridos son hombres casados, entonces Bill Clinton es un hombre casado.
———
Si necesariamente todos los maridos son hombres casados, entonces necesariamente Bill Clinton es un hombre casado.

Es necesariamente verdadero que todos los maridos son hombres casados, pero no es necesariamente verdadero que Bill Clinton sea un hombre casado. En algún mundo posible Bill Clinton pudo haber permanecido soltero. En consecuencia, el condicional de la premisa es verdadero pero el condicional de la conclusión es falso.

Algo similar ocurre en el caso del operador de posibilidad. Consideremos el siguiente argumento:

(14) $\dfrac{A \supset B}{\Diamond A \supset \Diamond B}$

Este argumento tiene una premisa verdadera y una conclusión falsa cuando "B" es necesariamente falsa y "~A" es una verdad contingente, como en el siguiente ejemplo:

(14a) Si Bill Clinton es un hombre soltero, entonces hay solteros que están casados.
Si es posible que Bill Clinton sea un hombre soltero, entonces es posible que haya solteros casados.

La premisa es verdadera porque el antecedente y el consecuente son falsos. Pero la conclusión es falsa porque el antecedente es verdadero pero el consecuente es falso.

Muchas de las reglas de inferencia en *SDT* son análogas a las de la lógica proposicional clásica. Tanto *modus ponens* como *modus tollens* se cumplen para la implicación estricta. Para mantener la uniformidad del sistema, trataremos a las dos reglas como casos de una regla más general, la regla para la eliminación de la implicación estricta.

Eliminación de la implicación estricta (⇒E)

$$\begin{array}{l|l} & \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \\ & \mathcal{P} \\ \blacktriangleright & \mathcal{Q} \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{l|l} & \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \\ & {\sim}\mathcal{Q} \\ \blacktriangleright & {\sim}\mathcal{P} \end{array}$$

Finalmente, podemos introducir una regla análoga al silogismo hipotético de la lógica proposicional:

Silogismo hipotético modal (SHM)

$$\begin{array}{l|l} & \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \\ & \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R} \\ \blacktriangleright & \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R} \end{array}$$

Cap-12.pmd 382 13/07/07, 03:31 p.m.

Consideremos algunos ejemplos que utilizan las reglas acerca de la implicación estricta. Probaremos que la siguiente fórmula es un teorema en *SDT*:

(15) $(A \Rightarrow B) \supset (\sim B \Rightarrow \sim A)$

1	$\quad A \Rightarrow B$	Suposición
2	$\quad \Box(A \supset B)$	1 (IE)
3	$\quad \Box(\sim B \supset \sim A)$	2 (Trans)
4	$\quad (\sim B \Rightarrow \sim A)$	3 (IE)
5	$(A \Rightarrow B) \supset (\sim B \Rightarrow \sim A)$	1-4 ($\supset$I)

Si no contáramos con la regla (Trans), que originalmente pertenece a *SDN**, la derivación sería mucho más larga y compleja:

1	$\quad A \supset B$	Suposición
2	$\quad\quad \sim B$	Suposición
3	$\quad\quad\quad A$	Suposición
4	$\quad\quad\quad B$	1, 3 ($\supset$E)
5	$\quad\quad\quad \sim B$	2 (R)
6	$\quad\quad \sim A$	3-5 (~I)
7	$\quad \sim B \supset \sim A$	2-6 ($\supset$I)
8	$(A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)$	1-7 ($\supset$I)
9	$\Box[(A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)]$	8 ($\Box$I)
10	$(A \supset B) \Rightarrow (\sim B \supset \sim A)$	9 (IE)
11	$\Box(A \supset B) \Rightarrow \Box(\sim B \supset \sim A)$	10 (OIE)
12	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\sim B \Rightarrow \sim A)$	11 (IE)
13	$\quad A \Rightarrow B$	Suposición
14	$\quad \sim B \Rightarrow \sim A$	12, 13 ($\Rightarrow$ E)
15	$(A \Rightarrow B) \supset (\sim B \Rightarrow \sim A)$	13-14 ($\supset$I)

Incluimos esta derivación simplemente para que el lector se haga una idea de la diferencia entre usar *SDN* y *SDN** como base para construir *SDT*.

Cap-12.pmd 383 13/07/07, 03:31 p.m.

Probaremos ahora que la siguiente fórmula es un teorema de *SDT*:

(16) $([(E \Rightarrow D) \ \& \ (D \Rightarrow C)] \ \& \ E) \supset C$

1	$[(E \Rightarrow D) \ \& \ (D \Rightarrow C)] \ \& \ E$	Suposición
2	$(E \Rightarrow D) \ \& \ (D \Rightarrow C)$	1 (&E)
3	$E \Rightarrow D$	2 (&E)
4	$D \Rightarrow C$	2 (&E)
5	$E \Rightarrow C$	3, 4 (SHM)
6	E	1 (&E)
7	C	5, 6 ($\Rightarrow$E)
8	$([(E \Rightarrow D) \ \& \ (D \Rightarrow C)] \ \& \ E) \supset C$	1-7 ($\supset$I)

Ejercicio 12.1

A. Demuestre que cada una de las siguientes fórmulas es un teorema en *SDT*.

1. $\sim\Diamond E \supset \sim E$
2. $\Box[(A \ \& \ B) \supset (B \vee C)]$
3. $\Box(A \ \& \ B) \supset \Diamond B$
4. $(\Box{\sim}B \ \& \ T) \supset \sim\Diamond B$
5. $[(\Diamond H \vee \sim\Box S) \ \& \ \Box{\sim}H] \supset \Diamond{\sim}S$
6. $(\Box C \vee \Box D) \supset (C \vee D)$
7. $[(K \Rightarrow L) \ \& \ \Box{\sim}L] \supset \Box{\sim}K$
8 $[(\Box S \vee \Box P) \ \& \ \Diamond{\sim}S] \supset \Diamond{\sim}P$
9. $\Box(A \ \& \ {\sim}B) \supset \sim\Diamond B$
10. $\sim(\Box(E \supset H) \ \& \ \sim\Box{\sim}E) \vee \Diamond H$

B. Demuestre que cada uno de los siguientes argumentos es válido en *SDT*.

1. $$\begin{array}{l} \Diamond A \vee \Diamond B \\ \Diamond(A \vee B) \supset C \\ \hline \Diamond C \end{array}$$

2. $$\begin{array}{l} \Diamond(H \ \& \ J) \\ \Diamond K \Rightarrow \sim\Diamond J \\ \hline \Box{\sim}K \end{array}$$

3. $$\begin{array}{l} F \Rightarrow G \\ \Box{\sim}G \\ \hline \Box{\sim}F \end{array}$$

4. $$\begin{array}{l} \Box(N \equiv O) \\ N \Rightarrow P \\ \hline O \supset P \end{array}$$

5. $$\begin{array}{l} \Diamond P \Rightarrow T \\ \hline \Box{\sim}P \vee T \end{array}$$

6. $$\begin{array}{l} S \Rightarrow (T \ \& \ U) \\ \Box S \\ \hline \Box U \end{array}$$

7. $$\begin{array}{l} \Diamond({\sim}D \ \& \ {\sim}E) \\ \Diamond A \Rightarrow \Box D \\ \hline {\sim}A \end{array}$$

8. $$\begin{array}{l} \Diamond(W \vee X) \\ \Diamond W \Rightarrow \Diamond Z \\ \Diamond X \Rightarrow \Diamond V \\ \hline \Diamond(Z \vee V) \end{array}$$

Cap-12.pmd 384 13/07/07, 03:31 p.m.

9. $\Box(T \vee S)$
$\underline{\Box{\sim}T}$
$\Box S$

10. $\Box[{\sim}R \vee (S \;\&\; T)]$
$\underline{\Diamond R}$
$\Diamond S \;\&\; \Diamond T$

11. $\Box[M \supset (N \supset O)]$
$\underline{\Diamond N}$
$\Diamond(M \supset O)$

12. ${\sim}\Diamond(S \vee T)$
$\underline{(U \Rightarrow W) \supset \Diamond S}$
$\Diamond{\sim}W$

13. $\Box(W \;\&\; R) \supset X$
$\underline{\Box W}$
${\sim}X \Rightarrow {\sim}R$

14. $\Box(A \;\&\; B) \vee \Box({\sim}A \;\&\; {\sim}B)$
$\underline{[(A \Rightarrow B) \;\&\; (B \Rightarrow A)] \supset {\sim}\Diamond C}$
$\Diamond{\sim}C$

15. $\Diamond(L \vee M)$
$\Box{\sim}L$
$\underline{M \Rightarrow {\sim}N}$
${\sim}\Box N$

16. $\Box[B \;\&\; (E \vee {\sim}G)]$
$(\Box K \vee \Diamond H) \supset {\sim}\Box B$
$\underline{\Diamond G}$
$\Diamond E \;\&\; {\sim}H$

17. $\Diamond[B \vee (C \;\&\; D)]$
$\Diamond A \supset {\sim}\Diamond B$
$\underline{\Diamond A \supset {\sim}\Diamond(C \;\&\; D)}$
${\sim}A$

18. $\Diamond[(L \vee M) \;\&\; (L \vee Q)]$
$\Diamond P \Rightarrow {\sim}\Diamond Q$
$\underline{\Box{\sim}L}$
${\sim}P$

12.2 Los sistemas S4 y S5

Como vimos en el capítulo 10, la adición del axioma S4 al sistema T forma el sistema S4, y la adición del axioma S5 a T forma el sistema S5. En esta sección estudiaremos un sistema deductivo para el sistema S4 y uno para S5. Como ambos sistemas son extensiones de T, utilizaremos *SDT* como el punto de partida para la construcción de los dos sistemas de deducción. Los llamaremos *SD4* y *SD5*.

SD4 se construye añadiendo la siguiente regla a *SDT*. Es una regla de equivalencia basada en el axioma S4: Si $\Box\mathcal{P}$, entonces $\Box\Box\mathcal{P}$.

Sistema S4 (S4)

$\Box\mathcal{P}$	::	$\Box\Box\mathcal{P}$
$\Diamond\mathcal{P}$	::	$\Diamond\Diamond\mathcal{P}$

Cap-12.pmd 385 13/07/07, 03:31 p.m.

El paso de $\Box\Box\mathcal{P}$ a $\Box\mathcal{P}$ está validado por ($\Box$E) y el paso de $\Diamond\mathcal{P}$ a $\Diamond\Diamond\mathcal{P}$ está justificado por ($\Diamond$I). El paso de $\Diamond\Diamond\mathcal{P}$ a $\Diamond\mathcal{P}$ es una consecuencia lógica del axioma S4, pues es posible probar que cualquier fórmula de la forma $\Diamond\Diamond\mathcal{P} \supset \Diamond\mathcal{P}$ es un teorema de S4 utilizando la primera equivalencia:

1	$\sim(\Diamond\Diamond\mathcal{P} \supset \Diamond\mathcal{P})$	Suposición
2	$\sim(\sim\Diamond\Diamond\mathcal{P} \vee \Diamond\mathcal{P})$	1 (Impl)
3	$\sim\sim\Diamond\Diamond\mathcal{P}\ \&\ \sim\Diamond\mathcal{P}$	2 (DeM)
4	$\Diamond\Diamond\mathcal{P}\ \&\ \sim\Diamond\mathcal{P}$	3 (DN)
5	$\sim\Diamond\mathcal{P}$	4 (&E)
6	$\Box\sim\mathcal{P}$	5 (D)
7	$\Box\Box\sim\mathcal{P}$	6 (S4)
8	$\Diamond\Diamond\mathcal{P}$	4 (&E)
9	$\sim\Box\sim\Diamond\mathcal{P}$	8 (D)
10	$\sim\Box\Box\sim\mathcal{P}$	9 (D)
11	$\Diamond\Diamond\mathcal{P} \supset \Diamond\mathcal{P}$	1-10 (~E)

Consideremos un ejemplo de un argumento válido en *SD4*.

(17) $\Diamond C \Rightarrow \sim\Box\Box D$

$\Box D$

$\sim C$

1	$\Diamond C \Rightarrow \sim\Box\Box D$	Suposición
2	$\Box D$	Suposición
3	$\Diamond C \Rightarrow \sim\Box D$	1 (S4)
4	$\sim\sim\Box D$	2 (DN)
5	$\sim\Diamond C$	3, 4 ($\Rightarrow$ E)
6	$\Box\sim C$	5 (D)
7	$\sim C$	6 ($\Box$E)

SD5 se construye añadiendo la siguiente regla de equivalencia a *SD4*. La regla está basada en el axioma S5: Si $\Diamond\mathcal{P}$, entonces $\Box\Diamond\mathcal{P}$.

Sistema S5 (S5)

$\Diamond\mathcal{P}$	::	$\Box\Diamond\mathcal{P}$
$\Diamond\Box\mathcal{P}$	::	$\Box\mathcal{P}$

El paso de $\Box\Diamond\mathcal{P}$ a $\Diamond\mathcal{P}$ está justificado por ($\Box$E) y el paso de $\Box\mathcal{P}$ a $\Diamond\Box\mathcal{P}$ está justificado por ($\Diamond$I). El paso de $\Diamond\Box\mathcal{P}$ a $\Box\mathcal{P}$ es una consecuencia lógica del axioma S5, pues es

Cap-12.pmd 386 13/07/07, 03:31 p.m.

posible probar que cualquier fórmula con la forma $\Diamond\Box\mathcal{P} \supset \Box\mathcal{P}$ es un teorema de *SD5* utilizando la primera parte de la regla:

1	$\sim(\Diamond\Box\mathcal{P} \supset \Box\mathcal{P})$	Suposición
2	$\sim(\sim\Diamond\Box\mathcal{P} \vee \Box\mathcal{P})$	1 (Impl)
3	$\sim\sim\Diamond\Box\mathcal{P}\ \&\ \sim\Box\mathcal{P}$	2 (DeM)
4	$\Diamond\Box\mathcal{P}\ \&\ \sim\Box\mathcal{P}$	3 (DN)
5	$\sim\Box\mathcal{P}$	4 (&E)
6	$\Diamond\sim\mathcal{P}$	5 (D)
7	$\Box\Diamond\sim\mathcal{P}$	6 (S5)
8	$\Box\sim\Box\mathcal{P}$	7 (D)
9	$\sim\Diamond\Box\mathcal{P}$	8 (D)
10	$\Diamond\Box\mathcal{P}$	4 (&E)
11	$\Diamond\Box\mathcal{P} \supset \Box\mathcal{P}$	1-10 (~E)

La validez del siguiente argumento depende de la aceptación de la regla (S5):

(18) $M \Rightarrow K$

$K \Rightarrow \sim\Diamond\sim M$

$\Diamond M$

M

1	$M \Rightarrow K$	Suposición
2	$K \Rightarrow \sim\Diamond\sim M$	Suposición
3	$\Diamond M$	Suposición
4	$\Diamond M \Rightarrow \Diamond K$	1 (OIE)
5	$K \Rightarrow \Box M$	2 (D)
6	$\Diamond K \Rightarrow \Diamond\Box M$	5 (OIE)
7	$\Diamond M \Rightarrow \Diamond\Box M$	4, 6 (SHM)
8	$\Diamond\Box M$	3, 7 ($\Rightarrow$E)
9	$\Box M$	8 (S5)
10	M	9 ($\Box$E)

Ejercicio 12.2

A. Demuestre que los siguientes argumentos son válidos en *SD4*.

1. $\dfrac{\Diamond\sim\Box H}{\Diamond\sim H}$

2. $\dfrac{\sim\Diamond J}{\Box\sim\Diamond J}$

3. $\dfrac{\Box\Box F \Rightarrow G \quad \Box F}{G}$

4. $\dfrac{\Diamond\Diamond(P \vee Q)}{\Diamond P \vee \Diamond Q}$

Cap-12.pmd 387 13/07/07, 03:31 p.m.

5. $\begin{array}{l} (\Diamond M \vee \Diamond\Diamond M) \Rightarrow N \\ \hline \Box(\Diamond M \supset N) \end{array}$

6. $\begin{array}{l} \Box\Box\Diamond\Diamond S \\ \hline \Diamond S \end{array}$

7. $\begin{array}{l} R \Rightarrow S \\ \Box R \\ \hline \Box\Box S \end{array}$

8. $\begin{array}{l} \Box\Box E \Rightarrow \Box\Box F \\ \Diamond{\sim}F \\ \hline {\sim}\Box E \end{array}$

9. $\begin{array}{l} \Box\Box(P \;\&\; Q) \\ \hline \Box P \;\&\; \Box\Box Q \end{array}$

10. $\begin{array}{l} \Box{\sim}Q \Rightarrow \Box\Box{\sim}R \\ \Diamond R \\ \hline \Diamond Q \end{array}$

B. Demuestre que los siguientes argumentos son válidos en *SD5*.

1. $\begin{array}{l} \Diamond\Diamond D \\ \hline \Box\Diamond D \end{array}$

2. $\begin{array}{l} \Box\Diamond\Box\Diamond L \\ \hline \Diamond L \end{array}$

3. $\begin{array}{l} \Diamond A \\ \Box\Diamond A \Rightarrow \Diamond\Box B \\ \hline B \end{array}$

4. $\begin{array}{l} \Diamond\Box N \Rightarrow \Diamond\Diamond P \\ {\sim}\Diamond P \\ \hline {\sim}\Box N \end{array}$

5. $\begin{array}{l} \Diamond\Box E \\ \Diamond\Diamond C \Rightarrow {\sim}\Box E \\ \hline {\sim}\Diamond C \end{array}$

6. $\begin{array}{l} \Diamond\Box\Diamond\Box A \\ \hline A \end{array}$

7. $\begin{array}{l} G \Rightarrow \Box J \\ J \Rightarrow G \\ \Diamond J \\ \hline J \end{array}$

8. $\begin{array}{l} \Diamond\Box{\sim}H \\ \Diamond C \Rightarrow \Diamond H \\ \hline {\sim}C \end{array}$

9. $\begin{array}{l} \Box\Box(H \;\&\; \Diamond\Box E) \\ \hline \Box\Diamond H \;\&\; \Diamond E \end{array}$

10. $\begin{array}{l} \Box\Box A \Rightarrow \Diamond\Box B \\ \hline \Diamond\Diamond({\sim}\Box A \vee \Box B) \end{array}$

11. $\begin{array}{l} \Box\Diamond\Diamond({\sim}F \vee \Diamond{\sim}G) \\ \hline \Diamond({\sim}\Box F \vee \Box\Diamond{\sim}G) \end{array}$

12. $\begin{array}{l} \Diamond{\sim}N \Rightarrow {\sim}N \\ \Diamond N \\ \hline N \end{array}$

Cap-12.pmd 388 13/07/07, 03:31 p.m.

APÉNDICE

RESPUESTAS
A LOS EJERCICIOS PARES

Capítulo 1

Ejercicio 1.1

2. No. Es una oración imperativa.
4. No. Es una petición.
6. No. Es una pregunta.
8. Sí.

Ejercicio 1.2

2. Todos los que son educados pueden leer.

   Ningún topo puede leer.

   Ningún topo es educado.

   AEE-2

   Todos los que leen el *Times* son educados.

   Ningún topo es educado.

   Ningún topo lee el *Times.*

   AEE-2

4. Todos los objetos antiguos en esta repisa están rotos.

   Todos los jarros en esta repisa son objetos antiguos.

   Todos los jarros en esta repisa están rotos.

   AAA-1

   Ninguna de las cosas rotas en esta repisa puede contener agua.

   Todos los jarros en esta repisa están rotos.

   Ningún jarro en la repisa puede contener agua.

   EAE-1

Apendice-1.pmd 391 13/07/07, 03:32 p.m.

6. Las flores de colores siempre tienen aroma.
   Todas las flores que crecen al aire libre tienen color.
   ____
   Todas las flores que crecen al aire libre tienen aroma.
   AAA-1

   Todas las flores que crecen al aire libre tienen aroma.
   Todas las flores que me placen crecen al aire libre.
   ____
   Todas las flores que me placen tienen aroma.
   AAA-1

Ejercicio 1.3

2. Lucía es brillante.
   Quien es brillante, saca buena nota.
   ____
   Lucía sacará buena nota.

4. El perro se rasca como loco.
   Si el perro se rasca como loco, tiene pulgas o tiene la piel muy seca.
   ____
   El perro tiene pulgas o tiene la piel muy seca.

6. La luz todavía es brillante.
   Si la luz es brillante, la batería todavía está buena.
   ____
   La batería todavía está buena.

8. El trabajo de Hilary Putnam es publicado por la editorial de la Universidad de Harvard.
   La Universidad de Harvard sólo publica el trabajo de los mejores filósofos del mundo.
   ____
   Hilary Putnam es uno de los mejores filósofos del mundo.

10. Tenía el promedio en 3.0.
    Saqué 5.0 en el final.
    Si saqué 5.0 en el final y tenía el promedio en 3.0, el curso me tiene que quedar por lo menos en 4.0.
    ____
    El curso me tiene que quedar por lo menos en 4.0.

12. Todo el mundo sabe que Ruddy es un déspota.
    Si todo el mundo sabe que Ruddy es un déspota, Ruddy no tiene la menor posibilidad de ser elegido alcalde.
    ____
    Ruddy no tiene la menor posibilidad de ser elegido alcalde.

14. Mauricio quemó todas las cartas de sus ex novias.
Quien quema todas las cartas de sus ex novias se va a casar.
Mauricio se va a casar.

Capítulo 2

Ejercicio 2.1

A.

2. A & C
4. ~L & C
6. L & ~A
8. Cinco posibles respuestas: (~A & ~L) & ~C   ~(A ∨ L) & ~C
   ~A & (~L & ~C)   ~A & ~(L ∨ C)   ~[(A ∨ L) ∨ C]
10. ~C & (A ∨ L)
12. ~A ∨ (~L ∨ ~C)
14. Igual al ejercicio 8

B.

2. O Adriana juega tenis todos los días o no lo hace.
4. Ni Adriana ni Carolina juega tenis todos los días.
6. No es el caso que Luis no trote todos los días.
8. Adriana o Carolina juega tenis todos los días; aún más, Luis juega tenis todos los días.
10. Luis o Carolina juega tenis todos los días, o ni Luis ni Carolina lo hace.

Ejercicio 2.2

A.

2.	M ⊃ C	4.	~P ⊃ L
6.	C ⊃ (~P ⊃ L)	8.	(C ∨ L) ⊃ A
10.	~(C ∨ L) ⊃ ~A	12.	S ⊃ (A ≡ L)
14.	(S & ~A) & (L ⊃ C)	16.	(A ⊃ S) ⊃ (P ⊃ ~L)
18.	A ⊃ (L ⊃ C)	20.	~S ⊃ ~(L & A)

B.

2. P: Pedro puede resolver la ecuación.
   J: Javier puede resolver la ecuación.
   M: Manuel está furioso.
   E: El experimento es exitoso.
   R: El laboratorio recibe recursos adicionales.

$$\begin{array}{l} (\sim P \ \& \ \sim J) \supset M \\ M \supset \sim E \\ \sim P \ \& \ \sim J \\ R \equiv E \\ \hline \sim R \end{array}$$

4. H: Jorge sabe lo que está haciendo.
   S: Jorge está siguiendo una estrategia suicida.
   P: Jorge va a perder la partida.
   D: Jorge va a perder mucho dinero.

$$\begin{array}{l} \sim H \vee S \\ (\sim H \supset P) \ \& \ (P \supset D) \\ \hline D \end{array}$$

Ejercicio 2.3

2. $(B \supset \sim L) \ \& \ (L \supset \sim B)$
4. $(\sim T \ \& \ \sim E) \supset [(B \vee C) \supset A]$
6. $A \supset (\sim T \ \& \ \sim E)$
8. $(\sim T \supset C) \ \& \ (T \supset [(\sim C \ \& \ B) \ \& \ A])$
10. $\sim(A \vee B) \vee [\sim(A \vee C) \vee \sim(C \vee B)]$
12. $(\sim B \vee \sim A) \vee \sim C$
14. $(\sim B \vee \sim A) \vee \sim C$
16. $(B \ \& \ A) \ \& \ C$

Ejercicio 2.4

A.

2. No
4. No

6. No
8. No
10. Sí

B.

2. Operador lógico principal: ~
   Componente proposicional inmediato: $[(F \vee G) \supset D]$
4. Operador lógico principal: $\vee$
   Componentes proposicionales inmediatos: ~G
   $(S \vee D)$
6. Operador lógico principal: $\supset$
   Componentes proposicionales inmediatos: R
   [(~F & ~T) & ~D]
8. Operador lógico principal: $\vee$
   Componentes proposicionales inmediatos: D
   $[(\sim F \ \& \sim T) \vee (\sim S \vee \sim D)]$

Capítulo 3

A.

2.

W	Z	W	⊃	(Z	⊃	W)
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	F
F	F	F	V	F	V	F

La fórmula es una tautología.

4.

A	B	(A	∨	B)	∨	~	(~	A	⊃	B)
V	V	V	V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V	F	F	V	V	F
F	V	F	V	V	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	F	V	V	V	F	F	F

La fórmula es una tautología.

6.

M	N	M	≡	(N	≡	M)
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F	F
F	F	F	F	F	V	F

La fórmula es semánticamente indeterminada.

8.

S	T	(S	≡	T)	⊃	(~	S	⊃	~	T)
V	V	V	V	V	V	F	V	V	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V	V	V	F
F	V	F	F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	F	V	V	F	V	V	F

La fórmula es una tautología.

10.

F	G	H	([(F	⊃	G)	&	(G	⊃	H)]	&	F)	&	~	H
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	V	V	F	V	F	F	F	V	F	V	F
V	F	V	V	F	F	F	F	V	V	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	F	V	V	F	V	F	F	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	V	F	V	F	V	F	F	F	F	V	F

La fórmula es una contradicción.

12.

P	Q	~	[[(P	∨	Q)	&	(Q	∨	Q)]	&	(~	P	&	~	Q)]
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	F	F	F	F	F	F	V	F	V	V	F

La fórmula es una tautología.

14.

R	S	~	R	⊃	[(R	∨	S)	⊃	S]
V	V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F	F	V	F

La fórmula es una tautología.

Apendice-1.pmd 396 13/07/07, 03:32 p.m.

16.

H	I	(H	≡	~	I)	&	(H	≡	I)
V	V	V	F	F	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	F	F	V	F	F	F	V	F

La fórmula es una contradicción.

B.

2. No. $\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q}$ puede ser una contradicción si en todas las filas de la tabla de verdad $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ tienen valores de verdad opuestos, o una fórmula semánticamente indeterminada en caso contrario.
4. Sí. $\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$ será una fórmula semánticamente indeterminada. En algunas líneas de la tabla de verdad el consecuente será verdadero, y por ende el condicional $\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$ será verdadero. Pero en otras líneas el consecuente será falso y por ende el condicional $\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$ será falso.

Ejercicio 3.2

A.

2.

M	N	O	[M	⊃	(N	⊃	M)]	[(O	&	~ O)	∨	(M	⊃	M)]
V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	F	F	V F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V	F	F V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V	F	F	V F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	F	F	V	F	F V	V	F	V	F
F	V	F	F	V	V	F	F	F	F	V F	V	F	V	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	F V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F	V	F	F	F	V F	V	F	V	F

Las dos fórmulas son semánticamente equivalentes.

4.

A	G	(~	G	⊃	~	A)	(A	⊃	G)
V	V	F	V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	V	F	F	V	F

Las dos fórmulas son semánticamente equivalentes.

6.

R	S	T	[T	&	(S	∨	R)]	[(T	&	S)	∨	R]
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	F
F	V	F	F	F	V	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

Las dos fórmulas no son semánticamente equivalentes. Sus valores de verdad difieren bajo las siguientes valuaciones:

$\mathcal{V}$(R) = **V**, $\mathcal{V}$(S) = **V** y $\mathcal{V}$(T) = **F**

$\mathcal{V}$(R) = **V**, $\mathcal{V}$(S) = **F** y $\mathcal{V}$(T) = **F**

8.

K	L	M	[~	(M	∨	K)	⊃	(L	⊃	K)]	[L	⊃	(M	&	K)]
V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V	F	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	V	F	V	V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F	V	V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F	V	F	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	V	F	V	F	V	F	F	V	V	F	F
F	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	F	V	F	F	F

Las dos fórmulas no son semánticamente equivalentes. Sus valores de verdad difieren bajo las siguientes valuaciones:

$\mathcal{V}$(K) = **V**, $\mathcal{V}$(L) = **V** y $\mathcal{V}$(M) = **F**

$\mathcal{V}$(K) = **F**, $\mathcal{V}$(L) = **V** y $\mathcal{V}$(M) = **V**

10.

A	B	(A	⊃	[B	⊃	(A	⊃	B)])	(B	⊃	[A	⊃	(B	⊃	A)])
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	F	F	F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	F	V	V	F	F
F	F	F	V	F	V	F	V	F	F	V	F	V	F	V	F

Las fórmulas son semánticamente equivalentes.

B.

2. Si suponemos que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son semánticamente equivalentes, entonces los valores de verdad de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son los mismos bajo cualquier valuación. Si $\mathcal{P}$ es verdadera bajo una valuación, $\mathcal{Q}$ también lo es, y bajo esa valuación $\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$ es verdadera. Si $\mathcal{P}$ es falsa bajo una valuación, $\mathcal{Q}$ también lo es, y bajo esa valuación $\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$ es falsa. Como el valor de verdad de $\mathcal{P}$ y de $\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$ es el mismo bajo cualquier valuación, $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$ son semánticamente equivalentes.

Ejercicio 3.3

2.

A	B	(B ⊃ B) ⊃ A	~ B	~ A
V	V	V V V V V	F V	F V
V	F	F V F V V	V F	F V
F	V	V V V F F	F V	V F
F	F	F V F F F	V F	V F

El conjunto es semánticamente inconsistente.

4.

A	B	C	A ⊃ B	B ⊃ C	A ⊃ C
V	V	V	V $\boxed{V}$ V	V $\boxed{V}$ V	V $\boxed{V}$ V
V	V	F	V V V	V F F	V F F
V	F	V	V F F	F V V	V V V
V	F	F	V F F	F V F	V F F
F	V	V	F $\boxed{V}$ V	V $\boxed{V}$ V	F $\boxed{V}$ V
F	V	F	F V V	V F F	F V F
F	F	V	F $\boxed{V}$ F	F $\boxed{V}$ V	F $\boxed{V}$ V
F	F	F	F $\boxed{V}$ F	F $\boxed{V}$ F	F $\boxed{V}$ F

El conjunto es semánticamente consistente.

6.

A	B	C	(A & B) & C	C ∨ (B ∨ A)	A ≡ (B ⊃ C)
V	V	V	V V V $\boxed{V}$ V	V $\boxed{V}$ V V V	V $\boxed{V}$ V V V
V	V	F	V V V F F	F V V V V	V F V F F
V	F	V	V F F F V	V V F V V	V V F V V
V	F	F	V F F F F	F V F V V	V V F V F
F	V	V	F F V F V	V V V V F	F F V V V
F	V	F	F F V F F	F V V V F	F V V F F
F	F	V	F F F F V	V V F F F	F F F V V
F	F	F	F F F F F	F F F F F	F F F V F

El conjunto es semánticamente consistente.

8.

X	Y	Z	X	⊃	(Y	⊃	(Z	⊃	X))	Y	⊃	~	X
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	V	V	V	F	V	V	V	F	F	V
V	F	V	V	$\boxed{V}$	F	V	V	V	V	F	$\boxed{V}$	F	V
V	F	F	V	$\boxed{V}$	F	V	F	V	V	F	$\boxed{V}$	F	V
F	V	V	F	$\boxed{V}$	V	F	V	F	F	V	$\boxed{V}$	V	F
F	V	F	F	$\boxed{V}$	V	V	F	V	F	V	$\boxed{V}$	V	F
F	F	V	F	$\boxed{V}$	F	V	V	F	F	F	$\boxed{V}$	V	F
F	F	F	F	$\boxed{V}$	F	V	F	V	F	F	$\boxed{V}$	V	F

El argumento es semánticamente consistente.

10.

M	N	O	~	(M	&	N)	~	(N	&	O)	~	(M	&	O)	M	∨	(N	&	O)]
V	V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F	F	V	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	$\boxed{V}$	V	F	F	$\boxed{V}$	F	F	F	$\boxed{V}$	V	F	F	V	$\boxed{V}$	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	F	V	V	V	V	F	F	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V	V	F	F	V	F	F	F	F	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F	F	V	F	F	V	V	F	F	V	F	F	F	F	V
F	F	F	V	F	F	F	V	F	F	F	V	F	F	F	F	F	F	F	F

El argumento es semánticamente consistente.

Ejercicio 3.4

A.

2.

A	D	B	~	(D	≡	A)	~	D	~	A	B	&	~	B
V	V	V	F	V	V	V	F	V	F	V	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V	F	V	F	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V	V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F	F	F	V	V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	F	F	V	V	F	F	F	V	F
F	F	V	F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	V	F	V	F	V	F	F	F	V	F

El argumento es semánticamente válido.

4.

F	G	H	G	∨	(F	&	~	H)	(H	⊃	F)	≡	G	~	G	∨	F	~	(F	∨	H)
V	V	V	V	$\boxed{V}$	V	F	F	V	V	V	V	$\boxed{V}$	V	F	V	$\boxed{V}$	V	$\boxed{F}$	V	V	V
V	V	F	V	$\boxed{V}$	V	V	V	F	F	V	V	$\boxed{V}$	V	F	V	$\boxed{V}$	V	$\boxed{F}$	V	V	F
V	F	V	F	F	V	F	F	V	V	V	V	F	F	V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	F	V	V	F	V	V	F
F	V	V	V	V	F	F	F	V	V	F	F	F	V	F	V	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	F	F	V	F	F	V	F	V	V	F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F	V	V	F	F	V	F	V	F	V	F	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	F	F	F

El argumento es semánticamente inválido.

6.

M	N	O	M	∨	M	[~	M	⊃	(~	O	∨	~	N)]	&	[(~	O	∨	N)	∨	(~	M	∨	N)]	N
V	V	V	V	V	V	F	V	V	F	V	F	F	V	V	F	V	V	V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	V	V	F	V	V	V	F	F	F	V	F	F	F	F	V	F	F	F
V	F	F	V	$\boxed{V}$	V	F	V	V	V	F	V	V	F	$\boxed{V}$	V	F	V	F	V	F	V	F	F	$\boxed{F}$
F	V	V	F	F	F	V	F	F	F	V	F	F	V	F	F	V	V	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F	V	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	V	F	V	V	F	V	V	F	V	V	F	V	F	V	V	F	V	F	F

El argumento es semánticamente inválido.

8.

A	B	C	[(A	&	B)	&	C]	∨	(~	A	⊃	~	C)	A	⊃	B	B	⊃	C	C	≡	B
V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	F	F	F	V	V	F	V	V	F	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	V	V	V	F	V	F	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	F	V	F	V	F	V	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V	V	F	V	V	F	F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	F	V	F	F	F	F	V	F	V	F	F	F	V	F	V	F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	V	V	F	V	V	F	F	V	F	F	V	F	F	V	F

El argumento es semánticamente válido.

10.

R	S	T	[R	&	(S	∨	T)]	≡	(R	∨	S)	S	⊃	~	S	T	∨	R
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	F	V	V	V	V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	F	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	F	F	V	V	V	F	F	V	V	V	F
F	V	F	F	F	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	F	V	V	V	F	F	F	F	V	V	F	V	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F	$\boxed{V}$	F	F	F	F	$\boxed{V}$	V	F	F	$\boxed{F}$	F

El argumento es semánticamente inválido.

Apendice-1.pmd 401 13/07/07, 03:32 p.m.

B.

2.

D	E	G	D	&	E	~	(D	&	G)	G
V	V	F	V	$\boxed{V}$	V	$\boxed{V}$	V	F	F	$\boxed{F}$

El argumento es semánticamente inválido.

4.

R	S	T	R	$\lor$	[S	$\supset$	(T	$\equiv$	R)]	(S	$\lor$	R)	&	(T	$\supset$	S)	T	&	~	S
V	V	V	V	$\boxed{V}$	V	V	V	V	V	V	V	V	$\boxed{V}$	V	V	V	V	$\boxed{F}$	F	V
V	V	F	V	$\boxed{V}$	V	F	F	F	V	V	V	V	$\boxed{V}$	F	V	V	F	$\boxed{F}$	F	V
V	F	F	V	$\boxed{V}$	F	V	F	F	V	F	V	V	$\boxed{V}$	F	V	F	F	$\boxed{F}$	V	F
F	V	F	F	$\boxed{V}$	V	V	F	V	F	V	V	F	$\boxed{V}$	F	V	V	F	$\boxed{F}$	F	V

El argumento es semánticamente inválido.

C.

2. D: Mucha gente cree que los polos se están derritiendo.
   P: Los polos se están derritiendo.
   T: La temperatura del planeta está aumentando.
   G: Mucha gente cree que la temperatura del planeta está aumentando.

$$\begin{array}{l} D \\ P \equiv T \\ \hline G \end{array}$$

D	G	P	T	D	P	$\equiv$	T	G
V	F	V	V	$\boxed{V}$	V	$\boxed{V}$	V	$\boxed{F}$

El argumento es inválido.

4. P: Los adolescentes pueden pensar.
   E: Los adolescentes pueden tener emociones.
   D: Los adolescentes pueden tener deseos.

$$\begin{array}{l} P \equiv E \\ E \supset D \\ D \supset {\sim}P \\ \hline {\sim}P \end{array}$$

D	E	P	P	≡	E	E	⊃	D	D	⊃	~	P	~	P
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	F	V
V	V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	F	V	F
V	F	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V	V	V	V	V	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	F	F	F	V	F	V	F	V
F	V	F	F	F	V	V	F	F	F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	F	F	F	V	F	F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	V	F	F	V	F	F	V	V	F	V	F

El argumento es semánticamente válido.

Capítulo 4

Ejercicio 4.1

2. $\mathcal{P}$ es una tautología si y sólo si el conjunto $\{\sim\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente. $\{\sim\mathcal{P}\}$ es el mismo conjunto que $\varnothing \cup \{\sim\mathcal{P}\}$; por lo tanto, $\mathcal{P}$ es una tautología si y sólo si $\varnothing \cup \{\sim\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente. De acuerdo con la definición de la implicación semántica, $\varnothing \cup \{\sim\mathcal{P}\}$ es semánticamente inconsistente si y sólo si $\varnothing \models \mathcal{P}$. En consecuencia, $\mathcal{P}$ es una tautología si y sólo si $\varnothing \models \mathcal{P}$.

4. Asumamos que Γ es semánticamente inconsistente. En tal caso, no existe ninguna valuación bajo la cual todos los miembros del conjunto sean verdaderos. Supongamos que $\mathcal{P}$ es cualquier fórmula arbitraria de *LP*. No existe ninguna valuación bajo la cual todos los elementos de Γ sean verdaderos y $\mathcal{P}$ sea falsa porque no existe ninguna valuación bajo la cual todos los elementos de Γ sean verdaderos. Por lo tanto, el conjunto Γ implica a cualquier fórmula.

6. Asumamos que el conjunto Γ es consistente y que $\mathcal{P}$ es una tautología. En tal caso, hay alguna valuación bajo la cual todos los miembros de Γ son verdaderos. Pero $\mathcal{P}$ también será verdadera bajo esa valuación porque $\mathcal{P}$ es verdadera bajo cualquier valuación. Por lo tanto, habrá alguna valuación bajo la cual todos los miembros de $\Gamma \cup \{\mathcal{P}\}$ son verdaderos, y por definición, $\Gamma \cup \{\mathcal{P}\}$ será consistente.

8. Asumamos que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son semánticamente equivalentes. Si $\{\mathcal{P}\} \models \mathcal{R}$, entonces bajo cualquier valuación en la que $\mathcal{P}$ sea verdadera, $\mathcal{R}$ también lo será. Como $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son semánticamente equivalentes, $\mathcal{Q}$ será verdadera siempre que $\mathcal{P}$ sea verdadera, y por lo tanto, $\mathcal{Q}$ será verdadera siempre que $\mathcal{R}$ sea verdadera. En tal caso, $\{\mathcal{Q}\} \models \mathcal{R}$. Utilizando el mismo razonamiento, podemos probar que si $\{\mathcal{Q}\} \models \mathcal{R}$, entonces $\{\mathcal{P}\} \models \mathcal{R}$.

Apendice-1.pmd 403 13/07/07, 03:32 p.m.

Ejercicio 4.2

2.

1	~(~F ∨ G) ✓		MC
2	F ∨ ~G ✓		MC
3	~~F ✓		1 (~∨)
4	~G		1 (~∨)
5	F		3 (~~)
6	F	~G	2 (∨)

El conjunto es semánticamente consistente cuando: $\mathcal{V}$(F) = **V** y $\mathcal{V}$(G) = **F**

4.

1	~[(A ∨ ~A) & B] ✓		MC
2	~(A ∨ ~A) ✓	~B	1 (~&)
3	~A		2 (~∨)
4	~~A		2 (~∨)
	×		

El conjunto es semánticamente consistente cuando: $\mathcal{V}$(A) = **V** y $\mathcal{V}$(B) = **F**
$\mathcal{V}$(A) = **F** y $\mathcal{V}$(B) = **F**

6.

1	M & (N & ~O) ✓			MC
2	~[M & (N & O)] ✓			MC
3	M			1 (&)
4	N & ~O ✓			1 (&)
5	N			4 (&)
6	~O			4 (&)
7	~M	~(N & O) ✓		2 (~&)
	×			
8		~N	~O	7 (~&)
		×		

El conjunto es semánticamente consistente cuando: $\mathcal{V}$(M) = **V**, $\mathcal{V}$(N) = **V** y $\mathcal{V}$(O) = **F**

Apendice-1.pmd 404 13/07/07, 03:32 p.m.

8.	1	~(~D ∨ E) ✓			MC
	2	D ∨ ~E ✓			MC
	3	~(~E & ~D) ✓			MC
	4	~~D ✓			1 (~∨)
	5	~E			1 (~∨)
	6	D			4 (~~)
	7	~~E	~~D ✓		3 (~&)
	8	×	D		7 (~~)
	9		D	~E	2 (∨)

El conjunto es semánticamente consistente cuando: $\mathscr{V}$(D) = **V** y $\mathscr{V}$(E) = **F**

10.	1	~(~R ∨ ~S) ✓				MC
	2	~[R & ~(S & T)] ✓				MC
	3	R ∨ (S ∨ T) ✓				MC
	4	~~R ✓				1 (~∨)
	5	~~S ✓				1 (~∨)
	6	R				4 (~~)
	7	S				5 (~~)
	8	~R	~~(S & T) ✓			2 (~&)
	9	×	S & T ✓			8 (~~)
	10		S			9 (&)
	11		T			9 (&)
	12		R	S ∨ T ✓		3 (∨)
	13			S	T	12 (∨)

El conjunto es semánticamente consistente cuando: $\mathscr{V}$(R) = **V**, $\mathscr{V}$(S) = **V** y $\mathscr{V}$(T) = **V**

Apendice-1.pmd 405 13/07/07, 03:32 p.m.

12.

1	H ∨ (I ∨ J) ✓				MC
2	~(H ∨ I) ✓				MC
3	~(I & J) ✓				MC
4	~(H & J) ✓				MC
5	~H				2 (~∨)
6	~I				2 (~∨)
7	H	I ∨ J ✓			1 (∨)
	×				
8		I	J		7 (∨)
		×			
9			~I	~J	3 (~&)
				×	
10		~H	~J		4 (~&)
			×		

El conjunto es semánticamente consistente cuando: $\mathscr{V}$(H) = **F,** $\mathscr{V}$(I) = **F** y $\mathscr{V}$(J) = **V**

Ejercicio 4.3

2.

1	K ≡ ~J ✓		MC
2	~K		MC
3	K	~K	1 (≡)
4	~J	~~J ✓	1 (≡)
5	×	J	4 (~~)

El conjunto es semánticamente consistente cuando: $\mathscr{V}$(J) = **V** y $\mathscr{V}$(K) = **F**

4.

1	~[~A ⊃ (C ⊃ E)] ✓		MC
2	A ⊃ E ✓		MC
3	~A		1 (~⊃)
4	~(C ⊃ E) ✓		1 (~⊃)
5	C		4 (~⊃)
6	~E		4 (~⊃)
7	~A	E	2 (⊃)
		×	

El conjunto es semánticamente consistente cuando: $\mathscr{V}$(A) = **F**, $\mathscr{V}$(C) = **V** y $\mathscr{V}$(E) = **F**

Apendice-1.pmd 406 13/07/07, 03:32 p.m.

6.

1	N ≡ M ✓		MC
2	~N		MC
3	M		MC
4	N	~N	1 (≡)
5	M	~M	1 (≡)
	×	×	

El conjunto es semánticamente inconsistente.

8.

1	(C ≡ A) ≡ ~C ✓				MC
2	C ≡ A ✓		~(C ≡ A) ✓		1 (≡)
3	~C		~~C ✓		1 (≡)
4	C	~C			2 (≡)
5	A	~A			2 (≡)
6	×		C		3 (~~)
7			C	~C	2 (~≡)
8			~A	A	2 (~≡)
				×	

El conjunto es semánticamente consistente cuando: $\mathscr{V}$(A) = **F** y $\mathscr{V}$(C) = **V**
$\mathscr{V}$(A) = **F** y $\mathscr{V}$(C) = **F**

10.

1	A ⊃ ~(A ≡ C) ✓			MC
2	~(A ⊃ C) ✓			MC
3	A			2 (~⊃)
4	~C			2 (~⊃)
5	~A	~(A ≡ C) ✓		1 (⊃)
	×			
6		A	~A	5 (~≡)
7		~C	C	5 (~≡)
			×	

El conjunto es semánticamente consistente cuando: $\mathscr{V}$(A) = **V** y $\mathscr{V}$(C) = **F**

Apendice-1.pmd 407 13/07/07, 03:32 p.m.

12.

1	X ⊃ Y ✓						MC
2	Y ⊃ X ✓						MC
3	~(X ≡ Y) ✓						MC
4	X		~X				3 (~≡)
5	~Y		Y				3 (~≡)
6	~X	Y	~X		Y		1 (⊃)
	×	×					
7			~Y	X	~Y	X	2 (⊃)
			×	×	×	×	

El conjunto es semánticamente inconsistente.

14.

1	~[R ⊃ (S ≡ T)] ✓				MC
2	R ≡ ~T ✓				MC
3	R ≡ S ✓				MC
4	R				1 (~⊃)
5	~(S ≡ T) ✓				1 (~⊃)
6	R			~R	2 (≡)
7	~T			~~T	2 (≡)
				×	
8	R		~R		3 (≡)
9	S		~S		3 (≡)
			×		
10	S	~S			5 (~≡)
11	~T	T			5 (~≡)
		×			

El conjunto es semánticamente consistente cuando: $\mathcal{V}$(R) = **V**, $\mathcal{V}$(S) = **V** y $\mathcal{V}$(T) = **F**

Apendice-1.pmd 408 13/07/07, 03:32 p.m.

Ejercicio 4.4

2.

1	$K \vee L$		MC
2	K	L	1 ($\vee$)

La fórmula no es una contradicción.

1	$\sim(K \vee L)$	MC
2	$\sim K$	1 ($\sim\vee$)
3	$\sim L$	1 ($\sim\vee$)

La fórmula no es una tautología.

Es una fórmula semánticamente indeterminada.

4.

1	$K \vee \sim K$		MC
2	K	$\sim K$	1 ($\vee$)

La fórmula no es una contradicción.

1	$\sim(K \vee \sim K)$ ✓	MC
2	$\sim K$	1 ($\sim\vee$)
3	$\sim\sim K$	1 ($\sim\vee$)
	×	

La fórmula es una tautología.

6.

1	$(A \vee \sim A) \supset (Z \supset Z)$ ✓			MC
2	$\sim(A \vee \sim A)$ ✓	$Z \supset Z$ ✓		1 ($\supset$)
3	$\sim A$			2 ($\sim\vee$)
4	$\sim\sim A$			2 ($\sim\vee$)
	×			
5		$\sim Z$	Z	2 ($\supset$)

La fórmula no es una contradicción.

Apendice-1.pmd 409 13/07/07, 03:32 p.m.

1	~[(A ∨ ~A) ⊃ (Z ⊃ Z)] ✓		MC
2	A ∨ ~A		1 (~⊃)
3	~(Z ⊃ Z) ✓		1 (~⊃)
4	Z		3 (~⊃)
5	~Z		3 (~⊃)
	×		

La fórmula es una tautología.

8.

1	(B ⊃ D) ⊃ [~D ⊃ ~(B & C)] ✓		MC
2	~(B ⊃ D) ✓	~D ⊃ ~(B & C)	1 (⊃)
3	B		2 (~⊃)
4	~D		2 (~⊃)

La fórmula no es una contradicción.

1	~[(B ⊃ D) ⊃ [~D ⊃ ~(B & C)]] ✓		MC
2	B ⊃ D ✓		1 (~⊃)
3	~[~D ⊃ ~(B & C)] ✓		1 (~⊃)
4	~D		3 (~⊃)
5	~~(B & C) ✓		3 (~⊃)
6	B & C ✓		5 (~~)
7	B		6 (&)
8	C		6 (&)
9	~B	D	2 (⊃)
	×	×	

La fórmula es una tautología.

10

1	~([H ∨ (F ∨ ~G)] & (G & [(F ∨ H) ⊃ ~G])) ✓		MC
2	~[H ∨ (F ∨ ~G)] ✓	~(G & [(F ∨ H) ⊃ ~G])	1 (~&)
3	~H		2 (~∨)
4	~(F ∨ ~G) ✓		2 (~∨)
5	~F		4 (~∨)
6	~~G ✓		4 (~∨)
7	G		6 (~~)

La fórmula no es una tautología.

Apendice-1.pmd 410 13/07/07, 03:32 p.m.

1	$[H \vee (F \vee \sim G)] \& (G \& [(F \vee H) \supset \sim G])$ ✓				MC
2	$H \vee (F \vee \sim G)$ ✓				1 (&)
3	$G \& [(F \vee H) \supset \sim G]$ ✓				1 (&)
4	G				3 (&)
5	$(F \vee H) \supset \sim G$ ✓				3 (&)
6	$\sim(F \vee H)$ ✓			$\sim G$	5 ($\supset$)
7	$\sim F$			×	6 ($\sim\vee$)
8	$\sim H$				6 ($\sim\vee$)
9	H	$F \vee \sim G$ ✓			2 ($\vee$)
	×				
10		F	$\sim G$		9 ($\vee$)
		×	×		

La fórmula es una contradicción.

12.

1	$\sim[(M \vee N) \supset \sim(M \vee N)]$ ✓				MC
2	$M \vee N$ ✓				1 ($\sim\supset$)
3	$\sim\sim(M \vee N)$ ✓				1 ($\sim\supset$)
4	$M \vee N$ ✓				3 ($\sim\sim$)
5	M		N		2 ($\vee$)
6	M	N	M	N	4 ($\vee$)

La fórmula no es una tautología.

1	$(M \vee N) \supset \sim(M \vee N)$ ✓		MC
2	$\sim(M \vee N)$ ✓	$\sim(M \vee N)$ ✓	1 ($\supset$)
3	$\sim M$	$\sim M$	2 ($\sim\vee$)
4	$\sim N$	$\sim N$	2 ($\sim\vee$)

La fórmula no es una contradicción.

Es una fórmula semánticamente indeterminada.

Apendice-1.pmd 411 13/07/07, 03:32 p.m.

14.

1	$\sim(P \vee Q) \equiv \sim(P \,\&\, Q)$ ✓			MC
2	$\sim(P \vee Q)$	$\sim\sim(P \vee Q)$ ✓		1 ($\equiv$)
3	$\sim(P \,\&\, Q)$	$\sim\sim(P \,\&\, Q)$ ✓		1 ($\equiv$)
4		$P \vee Q$ ✓		2 ($\sim\sim$)
5		$P \,\&\, Q$ ✓		3 ($\sim\sim$)
6		P		5 (&)
7		Q		5 (&)
8		P	Q	4 ($\vee$)

La fórmula no es una contradicción.

1	$\sim[\sim(P \vee Q) \equiv \sim(P \,\&\, Q)]$ ✓					MC
2	$\sim(P \vee Q)$ ✓	$\sim\sim(P \vee Q)$ ✓				1 ($\sim\equiv$)
3	$\sim\sim(P \,\&\, Q)$ ✓	$\sim(P \,\&\, Q)$ ✓				1 ($\sim\equiv$)
4	$P \,\&\, Q$ ✓					3 ($\sim\sim$)
5	P					4 (&)
6	Q					4 (&)
7	$\sim P$					2 ($\sim\vee$)
8	$\sim Q$					2 ($\sim\vee$)
9	×	$P \vee Q$ ✓				2 ($\sim\sim$)
10		P		Q		9 ($\vee$)
11		$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P$	$\sim Q$	3 ($\sim$&)
		×			×	

La fórmula no es una tautología.

Es una fórmula semánticamente indeterminada.

Apendice-1.pmd 412 13/07/07, 03:32 p.m.

Ejercicio 4.5

2.

1	[~(B & A) ≡ (~B ∨ ~A)] ✓				MC
2	~(B & A) ✓		~~(B & A) ✓		1 (~≡)
3	~(~B ∨ ~A) ✓		~B ∨ ~A ✓		1 (~≡)
4	~~B				3 (~∨)
5	~~A				3 (~∨)
6	~B	~A			2 (~&)
7	×	×	B & A ✓		2 (~~)
8			B		7 (&)
9			A		7 (&)
10			~B	~A	3 (∨)
			×	×	

Las fórmulas son semánticamente equivalentes.

4.

1	~([(P ∨ Q) ⊃ R] ≡ [(P ⊃ R) & (Q ⊃ R)]) ✓									MC
2	(P ∨ Q) ⊃ R ✓				~[(P ∨ Q) ⊃ R] ✓					1 (~≡)
3	~[(P ⊃ R) & (Q ⊃ R)] ✓				(P ⊃ R) & (Q ⊃ R) ✓					1 (~≡)
4					P ∨ Q ✓					2 (~⊃)
5					~R					2 (~⊃)
6					P ⊃ R ✓					3 (&)
7					Q ⊃ R ✓					3 (&)
8					P		Q			4 (∨)
9					~P	R	~P		R	6 (⊃)
					×	×			×	
10							~Q	R		7 (⊃)
11	~(P ⊃ R) ✓		~(Q ⊃ R) ✓				×	×		3 (~&)
12	P		Q							11 (~⊃)
13	~R		~R							11 (~⊃)
14	~(P ∨ Q) ✓	R	~(P ∨ Q) ✓	R						2 (⊃)
15	~P	×	~P	×						14 (~∨)
16	~Q		~Q							14 (~∨)
	×		×							

Las fórmulas son semánticamente equivalentes.

6.

1	~([D ∨ (E & F)] ≡ [(D ∨ E) & (D ∨ F)]) ✓					MC
2	D ∨ (E & F) ✓		~[D ∨ (E & F)] ✓			1 (~≡)
3	~[(D ∨ E) & (D ∨ F)] ✓		(D ∨ E) & (D ∨ F) ✓			1 (~≡)
4			D ∨ E ✓			3 (&)
5			D ∨ F ✓			3 (&)
6			~D			2 (~∨)
7			~(E & F) ✓			2 (~∨)
8			D ×	E		4 (∨)
9				D ×	F	5 (∨)
10				~E	~F	7 (~&)
11	D		E & F ✓	×	×	2 (∨)
12			E			11 (&)
13			F			11 (&)
14	~(D ∨ E) ✓	~(D ∨ F) ✓	~(D ∨ E) ✓	~(D ∨ F) ✓		3 (~&)
15	~D	~D	~D	~D		14 (~∨)
16	~E	~F	~E	~F		14 (~∨)
	×	×	×	×		

Las fórmulas son semánticamente equivalentes.

Apendice-1.pmd 414 13/07/07, 03:32 p.m.

8.	1	$\sim([N \supset (O \equiv P)] \equiv [(N \supset O) \equiv (N \supset P)]) \checkmark$	MC
	2	$N \supset (O \equiv P) \checkmark$; $\sim[N \supset (O \equiv P)] \checkmark$	1 $(\sim\equiv)$
	3	$\sim[(N \supset O) \equiv (N \supset P)] \checkmark$; $(N \supset O) \equiv (N \supset P) \checkmark$	1 $(\sim\equiv)$
	4	N	2 $(\sim\supset)$
	5	$\sim(O \equiv P) \checkmark$	2 $(\sim\supset)$
	6	$N \supset O \checkmark$; $\sim(N \supset O)$	3 $(\equiv)$
	7	$N \supset P \checkmark$; $\sim(N \supset P)$	3 $(\equiv)$
	8	N	6 $(\sim\supset)$
	9	$\sim O$	6 $(\sim\supset)$
	10	N	7 $(\sim\supset)$
	11	$\sim P$	7 $(\sim\supset)$
	12	$\sim N$ × ; O	6 $(\supset)$
	13	$\sim N$ × ; P	7 $(\supset)$
	14	O ; $\sim O$; O ; $\sim O$	5 $(\sim\equiv)$
	15	$\sim P$ × ; P × ; $\sim P$ × ; P ×	5 $(\sim\equiv)$
	16	$N \supset O \checkmark$; $\sim(N \supset O) \checkmark$	3 $(\sim\equiv)$
	17	$\sim(N \supset P) \checkmark$; $N \supset P \checkmark$	3 $(\sim\equiv)$
	18	N	17 $(\sim\supset)$
	19	$\sim P$	17 $(\sim\supset)$
	20	N	16 $(\sim\supset)$
	21	$\sim O$	16 $(\sim\supset)$
	22	$\sim N$; O	16 $(\supset)$
	23	× ; $\sim N$ × ; P	17 $(\supset)$
	24	$\sim N$ × ; $O \equiv P \checkmark$; $\sim N$ × ; $O \equiv P \checkmark$	2 $(\supset)$
	25	O ; $\sim O$; O ; $\sim O$	24 $(\equiv)$
	26	P × ; $\sim P$ × ; P × ; $\sim P$ ×	24 $(\equiv)$

Las fórmulas son semánticamente equivalentes.

Apendice-1.pmd 415 13/07/07, 03:32 p.m.

Ejercicio 4.6

2.

1	$(\sim A \vee B) \supset (C \,\&\, D)$ ✓		MC
2	$\sim(\sim A \vee B)$ ✓		MC
3	$\sim\sim(C \,\&\, D)$ ✓		MC
4	$C \,\&\, D$ ✓		3 $(\sim\sim)$
5	$\sim\sim A$ ✓		2 $(\sim\vee)$
6	$\sim B$		2 $(\sim\vee)$
7	A		5 $(\sim\sim)$
8	C		4 (&)
9	D		4 (&)
10	$\sim(\sim A \vee B)$	$C \,\&\, D$ ✓	1 $(\supset)$
11		C	10 (&)
12		D	10 (&)

El argumento es semánticamente inválido.

4.

1	$(S \equiv \sim T) \,\&\, T$ ✓		MC
2	$[T \vee ((R \supset S) \,\&\, R)] \supset \sim S$		MC
3	$\sim(T \supset \sim S)$ ✓		MC
4	T		3 $(\sim\supset)$
5	$\sim\sim S$ ✓		3 $(\sim\supset)$
6	S		5 $(\sim\sim)$
7	$S \equiv \sim T$ ✓		1 (&)
8	T		1 (&)
9	S	$\sim S$	7 $(\equiv)$
10	$\sim T$	$\sim\sim T$	7 $(\equiv)$
	×	×	

El argumento es semánticamente válido.

Apendice-1.pmd 416 13/07/07, 03:32 p.m.

6.

1		$(P \supset Q) \supset P$ ✓		MC
2		$(Q \supset P) \supset Q$ ✓		MC
3		$\sim(\sim P \vee \sim Q)$ ✓		MC
4		$\sim\sim P$ ✓		3 $(\sim\vee)$
5		$\sim\sim Q$ ✓		3 $(\sim\vee)$
6		P		4 $(\sim\sim)$
7		Q		5 $(\sim\sim)$
8	$\sim(P \supset Q)$ ✓	P		1 $(\supset)$
9	P			8 $(\sim\supset)$
10	$\sim Q$			8 $(\sim\supset)$
11	×	$\sim(Q \supset P)$	Q	2 $(\supset)$

El argumento es semánticamente inválido.

8.

1		$C \vee \sim(E \,\&\, F)$ ✓		MC
2		$\sim E$		MC
3		$\sim(C \vee F)$ ✓		MC
4		$\sim C$		MC
5		$\sim C$		3 $(\sim\vee)$
6		$\sim F$		3 $(\sim\vee)$
7	C	$\sim(E \,\&\, F)$ ✓		1 $(\vee)$
	×			
8		$\sim E$	$\sim F$	7 $(\sim\&)$

El argumento es semánticamente inválido.

10.

1		$(G \equiv H) \vee (\sim G \equiv H)$			MC
2		$\sim[(\sim G \equiv \sim H) \vee \sim(G \equiv H)]$ ✓			MC
3		$\sim(\sim G \equiv \sim H)$ ✓			2 $(\sim\vee)$
4		$\sim\sim(G \equiv H)$ ✓			2 $(\sim\vee)$
5		$G \equiv H$ ✓			4 $(\sim\sim)$
6	G		$\sim G$		5 $(\equiv)$
7	H		$\sim H$		5 $(\equiv)$
8	$\sim G$	$\sim\sim G$	$\sim G$	$\sim\sim G$	3 $(\sim\equiv)$
9	$\sim\sim H$	$\sim H$	$\sim\sim H$	$\sim H$	3 $(\sim\equiv)$
	×	×	×	×	

El argumento es semánticamente válido.

Apendice-1.pmd 417 13/07/07, 03:32 p.m.

12.

1	N ∨ (M & ~O) ✓	MC
2	(O ∨ M) ≡ N ✓	MC
3	~N ∨ M ✓	MC
4	~~(M ∨ O) ✓	MC
5	M ∨ O ✓	4 (~~)
6	O ∨ M ✓ ~(O ∨ M) ✓	2 (≡)
7	N ~N	2 (≡)
8	~O	6 (~∨)
9	~M	6 (~∨)
10	M O M O	5 (∨)
	× × (bajo M y O de la rama derecha)	
11	~N M ~N M	3 (∨)
	× ×	
12	N M & ~O N M & ~O	1 (∨)
13	O M O M O M O M	6 (∨)

El argumento es semánticamente inválido.

14

1	K ⊃ J ✓	MC
2	J ⊃ L ✓	MC
3	L ⊃ M ✓	MC
4	~(K ⊃ M) ✓	MC
5	K	4 (~⊃)
6	~M	4 (~⊃)
7	~K J	1 (⊃)
	×	
8	~J L	2 (⊃)
	×	
9	~L M	3 (⊃)
	× ×	

El argumento es semánticamente válido.

Apendice-1.pmd 418 13/07/07, 03:32 p.m.

Capítulo 5

Ejercicio 5.1

2. Derive: $A \vee C$

1	$(F \& D) \supset (A \vee C)$	Suposición
2	$D \& (A \vee B)$	Suposición
3	$F \& \sim E$	Suposición
4	D	2 (&E)
5	F	3 (&E)
6	$F \& D$	4, 5 (&I)
7	$A \vee C$	1, 6 (⊃E)

4. Derive: $(Z \& Y) \supset (W \& X)$

1	$(Y \& Z) \supset (X \& W)$	Suposición
2	│ $Z \& Y$	Suposición
3	│ Y	2 (&E)
4	│ Z	2 (&E)
5	│ $Y \& Z$	3, 4 (&I)
6	│ $X \& W$	1, 5 (⊃E)
7	│ X	6 (&E)
8	│ W	6 (&E)
9	│ $W \& X$	7, 8 (&I)
10	$(Z \& Y) \supset (W \& X)$	2-9 (⊃I)

6. Derive: $H \equiv Y$

1	$(R \supset G) \supset (H \equiv Y)$	Suposición
2	$A \& (A \supset G)$	Suposición
3	│ R	Suposición
4	│ $A \supset G$	2 (&E)
5	│ A	2 (&E)
6	│ G	4, 5 (⊃E)
7	$R \supset G$	3-6 (⊃I)
8	$H \equiv Y$	1, 7 (⊃E)

Apendice-1.pmd 419 13/07/07, 03:32 p.m.

Ejercicio 5.2

2. Derive: A

1	B & ~B	Suposición
2	~A	Suposición
3	B	1 (&E)
4	~B	1 (&E)
5	A	2-4 (~E)

4. Derive: T & S

1	~(T & S) $\supset$ (Q & ~R)	Suposición
2	R	Suposición
3	~(T & S)	Suposición
4	Q & ~R	1, 3 ($\supset$E)
5	~R	4 (&E)
6	R	2 (R)
7	T & S	3-6 (~E)

6. Derive: P $\vee$ Q

1	~M & N	Suposición
2	N $\supset$ P	Suposición
3	P $\supset$ M	Suposición
4	~(P $\vee$ Q)	Suposición
5	N	1 (&E)
6	P	2, 5 ($\supset$E)
7	M	3, 6 ($\supset$E)
8	~M	1 (&E)
9	P $\vee$ Q	4-8 (~E)

Ejercicio 5.3

2. Derive: ~A

1	(B $\vee$ C) $\supset$ ~A	Suposición
2	C	Suposición
3	B $\vee$ C	2 ($\vee$I)
4	~A	1, 3 ($\supset$E)

Apendice-1.pmd 420 13/07/07, 03:32 p.m.

4. Derive: F

1	$\sim G \vee F$	Suposición
2	$\sim G \supset F$	Suposición
3	│ $\sim G$	Suposición
4	│ F	2, 3 ($\supset$E)
5	│ F	Suposición
6	│ F	5 (R)
7	F	1, 3-6 ($\vee$E)

6. Derive: T

1	$M \vee T$	Suposición
2	$\sim T \supset \sim M$	Suposición
3	│ M	Suposición
4	│ │ $\sim T$	Suposición
5	│ │ $\sim M$	2, 4 ($\supset$E)
6	│ │ M	3 (R)
7	│ T	4-6 ($\sim$E)
8	│ T	Suposición
9	│ T	8 (R)
10	T	1, 3-9 ($\vee$E)

Ejercicio 5.4

2. Derive: $\sim B \equiv A$

1	$(\sim B \supset A) \,\&\, (A \supset \sim B)$	Suposición
2	$\sim B \supset A$	1 (&E)
3	$A \supset \sim B$	1 (&E)
4	│ $\sim B$	Suposición
5	│ A	2, 4 ($\supset$E)
6	│ A	Suposición
7	│ $\sim B$	3, 6 ($\supset$E)
8	$\sim B \equiv A$	4-7 ($\equiv$I)

4. Derive: F

1	$C \equiv F$	Suposición
2	$D \supset F$	Suposición
3	$C \vee D$	Suposición
4	│ C	Suposición
5	│ F	1, 4 ($\equiv$E)
6	│ D	Suposición
7	│ F	2, 6 ($\supset$E)
8	F	3, 4-7 ($\vee$E)

Apendice-1.pmd 421 13/07/07, 03:32 p.m.

6. Derive: U

1	~T ⊃ U	Suposición
2	T ∨ M	Suposición
3	~U ≡ M	Suposición
4	M ⊃ ~T	Suposición
5	| ~U	Suposición
6	| M	3, 5 (≡E)
7	| ~T	4, 6 (⊃E)
8	| U	1, 7 (⊃E)
9	| ~U	5 (R)
10	U	5-9 (~E)

Ejercicio 5.5

2. Derive: ~G

1	G ⊃ (F & ~G)	Suposición
2	| G	Suposición
3	| F & ~G	1, 2 (⊃E)
4	| ~G	3 (&E)
5	| G	2 (R)
6	~G	2-5 (~I)

4. Derive: B

1	P ⊃ [S ≡ (A & B)]	Suposición
2	P & S	Suposición
3	P	2 (&E)
4	S	2 (&E)
5	S ≡ (A & B)	1, 3 (⊃E)
6	A & B	4, 5 (≡E)
7	B	6 (&E)

6. Derive: K & L

1	~A & ~B	Suposición
2	A	Suposición
3	| ~(K & L)	Suposición
4	| ~A	1 (&E)
5	| A	2 (R)
6	K & L	3-5 (~E)

Apendice-1.pmd 422 13/07/07, 03:32 p.m.

8. Derive: F ≡ G

1	~F & ~G	Suposición
2	F	Suposición
3	~G	Suposición
4	~F	1 (&E)
5	F	2 (R)
6	G	3-5 (~E)
7	G	Suposición
8	~F	Suposición
9	~G	1 (&E)
10	G	7 (R)
11	F	8-10 (~E)
12	F ≡ G	2-11(≡I)

10. Derive: H ⊃ (~F & G)

1	H ⊃ (F ≡ G)	Suposición
2	(I ∨ G) ⊃ ~F	Suposición
3	(F ≡ G) ⊃ ~I	Suposición
4	~G ⊃ I	Suposición
5	H	Suposición
6	~G	Suposición
7	I	4, 6 (⊃E)
8	F ≡ G	1, 5 (⊃E)
9	~I	3, 8 (≡E)
10	G	6-9 (~E)
11	I ∨ G	10 (∨I)
12	~F	2, 11 (⊃E)
13	~F & G	10, 12 (&I)
14	H ⊃ (~F & G)	5-13 (⊃I)

12. Derive: M

1	N & (N ⊃ ~~M)	Suposición
2	N ⊃ ~~M	1 (&E)
3	N	1 (&E)
4	~~M	2, 3 (⊃E)
5	~M	Suposición
6	~~M	4 (R)
7	~M	5 (R)
8	M	5-7 (~E)

14. Derive: N ⊃ (L ⊃ ~M)

1	(N ∨ O) & ~M	Suposición
2	│ N	Suposición
3	│ │ L	Suposición
4	│ │ ~M	1 (&E)
5	│ L ⊃ ~M	3-4 (⊃I)
6	N ⊃ (L ⊃ ~M)	2-5 (⊃I)

Ejercicio 5.6

2. Derive: ~R

1	M & (N & ~P)	Suposición
2	(M ∨ S) ⊃ ~R	Suposición
3	M	1 (&E)
4	M ∨ S	3 (∨I)
5	~R	2, 4 (⊃E)

4. Derive: ~(F & I)

1	F ⊃ (G & H)	Suposición
2	~H	Suposición
3	│ F & I	Suposición
4	│ F	3 (&E)
5	│ G & H	1, 4 (⊃E)
6	│ H	5 (&E)
7	│ ~H	2 (R)
8	~(F & I)	3-7 (~I)

6. Derive: H ⊃ (K ⊃ J)

1	H ⊃ (I ⊃ J)	Suposición
2	K ⊃ I	Suposición
3	│ H	Suposición
4	│ │ K	Suposición
5	│ │ I ⊃ J	1, 3 (⊃E)
6	│ │ I	2, 4 (⊃E)
7	│ │ J	5, 6 (⊃E)
8	│ K ⊃ J	4-7 (⊃I)
9	H ⊃ (K ⊃ J)	3-8 (⊃I)

Apendice-1.pmd 424 13/07/07, 03:32 p.m.

8. Derive: ~D

1	~A ≡ B	Suposición
2	C ⊃ A	Suposición
3	B & C	Suposición
4	D	Suposición
5	B	3 (&E)
6	C	3 (&E)
7	A	2, 6 (⊃E)
8	~A	1, 5 (≡E)
9	~D	4-8 (~I)

10. Derive: B ⊃ [C ⊃ (D ⊃ A)]

1	A	Suposición
2	B	Suposición
3	C	Suposición
4	D	Suposición
5	A	1 (R)
6	D ⊃ A	4-5 (⊃I)
7	C ⊃ (D ⊃ A)	3-6 (⊃I)
8	B ⊃ [C ⊃ (D ⊃ A)]	2-7 (⊃I)

Ejercicio 5.7

2. Derive: D ∨ ~E

1	C ⊃ D	Suposición
2	F & C	Suposición
3	C	2 (&E)
4	D	1, 3 (⊃E)
5	D ∨ ~E	4 (∨I)

4. Derive: G & H

1	(F ∨ G) ⊃ (G ≡ H)	Suposición
2	G	Suposición
3	F ∨ G	2 (∨I)
4	G ≡ H	1, 3 (⊃E)
5	H	2, 4 (≡E)
6	G & H	2, 5 (&I)

Apendice-1.pmd 425 13/07/07, 03:32 p.m.

6. Derive: M

```
1 │ (~M ∨ O) ⊃ N          Suposición
2 │ P & ~N                Suposición
  ├──────────
3 │ │ ~M                  Suposición
  │ ├──────
4 │ │ ~M ∨ O              3 (∨I)
5 │ │ N                   1, 4 (⊃E)
6 │ │ ~N                  2 (&E)
7 │ M                     3-6 (~E)
```

Ejercicio 5.8

2. Derive: M ⊃ (N ⊃ M)

```
1 │ │ M                   Suposición
  │ ├────
2 │ │ │ N                 Suposición
  │ │ ├───
3 │ │ │ M                 1 (R)
4 │ │ N ⊃ M               2-3 (⊃I)
5 │ M ⊃ (N ⊃ M)           1-4 (⊃I)
```

4. Derive: (M ≡ N) ⊃ (M ⊃ N)

```
1 │ │ M ≡ N               Suposición
  │ ├──────
2 │ │ │ M                 Suposición
  │ │ ├───
3 │ │ │ N                 1, 2 (≡E)
4 │ │ M ⊃ N               2-3 (⊃I)
5 │ (M ≡ N) ⊃ (M ⊃ N)     1-4 (⊃I)
```

6. Derive: (M & M) ≡ M

```
1 │ │ M & M               Suposición
  │ ├──────
2 │ │ M                   1 (&E)
3 │ │ M                   Suposición
  │ ├──────
4 │ │ M                   3 (R)
5 │ │ M & M               3, 4 (&I)
6 │ (M & M) ≡ M           1-5 (≡I)
```

8. Derive: M ∨ ~M

```
1 │ │ ~(M ∨ ~M)           Suposición
  │ ├──────────
2 │ │ │ M                 Suposición
  │ │ ├────────
3 │ │ │ M ∨ ~M            2 (∨I)
4 │ │ │ ~(M ∨ ~M)         1 (R)
5 │ │ ~M                  2-4 (~I)
6 │ │ M ∨ ~M              5 (∨I)
7 │ │ ~(M ∨ ~M)           1 (R)
8 │ M ∨ ~M                1-7 (~E)
```


Apendice-1.pmd 426 13/07/07, 03:32 p.m.

10. Derive: ~M ⊃ [(N & M) ⊃ O]

```
1 | | ~M                    Suposición
  | |-----
2 | | | N & M             Suposición
  | | |------
3 | | | | ~O              Suposición
  | | | |----
4 | | | | ~M              1 (R)
5 | | | | M               2 (&E)
6 | | | O                 3-5 (~E)
7 | | (N & M) ⊃ O         2-6 (⊃I)
8 | ~M ⊃ [(N & M) ⊃ O]    1-7 (⊃I)
```

Ejercicio 5.9

2. Derive: ~~D

```
1 | D                     Suposición
  |----
2 | | ~D                  Suposición
  | |----
3 | | D                   1 (R)
4 | | ~D                  2 (R)
5 | ~~D                   2-4 (~I)
```

Derive: D

```
1 | ~~D                   Suposición
  |-----
2 | | ~D                  Suposición
  | |----
3 | | ~~D                 1 (R)
4 | | ~D                  2 (R)
5 | D                     2-4 (~E)
```

4. Derive: ~E ⊃ ~D

```
1 | D ⊃ E                 Suposición
  |-------
2 | | ~E                  Suposición
  | |----
3 | | | D                 Suposición
  | | |---
4 | | | E                 1, 3 (⊃E)
5 | | | ~E                2 (R)
6 | | ~D                  3-5 (~I)
7 | ~E ⊃ ~D               2-6 (⊃I)
```

Derive: D ⊃ E

```
1 | ~E ⊃ ~D               Suposición
  |---------
2 | | D                   Suposición
  | |---
3 | | | ~E                Suposición
  | | |----
4 | | | ~D                1, 3 (⊃E)
5 | | | D                 2 (R)
6 | | E                   3-5 (~E)
7 | D ⊃ E                 2-6 (⊃I)
```


Apendice-1.pmd 427 13/07/07, 03:32 p.m.

Ejercicio 5.10

2.

1	$L \supset {\sim}L$	Suposición
2	${\sim}L \supset L$	Suposición
3	$\quad\vert\ L$	Suposición
4	$\quad\vert\ {\sim}L$	1, 3 ($\supset$E)
5	$\quad\vert\ L$	3 (R)
6	${\sim}L$	3-5 (~I)
7	L	2, 6 ($\supset$E)

4.

1	$L \equiv {\sim}(L \equiv L)$	Suposición
2	L	Suposición
3	$\quad\vert\ L$	Suposición
4	$\quad\vert\ L$	3 (R)
5	$\quad\vert\ L$	Suposición
6	$\quad\vert\ L$	5 (R)
7	$L \equiv L$	3-6 ($\equiv$I)
8	${\sim}(L \equiv L)$	1, 2 ($\equiv$E)

6.

1	${\sim}K \supset {\sim}M$	Suposición
2	$M \supset (K \supset N)$	Suposición
3	$(L \,\&\, M) \,\&\, {\sim}N$	Suposición
4	$L \,\&\, M$	3 (&E)
5	$\quad\vert\ {\sim}K$	Suposición
6	$\quad\vert\ {\sim}M$	1, 5 ($\supset$E)
7	$\quad\vert\ M$	4 (&E)
8	K	5-7 (~E)
9	M	4 (&E)
10	$K \supset N$	2, 9 ($\supset$E)
11	N	8, 10 ($\supset$E)
12	${\sim}N$	3 (&E)

Apendice-1.pmd 428 13/07/07, 03:32 p.m.

Ejercicio 5.11

A.

2. Derive: ~B ⊃ ~A

1	│ A ⊃ B	Suposición
2	│ │ ~B	Suposición
3	│ │ │ A	Suposición
4	│ │ │ B	1, 3 (⊃E)
5	│ │ │ ~B	2 (R)
6	│ │ ~A	3-5 (~I)
7	│ ~B ⊃ ~A	2-6 (⊃I)

4. Derive: Y

1	│ Y ∨ (Y ∨ Y)	Suposición
2	│ │ Y	Suposición
3	│ │ Y	2 (R)
4	│ │ Y ∨ Y	Suposición
5	│ │ │ Y	Suposición
6	│ │ │ Y	5 (R)
7	│ │ │ Y	Suposición
8	│ │ │ Y	7 (R)
9	│ │ Y	4, 5-8 (∨E)
10	│ Y	1, 2-9 (∨E)

6. Derive: D

1	│ ~(E ∨ F)	Suposición
2	│ E ≡ ~(F ≡ ~D)	Suposición
3	│ │ ~D	Suposición
4	│ │ │ ~E	Suposición
5	│ │ │ │ ~(F ≡ ~D)	Suposición
6	│ │ │ │ E	2, 5 (≡E)
7	│ │ │ │ ~E	4 (R)
8	│ │ │ F ≡ ~D	5-7 (~E)
9	│ │ │ F	3, 8 (≡E)
10	│ │ │ E ∨ F	9 (∨I)
11	│ │ │ ~(E ∨ F)	1 (R)
12	│ │ E	4-11 (~E)
13	│ │ E ∨ F	12 (∨I)
14	│ │ ~(E ∨ F)	1 (R)
15	│ D	3-14 (~E)

Apendice-1.pmd 429 13/07/07, 03:32 p.m.

8. Derive: M

1	$M \equiv (\sim N \lor O)$	Suposición
2	$N \supset O$	Suposición
3	$\mid\ \sim(\sim N \lor O)$	Suposición
4	$\mid\ \mid\ N$	Suposición
5	$\mid\ \mid\ O$	2, 4 ($\supset$E)
6	$\mid\ \mid\ \sim N \lor O$	5 ($\lor$I)
7	$\mid\ \mid\ \sim(\sim N \lor O)$	3 (R)
8	$\mid\ \sim N$	4-7 (~I)
9	$\mid\ \sim N \lor O$	8 ($\lor$I)
10	$\mid\ \sim(\sim N \lor O)$	3 (R)
11	$\sim N \lor O$	3-10 (~E)
12	M	1, 11 ($\equiv$E)

10. Derive: ~M

1	$N \lor \sim M$	Suposición
2	$\sim N \lor \sim M$	Suposición
3	$\mid\ N$	Suposición
4	$\mid\ \mid\ \sim N$	Suposición
5	$\mid\ \mid\ \mid\ M$	Suposición
6	$\mid\ \mid\ \mid\ N$	3 (R)
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \sim N$	4 (R)
8	$\mid\ \mid\ \sim M$	5-7 (~I)
9	$\mid\ \mid\ \sim M$	Suposición
10	$\mid\ \mid\ \sim M$	9 (R)
11	$\mid\ \sim M$	2, 4-10 ($\lor$E)
12	$\mid\ \sim M$	Suposición
13	$\mid\ \sim M$	12 (R)
14	$\sim M$	1, 3-13 ($\lor$E)

Apendice-1.pmd 430 13/07/07, 03:32 p.m.

12. Derive: ~K ≡ ~(J ⊃ L)

1	(J ⊃ L) ⊃ K	Suposición
2	(J ⊃ L) ∨ ~K	Suposición
3	| ~K	Suposición
4	| | J ⊃ L	Suposición
5	| | K	1, 4 (⊃E)
6	| | ~K	3 (R)
7	| ~(J ⊃ L)	4-6 (~I)
8	| ~(J ⊃ L)	Suposición
9	| | J ⊃ L	Suposición
10	| | | K	Suposición
11	| | | J ⊃ L	9 (R)
12	| | | ~(J ⊃ L)	8 (R)
13	| | ~K	10-12 (~I)
14	| | ~K	Suposición
15	| | ~K	14 (R)
16	| ~K	2, 9-15 (∨E)
17	~K ≡ ~(J ⊃ L)	3-16 (≡I)

14. Derive: B ∨ E

1	[B ∨ (D ∨ E)] & (B ≡ C)	Suposición
2	D ⊃ A	Suposición
3	A ⊃ ~D	Suposición
4	B ∨ (D ∨ E)	1 (&E)
5	| B	Suposición
6	| B ∨ E	5 (∨I)
7	| D ∨ E	Suposición
8	| | D	Suposición
9	| | | ~(B ∨ E)	Suposición
10	| | | A	2, 8 (⊃E)
11	| | | ~D	3, 10 (⊃E)
12	| | | D	8 (R)
13	| | B ∨ E	9-12 (~E)
14	| | E	Suposición
15	| | B ∨ E	14 (∨I)
16	| B ∨ E	7, 8-15 (∨E)
17	B ∨ E	4, 5-16 (∨E)

Apendice-1.pmd 431 13/07/07, 03:32 p.m.

16. Derive: ~P ≡ Q

1	~(P ≡ Q)	Suposición
2	~P	Suposición
3	~Q	Suposición
4	P	Suposición
5	~Q	Suposición
6	P	4 (R)
7	~P	2 (R)
8	Q	5-7 (~E)
9	Q	Suposición
10	~P	Suposición
11	Q	9 (R)
12	~Q	3 (R)
13	P	10-12 (~E)
14	P ≡ Q	4-13 (≡I)
15	~(P ≡ Q)	1 (R)
16	Q	3-15 (~E)
17	Q	Suposición
18	P	Suposición
19	P	Suposición
20	Q	17 (R)
21	Q	Suposición
22	P	18 (R)
23	P ≡ Q	19-22 (≡I)
24	~(P ≡ Q)	1 (R)
25	~P	18-24 (~I)
26	~P ≡ Q	2-25 (≡I)

B.

2. Derive: N ≡ ~O

1	M ≡ ~M	Suposición
2	~(N ≡ ~O)	Suposición
3	M	Suposición
4	~M	1, 3 (≡E)
5	M	3 (R)
6	~M	3-5 (~I)
7	M	1, 6 (≡E)
8	N ≡ ~O	2-7 (~E)

Apendice-1.pmd 432 13/07/07, 03:32 p.m.

4. Derive: ~(M ≡ O)

1	M ≡ N	Suposición
2	N ≡ ~O	Suposición
3	M ≡ O	Suposición
4	~O	Suposición
5	N	2, 4 (≡E)
6	M	1, 5 (≡E)
7	O	3, 6 (≡E)
8	~O	4 (R)
9	O	4-8 (~E)
10	M	3, 9 (≡E)
11	N	1, 10 (≡E)
12	~O	2, 11 (≡E)
13	~(M ≡ O)	3-12 (~I)

6. Derive: O

1	O ∨ (M ≡ N)	Suposición
2	~N	Suposición
3	M	Suposición
4	O	Suposición
5	O	4 (R)
6	M ≡ N	Suposición
7	~O	Suposición
8	N	3, 6 (≡E)
9	~N	2 (R)
10	O	7-9 (~E)
11	O	1, 4-10 (∨E)

Apendice-1.pmd 433 13/07/07, 03:32 p.m.

8. Derive: ~Q ≡ ~N

1	(S & P) ⊃ ~M	Suposición
2	Q ⊃ (M & ~M)	Suposición
3	N ⊃ [M & (S & P)]	Suposición
4	~Q	Suposición
5	N	Suposición
6	M & (S & P)	3, 5 (⊃E)
7	M	6 (&E)
8	S & P	6 (&E)
9	~M	1, 8 (⊃E)
10	~N	5-9 (~I)
11	~N	Suposición
12	Q	Suposición
13	M & ~M	2, 12 (⊃E)
14	M	13 (&E)
15	~M	13 (&E)
16	~Q	12-15 (~I)
17	~Q ≡ ~N	4-16 (≡I)

10. Derive: (M & P) ⊃ N

1	(~M ∨ N) ∨ O	Suposición
2	O ⊃ ~P	Suposición
3	M & P	Suposición
4	~M ∨ N	Suposición
5	~M	Suposición
6	~N	Suposición
7	M	3 (&E)
8	~M	5 (R)
9	N	6-8 (~E)
10	N	Suposición
11	N	10 (R)
12	N	4, 5-11 (∨E)
13	O	Suposición
14	~N	Suposición
15	~P	2, 13 (⊃E)
16	P	3 (&E)
17	N	14-16 (~E)
18	N	1, 4-18 (∨E)
19	(M & P) ⊃ N	3-18 (⊃P)

Apendice-1.pmd 434 13/07/07, 03:32 p.m.

12. Derive: N

```
1  | N ∨ M                        Suposición
2  | ~M ≡ (L ∨ O)                 Suposición
3  | (O & P) ∨ [O & (K ⊃ O)]      Suposición
   |------------------------
4  | | N                          Suposición
   | |-----
5  | | N                          4 (R)
6  | | M                          Suposición
   | |-----
7  | | | ~N                       Suposición
   | | |-----
8  | | | | O & P                  Suposición
   | | | |-----
9  | | | | O                      8 (&E)
10 | | | | O & (K ⊃ O)            Suposición
   | | | |-----
11 | | | | O                      10 (&E)
12 | | | O                        3, 8-11 (∨E)
13 | | | L ∨ O                    12 (∨I)
14 | | | ~M                       2, 13 (≡E)
15 | | | M                        6 (R)
16 | | N                          7-15 (~E)
17 | N                            1, 4-16 (∨E)
```

C.

2. Derive: F ≡ ~~F

```
1  | | F                Suposición
   | |-----
2  | | | ~F             Suposición
   | | |-----
3  | | | F              1 (R)
4  | | | ~F             2 (R)
5  | | ~~F              2-4 (~I)
6  | | ~~F              Suposición
   | |-----
7  | | | ~F             Suposición
   | | |-----
8  | | | ~~F            6 (R)
9  | | | ~F             7 (R)
10 | | F                7-9 (~E)
11 | F ≡ ~~F            1-10 (≡I)
```

4. Derive: [(F ⊃ G) ⊃ F] ⊃ F

```
1  │ │ (F ⊃ G) ⊃ F                Suposición
   │ ├──────────────
2  │ │ │ ~F                       Suposición
   │ │ ├─────────────
3  │ │ │ │ F                      Suposición
   │ │ │ ├───────────
4  │ │ │ │ │ ~G                   Suposición
   │ │ │ │ ├────────
5  │ │ │ │ │ ~F                   2 (R)
6  │ │ │ │ │ F                    3 (R)
7  │ │ │ │ G                      4-6 (~E)
8  │ │ │ F ⊃ G                    3-7 (⊃I)
9  │ │ │ F                        1, 8 (⊃E)
10 │ │ │ ~F                       2 (R)
11 │ │ F                          2-10 (~E)
12 │ [(F ⊃ G) ⊃ F] ⊃ F            1-11 (⊃I)
```

6. Derive: (F ≡ G) ≡ [(F ⊃ G) & (G ⊃ F)]

```
1  │ │ F ≡ G                           Suposición
   │ ├──────────────────
2  │ │ │ F                             Suposición
   │ │ ├────────────────
3  │ │ │ G                             1, 2 (≡E)
4  │ │ F ⊃ G                           2-3 (⊃I)
5  │ │ │ G                             Suposición
   │ │ ├────────────────
6  │ │ │ F                             1, 5 (≡E)
7  │ │ G ⊃ F                           5-6 (⊃I)
8  │ │ (F ⊃ G) & (G ⊃ F)               4, 7 (&I)
9  │ │ (F ⊃ G) & (G ⊃ F)               Suposición
   │ ├──────────────────
10 │ │ │ F                             Suposición
   │ │ ├────────────────
11 │ │ │ F ⊃ G                         9 (&E)
12 │ │ │ G                             10, 11 (⊃E)
13 │ │ │ G                             Suposición
   │ │ ├────────────────
14 │ │ │ G ⊃ F                         9 (&E)
15 │ │ │ F                             13, 14 (⊃E)
16 │ │ G ≡ F                           10-15 (≡I)
17 │ (F ≡ G) ≡ [(F ⊃ G) & (G ⊃ F)]     1-16 (≡I)
```


Apendice-1.pmd 436 13/07/07, 03:32 p.m.

8. Derive: $[(F \vee G) \supset H] \equiv [(F \supset H) \,\&\, (G \supset H)]$

1	│ │ (F ∨ G) ⊃ H	Suposición
2	│ │ │ F	Suposición
3	│ │ │ F ∨ G	2 (∨I)
4	│ │ │ H	1, 3 (⊃E)
5	│ │ F ⊃ H	2-4 (⊃I)
6	│ │ │ G	Suposición
7	│ │ │ F ∨ G	6 (∨I)
8	│ │ │ H	1, 7 (⊃E)
9	│ │ G ⊃ H	6-8 (⊃I)
10	│ │ (F ⊃ H) & (G ⊃ H)	5, 9 (&I)
11	│ │ (F ⊃ H) & (G ⊃ H)	Suposición
12	│ │ │ F ∨ G	Suposición
13	│ │ │ │ F	Suposición
14	│ │ │ │ F ⊃ H	11 (&E)
15	│ │ │ │ H	13, 14 (⊃E)
16	│ │ │ │ G	Suposición
17	│ │ │ │ G ⊃ H	11 (&E)
18	│ │ │ │ H	16, 17 (⊃E)
19	│ │ │ H	12, 13-18 (∨E)
20	│ │ (F ∨ G) ⊃ H	12-19 (⊃I)
21	│ [(F ∨ G) ⊃ H] ≡ [(F ⊃ H) & (G ⊃ H)]	1-20 (≡I)

10. Derive: $\sim([H \vee (F \vee \sim G)] \,\&\, (G \,\&\, [(F \vee H) \supset \sim G]))$

1	│ │ [H ∨ (F ∨ ~G)] & (G & [(F ∨ H) ⊃ ~G])	Suposición
2	│ │ H ∨ (F ∨ ~G)	1 (&E)
3	│ │ G & [(F ∨ H) ⊃ ~G]	1 (&E)
4	│ │ G	3 (&E)
5	│ │ (F ∨ H) ⊃ ~G	3 (&E)
6	│ │ │ H	Suposición
7	│ │ │ F ∨ H	6 (∨I)
8	│ │ │ ~G	5, 7 (⊃E)
9	│ │ │ F ∨ ~G	Suposición
10	│ │ │ │ F	Suposición
11	│ │ │ │ F ∨ H	10 (∨I)
12	│ │ │ │ ~G	5, 11 (⊃E)
13	│ │ │ │ ~G	Suposición
14	│ │ │ │ ~G	13 (R)
15	│ │ │ ~G	9, 10-14 (∨E)
16	│ │ ~G	2, 6-15 (∨E)
17	│ ~([H ∨ (F ∨ ~G)] & (G & [(F ∨ H) ⊃ ~G]))	1-16 (~I)

Apendice-1.pmd 437 13/07/07, 03:32 p.m.

D.

2. Derive: G & ~G

1	│ F & ~F	Suposición
2	│ │ ~(G & ~G)	Suposición
3	│ │ F	1 (&E)
4	│ │ ~F	1 (&E)
5	│ G & ~G	2-4 (~E)

Derive: F & ~F

1	│ G & ~G	Suposición
2	│ │ ~(F & ~F)	Suposición
3	│ │ G	1 (&E)
4	│ │ ~G	1 (&E)
5	│ F & ~F	2-4 (~E)

4. Derive: (G ∨ H) & (F ∨ H)

1	│ (G & F) ∨ H	Suposición
2	│ │ G & F	Suposición
3	│ │ G	2 (&E)
4	│ │ G ∨ H	3 (∨I)
5	│ │ F	2 (& E)
6	│ │ F ∨ H	5 (∨I)
7	│ │ (G ∨ H) & (F ∨ H)	4, 6 (&I)
8	│ │ H	Suposición
9	│ │ G ∨ H	8 (∨I)
10	│ │ F ∨ H	8 (∨I)
11	│ │ (G ∨ H) & (F ∨ H)	9, 10 (&I)
12	│ (G ∨ H) & (F ∨ H)	1, 2-11 (∨E)

Derive: (G & F) ∨ H

1	│ (G ∨ H) & (F ∨ H)	Suposición
2	│ G ∨ H	1 (&E)
3	│ F ∨ H	1 (&E)
4	│ │ G	Suposición
5	│ │ │ F	Suposición
6	│ │ │ G & F	4, 5 (&I)
7	│ │ │ (G & F) ∨ H	6 (∨I)
8	│ │ │ H	Suposición
9	│ │ │ (G & F) ∨ H	8 (∨I)
10	│ │ (G & F) ∨ H	3, 5-9 (∨E)
11	│ │ H	Suposición
12	│ │ (G & F) ∨ H	10 (∨I)
13	│ (G & F) ∨ H	2, 4-12 (∨E)

Apendice-1.pmd 438 13/07/07, 03:32 p.m.

6. Derive: (F & ~G) ∨ (~F & G)

1	~(F ≡ G)	Suposición
2	│ ~[(F & ~G) ∨ (~F & G)]	Suposición
3	│ │ F	Suposición
4	│ │ │ ~G	Suposición
5	│ │ │ F & ~G	3, 4 (&I)
6	│ │ │ (F & ~G) ∨ (~F & G)	5 (∨I)
7	│ │ │ ~[(F & ~G) ∨ (~F & G)]	2 (R)
8	│ │ G	4-7 (~E)
9	│ │ G	Suposición
10	│ │ │ ~F	Suposición
11	│ │ │ ~F & G	9, 10 (&I)
12	│ │ │ (F & ~G) ∨ (~F & G)	11 (∨I)
13	│ │ │ ~[(F & ~G) ∨ (~F & G)]	2 (R)
14	│ │ F	10-13 (~E)
15	│ F ≡ G	3-14 (≡I)
16	│ ~(F ≡ G)	1 (R)
17	(F & ~G) ∨ (~F & G)	2-16 (~E)

Derive: ~(F ≡ G)

1	(F & ~G) ∨ (~F & G)	Suposición
2	│ F ≡ G	Suposición
3	│ │ F & ~G	Suposición
4	│ │ F	3 (&E)
5	│ │ G	2, 4 (≡E)
6	│ │ ~G	3 (&E)
7	│ │ G & ~G	5, 6 (&I)
8	│ │ ~F & G	Suposición
9	│ │ │ ~(G & ~G)	Suposición
10	│ │ │ G	8 (&E)
11	│ │ │ ~F	8 (&E)
12	│ │ │ F	2, 10 (≡E)
13	│ │ G & ~G	9-12 (~E)
14	│ G & ~G	1, 3-13 (∨E)
15	│ G	14 (&E)
16	│ ~G	14 (&E)
17	~(F ≡ G)	2-16 (~I)

Apendice-1.pmd 439 13/07/07, 03:32 p.m.

E.

2.

```
 1 │ (A ∨ C) ⊃ (B & ~D)         Suposición
 2 │ (B ∨ C) ⊃ D                Suposición
 3 │ ~C ⊃ A                     Suposición
   ├──────────────────
 4 │ │ C                        Suposición
   │ ├────────────────
 5 │ │ A ∨ C                    4 (∨I)
 6 │ │ B & ~D                   1, 5 (⊃E)
 7 │ │ ~D                       6 (&E)
 8 │ │ B ∨ C                    4 (∨I)
 9 │ │ D                        2, 8 (⊃E)
10 │ ~C                         4-9 (~I)
11 │ A                          3, 10 (⊃E)
12 │ A ∨ C                      11 (∨I)
13 │ B & ~D                     1, 12 (⊃E)
14 │ B                          13 (&E)
15 │ ~D                         13 (&E)
16 │ B ∨ C                      14 (∨I)
17 │ D                          2, 16 (⊃E)
```

4.

```
 1 │ S & (Q ∨ P)                Suposición
 2 │ (~P ∨ R) & (R ⊃ ~R)        Suposición
 3 │ ~Q                         Suposición
   ├──────────────────
 4 │ Q ∨ P                      1 (&E)
 5 │ ~P ∨ R                     2 (&E)
 6 │ R ⊃ ~R                     2 (&E)
 7 │ │ Q                        Suposición
   │ ├──────
 8 │ │ │ S                      Suposición
   │ │ ├────
 9 │ │ │ ~Q                     3 (R)
10 │ │ │ Q                      7 (R)
11 │ │ ~S                       8-10 (~I)
12 │ │ P                        Suposición
   │ ├──────
13 │ │ │ ~P                     Suposición
   │ │ ├────
14 │ │ │ │ S                    Suposición
   │ │ │ ├──
15 │ │ │ │ P                    12 (R)
16 │ │ │ │ ~P                   13 (R)
17 │ │ │ ~S                     14-16 (~I)
18 │ │ │ R                      Suposición
   │ │ ├────
19 │ │ │ │ S                    Suposición
   │ │ │ ├──
20 │ │ │ │ R                    18 (R)
21 │ │ │ │ ~R                   6, 20 (⊃E)
22 │ │ │ ~S                     19-21 (~I)
23 │ │ ~S                       5, 13-22 (∨E)
24 │ ~S                         4, 7-23 (∨E)
25 │ S                          1 (&E)
```


Apendice-1.pmd 440 13/07/07, 03:32 p.m.

Ejercicio 5.12

2. Derive: ~B

1	~(E & A) ⊃ ~(D ⊃ C)	Suposición
2	(D ⊃ C) ∨ (B ⊃ C)	Suposición
3	~E & ~C	Suposición
4	~E	1 (&E)
5	~E ∨ ~A	4 (∨I)
6	~(E & A)	5 (DeM)
7	~(D ⊃ C)	1, 6 (⊃E)
8	B ⊃ C	2, 7 (SD)
9	~C	3 (&E)
10	~B	8, 9 (MT)

4. Derive: J ⊃ ~(K ∨ ~I)

1	~H ∨ I	Suposición
2	~(J & ~H)	Suposición
3	K ⊃ ~I	Suposición
4	J	Suposición
5	~J ∨ ~~H	2 (DeM)
6	~~J	4 (DN)
7	~~H	5, 6 (SD)
8	I	1, 7 (SD)
9	~~I	8 (DN)
10	~K	3, 9 (MT)
11	~K & ~~I	9, 10 (&I)
12	~(K ∨ ~I)	11 (DeM)
13	J ⊃ ~(K ∨ ~I)	4-12 (⊃I)

6. Derive: ~P ⊃ ~A

1	A ⊃ [P ∨ ~(G ∨ D)]	Suposición
2	~D ⊃ G	Suposición
3	~P	Suposición
4	~~D ∨ G	2 (Impl)
5	D ∨ G	4 (DN)
6	~~(D ∨ G)	5 (DN)
7	~P & ~~(D ∨ G)	3, 6 (&I)
8	~[P ∨ ~(D ∨ G)]	7 (DeM)
9	~A	1, 8 (MT)
10	~P ⊃ ~A	3-9 (⊃I)

Apendice-1.pmd 441 13/07/07, 03:32 p.m.

8. Derive: $\sim A \supset [T \supset (R \,\&\, B)]$

1	$(T \,\&\, \sim S) \supset A$	Suposición
2	$\sim B \supset \sim S$	Suposición
3	$\sim S \vee C$	Suposición
4	$C \supset R$	Suposición
5	$\sim A$	Suposición
6	T	Suposición
7	$T \supset (\sim S \supset A)$	1 (Export)
8	$\sim S \supset A$	6, 7 ($\supset$E)
9	$\sim\sim S$	5, 8 (MT)
10	C	3, 9 (SD)
11	R	4, 10 ($\supset$E)
12	$\sim\sim B$	2, 9 (MT)
13	B	12 (DN)
14	$R \,\&\, B$	11, 13 (&I)
15	$T \supset (R \,\&\, B)$	6-14 ($\supset$I)
16	$\sim A \supset [T \supset (R \,\&\, B)]$	5-15 ($\supset$I)

Apendice-1.pmd 442 13/07/07, 03:32 p.m.

Capítulo 6

Ejercicio 6.1

2. Término singular: Gonzalo

   Predicado: ___________ es amable.

4. Términos singulares: Marco Pérez y Universidad de Buenos Aires

   Predicados: __________ es profesor en __________________________.

   __________ es profesor en la Universidad de Buenos Aires.

   Marco Pérez es profesor en __________________________.

6. Términos singulares: 2 y 8

   Predicados: ___ es menor que ___.

   ___ es menor que 8.

   2 es menor que ___.

8. Términos singulares: Marta, Edgardo, Martín y Andrea

   Predicados: _____ y _______ son los padres de _____ y ______.

   Marta y _______ son los padres de _____ y ______.

   Marta y Edgardo son los padres de _____ y ______.

   Marta y Edgardo son los padres de Martín y ______.

   _____ y Edgardo son los padres de Martín y Andrea.

   _____ y _______ son los padres de Martín y Andrea.

   _____ y _______ son los padres de _____ y Andrea.

   Marta y _______ son los padres de Martín y Andrea.

   Marta y _______ son los padres de Martín y ______.

   Marta y Edgardo son los padres de _____ y Andrea.

   _____ y _______ son los padres de Martín y ______.

   _____ y Edgardo son los padres de Martín y ______.

   _____ y Edgardo son los padres de _____ y ______.

   Marta y _______ son los padres de _____ y Andrea.

   _____ y Edgardo son los padres de _____ y Andrea.

10. Cuantificador: Algunos
    Predicados: _____ es un número natural.
    _____ es un número par.

Ejercicio 6.2

A.

2. ~Nbh
4. ~(∃*x*)N*x*k
6. ~Sin & ~Sil
8. Vbj ⊃ Vdj
10. (Mbc & Mca) & (~Mbe & ~Mce)
12. (∃*x*)M*x*a

B.

2. (Ec & Fc) & ~Ic
4. Eb & (~Fb & ~Ib)
6. [(Ea & Ia) & (Ib & ~Eb)] & (~Fa & ~Fb)
8. (Iaa & Iac) & (Vab & Vad)
10. (~Gdc & ~Gbc) & (Gcd & Gcb)
12. (Gab & Gad) & (~Iab & ~Iad)
14. (Gbd & Gdb) ⊃ (Ibd & Idb)
16. [~Ec & (~Fc & ~Ic)] ⊃ ~(∃*x*)I*x*c
18. (Fd & Id) & ([(~Fa ∨ ~Ia) & (~Fb ∨ ~Ib)] & [(~Fc ∨ ~Ic) & (~Fe ∨ ~Ie])

C.

2. UD: Pedro, William, Guillermo, Esteban, David y Manuel

E*x*:	*x* es equilibrista	e:	Esteban
G*x*:	*x* es mago	d:	David
T*x*:	*x* vive en un trailer	g:	Guillermo
C*x*:	*x* es un trapecista	i:	William
Ax:	*x* quiere abandonar el circo	m:	Manuel
D*x*:	*x* es un domador de leones	p:	Pedro
M*x*:	*x* es malabarista		
P*x*:	*x* es un payaso		
Q*x*:	*x* quiere ser mago		

Ep & Mp

Gi & (Qg & ~Gg)

$(\forall x)Tx$

Ge & (Pd & Qd)

Cm & Dm

$\sim(\exists x)Ax$

4. UD: García, Moreno, Pérez y Chávez

Ax:	x es senador	c:	Chávez
Cx:	x es de la capital	g:	García
Mx:	x merecía ser reelegido	m:	Moreno
Jxy:	x es más joven que y	p:	Pérez
Ox:	x es de la costa		
Rx:	x fue reelegido		
Vxy:	x obtuvo más votos que y		

$(\forall y)Ay$

(Om & Op) & (Cg & Cc)

[(Vpg & Vpm) & (Vpc & Jpg)] & (Jpm & Jpc)

$(\forall y)Ry \;\&\; (\forall y)\sim My$

D.

2. $(\exists x)Rx$
4. $(\exists x)\sim Mx$
6. $(\forall x)Rx \supset (\forall x)\sim Mx$
8. $(\forall x)\sim Rx \supset (\forall x)Bx$
10. $(\forall x)Mx \vee (\forall x)Sx$

E.

2. $(\forall x)\sim Px \vee Pj$
4. $\sim(\forall x)Px \;\&\; Pf$
6. $(\exists x)Px \;\&\; \sim(\forall x)Px$
8. $(\sim Dj \supset \sim(\exists x)Dx) \;\&\; (Dj \supset (\forall x)Dx)$
10. $(\forall x)Px \supset (\forall x)\sim Dx$

Ejercicio 6.3

2. No es una fórmula de *LC*. La variable en “(x)” no está cuantificada.
4. No es una fórmula de *LC*. (Ex) no es un cuantificador.
6. No es una fórmula de *LC*. El cuantificador existencial ($\exists x$) no cuantifica ninguna variable x.
8. No es una fórmula de *LC*. Existen dos cuantificadores para la misma variable.
10. Sí es una fórmula de *LC*. Es una fórmula cerrada.
12. Sí es una fórmula de *LC*. Es una fórmula cerrada.
14. No es una formula de *LC*. Un cuantificador no puede cuantificar una constante.
16. No es una fórmula de *LC*. Existen dos cuantificadores para la misma variable.
18. Sí es una fórmula de *LC*. Es una fórmula cerrada.
20. Sí es una fórmula de *LC*. Es una fórmula cerrada.
22. Sí es una fórmula de *LC*. No es una fórmula cerrada.
24. Sí es una fórmula de *LC*. Es una fórmula cerrada.
26. Sí es una fórmula de *LC*. No es una fórmula cerrada.
28. Sí es una fórmula de *LC*. Es una fórmula cerrada.
30. Sí es una fórmula de *LC*. Es una fórmula cerrada.

Ejercicio 6.4

A.

2.	$(\forall x)(\mathrm{P}x \supset \mathrm{C}x)$	A
4.	$(\forall x)(\mathrm{R}x \supset {\sim}\mathrm{A}x)$	E
6.	$(\forall x)(\mathrm{C}x \supset \mathrm{H}x)$	A
8.	$(\exists x)(\mathrm{B}x \ \& \ \mathrm{G}x)$	I
10.	$(\exists x)(\mathrm{B}x \ \& \ {\sim}\mathrm{C}x)$	O

B.

2. $(\forall y)(\mathrm{A}y \supset \mathrm{V}y)$
4. $(\exists y)(\mathrm{R}y \ \& \ \mathrm{N}y)$
6. $(\exists y)\mathrm{V}y \ \& \ (\exists y){\sim}\mathrm{V}y$
8. $(\forall y)(\mathrm{R}y \supset \mathrm{P}y) \ \& \ (\forall y)(\mathrm{M}y \supset \mathrm{N}y)$
10. $(\forall y)(\mathrm{N}y \supset \mathrm{M}y) \ \& \ {\sim}(\forall y)(\mathrm{M}y \supset \mathrm{N}y)$
12. $(\forall y)\mathrm{R}y \vee ((\forall y)\mathrm{M}y \vee (\forall y)\mathrm{A}y)$
14. $((\exists y)\mathrm{N}y \ \& \ (\exists y){\sim}\mathrm{N}y) \ \& \ (\forall y)\mathrm{M}y$

Apendice-1.pmd 446 13/07/07, 03:32 p.m.

C.

2. UD: Personas

Lx:	x es lunático	Ax:	x puede aprender lógica
Hx:	x es tu hijo	Jx:	x puede ser parte de un jurado

$(\forall x)(\sim Lx \supset Ax)$
$(\forall x)(Lx \supset \sim Jx)$
$\underline{(\forall x)(Hx \supset \sim Ax)}$
$(\forall x)(Hx \supset \sim Jx)$

4. UD: Seres vivos

Lx:	x lee el *Times*	Ex:	x es educado
Tx:	x es un topo	Px:	x puede leer

$(\forall x)(Lx \supset Ex)$
$(\forall x)(Tx \supset \sim Px)$
$\underline{(\forall x)(\sim Px \supset \sim Ex)}$
$(\forall x)(Tx \supset \sim Lx)$

6. UD: Objetos en una repisa

Rx:	x está roto	Ax:	x es un objeto antiguo
Jx:	x es un jarro	Cx:	x puede contener agua

$(\forall x)(Ax \supset Rx)$
$(\forall x)(Jx \supset Ax)$
$\underline{(\forall x)(Rx \supset \sim Cx)}$
$(\forall x)(Jx \supset \sim Cx)$

8. UD: Nombres

Lx:	x está en esta lista	Ax:	x es apropiado para el galán de la novela
Mx:	x es melodioso	Vx:	x comienza con vocal

$(\forall x)(Lx \supset Ax)$
$(\forall x)(Vx \supset Mx)$
$\underline{(\forall x)(\sim Vx \supset \sim Ax)}$
$(\forall x)(Lx \supset Mx)$

10. UD: Las flores

Cx:	x tiene color	Ox:	x tiene olor
Gx:	x me gusta	Ax:	x crece al aire libre

$(\forall x)(\mathrm{C}x \supset \mathrm{O}x)$
$(\forall x)({\sim}\mathrm{A}x \supset {\sim}\mathrm{G}x)$
$(\forall x)(\mathrm{A}x \supset \mathrm{C}x)$
$\overline{(\forall x)({\sim}\mathrm{O}x \supset {\sim}\mathrm{G}x)}$

Ejercicio 6.5

A.

2. ${\sim}(\exists y)(\mathrm{P}y \;\&\; \mathrm{U}y)$
4. $(\forall y)(\mathrm{P}y \supset \mathrm{A}y)$
6. $(\forall y)[\mathrm{C}y \supset (\mathrm{P}y \vee \mathrm{L}y)]$
8. ${\sim}(\exists y)(\mathrm{C}y \;\&\; \mathrm{N}y)$
10. $(\exists y)(\mathrm{L}y \;\&\; \mathrm{C}y) \;\&\; {\sim}(\forall y)(\mathrm{L}y \supset \mathrm{C}y)$
12. $(\forall y)[\mathrm{U}y \supset (\mathrm{L}y \vee \mathrm{P}y)]$
14. ${\sim}\mathrm{Ct} \;\&\; \mathrm{Nt}$
16. $(\forall y)\mathrm{C}y \;\&\; {\sim}(\forall y)\mathrm{L}y$
18. $(\exists y)[\mathrm{T}y \;\&\; (\mathrm{U}y \;\&\; \mathrm{N}y)]$
20. $\mathrm{Vt} \;\&\; (\mathrm{Ut} \;\&\; \mathrm{At})$

B.

2. $(\forall x)(\mathrm{V}x\mathrm{t} \supset \mathrm{E}x)$
4. $(\forall x)(\mathrm{C}x \supset \mathrm{M}x\mathrm{t})$
6. $(\forall x)[(\mathrm{E}x \;\&\; \mathrm{C}x) \supset \mathrm{I}x]$
8. $(\forall x)[(\mathrm{T}x \vee \mathrm{C}x) \supset \mathrm{M}x\mathrm{j}]$
10. $(\forall x)[(\mathrm{V}x\mathrm{l} \vee \mathrm{V}x\mathrm{j}) \supset \mathrm{Vt}x]$
12. $\mathrm{Mjt} \;\&\; (\forall x)[(\mathrm{T}x \vee \mathrm{H}x) \supset \mathrm{M}x\mathrm{t}]$
14. $(\forall x)(\mathrm{T}x \equiv \mathrm{V}x\mathrm{j})$

Apendice-1.pmd 448 13/07/07, 03:32 p.m.

C.

2. UD: Todo

Nx:	x es una naranja	Mx:	x es una manzana
Sx:	x es saludable	Dx:	x es delicioso
Bx:	x tiene sabor	Ax:	x es adictivo
Oxy:	x odia a y	g:	Gerardo

$$\begin{array}{l} (\forall x)[(Nx \vee Mx) \supset Sx] \\ \sim(\forall x)(Sx \supset \sim Bx) \;\&\; \sim(\forall x)(Dx \supset Ax) \\ (\forall x)(Mx \supset [Ogx \;\&\; (Dx \;\&\; Sx)]) \\ \hline (\forall x)[(Dx \;\&\; Sx) \supset Ogx] \end{array}$$

4. UD: Seres vivos

Cx:	x es una cebra	Px:	x es peligroso
Jx:	x es una jirafa	Cx:	x es carnívoro
Ax:	x es un animal salvaje	Pxy:	x persigue a y
t:	Tarzán		

$$\begin{array}{l} (\forall x)[(Cx \vee Jx) \supset Ax] \\ \sim(\forall x)[Ax \supset (Px \;\&\; Cx)] \\ (\forall x)[Ptx \supset (Ax \;\&\; Cx)] \\ \hline (\forall x)[(Cx \vee Jx) \supset \sim Ptx] \end{array}$$

Ejercicio 6.6

A.

2. $(\forall x)[(Hx \supset (\exists y)(My \;\&\; Pxy)]$
4. $(\exists x)(\exists y)[Mx \;\&\; (My \;\&\; Jxy)]$
6. $\sim(\forall x)(\forall y)[(Ey \;\&\; Jxy) \supset Mx]$
8. $(\forall x)[(Mx \;\&\; Cx) \supset \sim(\exists y)(Pyx \vee Ayx)]$
10. $(\exists x)[(Ex \;\&\; Tx) \;\&\; \sim(\exists y)Jyx]$
12. $Ed \;\&\; (\forall x)(\forall y)[(Ey \;\&\; Pxy) \supset Adx]$
14. $\sim(\exists x)([Mx \;\&\; (\exists y)(Ey \;\&\; Jxy)] \;\&\; Adx)$

Apendice-1.pmd 449 13/07/07, 03:33 p.m.

B.

2. $\sim(\exists x)[(Dx \,\&\, (\exists y)(Ey \,\&\, Vxy)]$
4. $\sim(\exists x)[Yx \,\&\, (\exists y)(Oy \,\&\, Vxy)] \,\&\, (\exists x)[Dx \,\&\, (\exists y)(Ox \,\&\, Vxy)]$
6. $\sim(\exists x)(Rx \,\&\, Mx) \,\&\, (\exists x)(Ox \,\&\, Mx)$
8. $(\exists x)((Tx \,\&\, \sim Yx) \,\&\, (\forall y)[(Yy \,\&\, Ty) \supset Vxy])$
10. $(\exists x)(Ex \,\&\, (\forall y)(Ty \supset Dxy)) \,\&\, (\exists x)(Tx \,\&\, (\forall y)(Ey \supset Dxy))$
12. $(\forall x)((\forall y)Dxy \supset [Mx \vee (Tx \vee Ox)])$
14. $(\forall x)(\forall y)[(Yy \,\&\, Ry) \supset Dxy] \,\&\, Dju$

C.

2. $\sim(\exists x)(\exists y)[(Rx \,\&\, Ry) \,\&\, Rxy]$
4. $(\forall x)(\forall y)[Ixy \supset (Ix \,\&\, Iy)]$
6. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Mxy \,\&\, Myz) \supset Mxz]$
8. $(\forall x)[Ix \equiv (\forall y)(Iy \supset Ixy)]$

Ejercicio 6.7

2. $(\forall w)Sw \vee (\exists z)(Tz \,\&\, Mb)$
   $(\forall w)[Sw \vee (\exists z)(Tz \,\&\, Mb)]$
   $(\forall w)(\exists z)[Sw \vee (Tz \,\&\, Mb)]$
4. $\sim(\forall x)Dbx \vee (\exists x)Dbx$
   $(\exists x)\sim Dbx \vee (\exists x)Dbx$
   $(\exists x)\sim Dbx \vee (\exists y)Dby$
   $(\exists x)[\sim Dbx \vee (\exists y)Dby]$
   $(\exists x)(\exists y)[\sim Dbx \vee Dby]$
6. $(\forall x)(Fx \equiv (\exists y)Gy)$
   $(\forall x)[(Fx \supset (\exists y)Gy) \,\&\, ((\exists y)Gy \supset Fx)]$
   $(\forall x)[(\exists y)(Fx \supset Gy) \,\&\, (\forall y)(Gy \supset Fx)]$
   $(\forall x)[(\exists y)(Fx \supset Gy) \,\&\, (\forall z)(Gz \supset Fx)]$
   $(\forall x)(\exists y)[(Fx \supset Gy) \,\&\, (\forall z)(Gz \supset Fx)]$
   $(\forall x)(\exists y)(\forall z)[(Fx \supset Gy) \,\&\, (Gz \supset Fx)]$

Apendice-1.pmd 450 13/07/07, 03:33 p.m.

8. (Mc & (∃*x*)F*x*d) ⊃ ~(∀*y*)(∃*w*)(P*yw* ∨ ~(∀*z*)P*yz*)
(Mc & (∃*x*)F*x*d) ⊃ (∃*y*)~(∃*w*)(P*yw* ∨ (∃*z*)~P*yz*)
(Mc & (∃*x*)F*x*d) ⊃ (∃*y*)(∀*w*)~(P*yw* ∨ (∃*z*)~P*yz*)
(∃*x*)(Mc & F*x*d) ⊃ (∃*y*)(∀*w*)~(P*yw* ∨ (∃*z*)~P*yz*)
(∃*x*)(Mc & F*x*d) ⊃ (∃*y*)(∀*w*)~(∃*z*)(P*yw* ∨ ~P*yz*)
(∃*x*)(Mc & F*x*d) ⊃ (∃*y*)(∀*w*)(∀*z*)~(P*yw* ∨ ~P*yz*)
(∀*x*)[(Mc & F*x*d) ⊃ (∃*y*)(∀*w*)(∀*z*)~(P*yw* ∨ ~P*yz*)]
(∀*x*)(∃*y*)[(Mc & F*x*d) ⊃ (∀*w*)(∀*z*)~(P*yw* ∨ ~P*yz*)]
(∀*x*)(∃*y*)(∀*w*)[(Mc & F*x*d) ⊃ (∀*z*)~(P*yw* ∨ ~P*yz*)]
(∀*x*)(∃*y*)(∀*w*)(∀*z*)[(Mc & F*x*d) ⊃ ~(P*yw* ∨ ~P*yz*)]

Ejercicio 6.8

A.

2. (∀*x*)[(M*x* & ~(*x* = v)) ⊃ R*x*]
4. (Ov & Tv) & (∀*x*)[(O*x* & T*x*) ⊃ (*x* = v)]
6. (∀*x*)[(O*x* & ~(*x* = a)) ⊃ A*x*v]
8. (∃*x*)(∃*y*)[([(Cv*x* & Cv*y*) & (O*x* & O*y*)] & (R*x* & R*y*)) & ~(*x* = *y*)]
10. (∃*x*)(∃*y*)[((O*x* & R*x*) & [(O*y* & P*y*) & (~N*y* & A*xy*)]) & (∀*z*)(A*zy* ⊃ *z* = *x*)]

B.

2. (∀*x*)(∃*y*)(S*yx* & (∀*z*)(S*zx* ⊃ *z* = *y*))
4. (∃*x*)(∃*y*)[([(R*x* & R*y*) & (E*x*bc & E*y*bc)] & ~(*x* = *y*)) &
(∀*z*)((R*z* & E*z*bc) ⊃ (*z* = *x* ∨ *z* = *y*))]
6. Ra & (∃*x*)[(S*x*a & R*x*) & (∀*y*)(S*y*a ⊃ *y* = *x*)] &
(∀*w*)(∀*z*)([(S*wz* & R*z*) & ~(*z* = a)] ⊃ ~R*w*)

Ejercicio 6.9

2. UD: Ciudades y países

C*xy*: *x* es la capital de *y*

a: Alemania

b: Berlín

b = (∃*x*)(C*x*a & (∀*y*)(C*y*a ⊃ *y* = *x*))

4. UD: Personas y países

Rxy: x es el hombre más rico de y

Fx: x es un gran filántropo

m: México

$(\exists x)([Rxm \ \& \ (\forall y)(Rym \supset y = x)] \ \& \ {\sim}Fx)$

6. UD: Números

Rxy: x es la raíz cúbica de y

Mxy: x es mayor que y

a: 2

b: 9

$(\exists x)([Rxb \ \& \ (\forall y)(Ryb \supset y = x)] \ \& \ Mxa)$

8. UD: Personas

Ix: x inventó el bombillo

Dx: x es distraído

Ox: x es olvidadizo

$(\exists x)([Ix \ \& \ (\forall y)(Iy \supset y = x)] \ \& \ (Dx \ \& \ Ox))$

10. UD: Empleados de una empresa

Ax: x recibirá un aumento

Cx: x es un contador

Gx: x es un gerente

$(\exists x)([([Cx \ \& \ (\forall y)(Cy \supset y = x)] \ \& \ (\exists z)[Gz \ \& \ (\forall w)(Gw \supset w = z)]) \ \& \ (Ax \ \& \ Az)]$
$\& \ (\forall x_1)[Ax_1 \supset (x_1 = x \lor x_1 = z)])$

Capítulo 7

Ejercicio 7.1

A.

2. Verdadera
4. Verdadera
6. Falsa
8. Falsa

Apendice-1.pmd 452 13/07/07, 03:33 p.m.

B.

2. Verdadera
4. Verdadera
6. Verdadera
8. Falsa

Ejercicio 7.2

2. Verdadera
4. Verdadera
6. Verdadera
8. Falsa
10. Falsa

Ejercicio 7.3

A.

2. UD: Personas

   F*xy*: *x* le debe dinero a *y*
   a: Aristóteles
   d: Descartes

4. UD: Países

   L*xy*: *x* es más pobre que *y*
   N*x*: *x* produce cobre
   r: Haití
   s: Chile
   t: Dinamarca

B.

2. UD: Países

M*x*:	*x* está en Asia	r:	Alemania
Q*x*:	*x* está en Europa	c:	Francia
S*x*:	*x* está en Suramérica		

4. UD: Personas

Yxy:	x detesta a y	o:	George W. Bush
Uxy:	x hace negocios con y	r:	Fidel Castro

C.

2. UD: Planetas

Mxy: x está más cerca del Sol que y

Nx: x tiene anillos

c: Neptuno

s: Saturno

4. UD: Los números enteros positivos

$Nxyz$: x está entre y y z

Bxy: x es menor que y

a: 3

d: 2

e: 1

D.

2. UD: Mariposas

Cx: x es azul

Nx: x es carnívora

4. UD: Personas

Axy: x es más rico que y

Oxy: x es más infeliz que y

6. UD: Los números enteros positivos

Pxy: x es el sucesor de y

Nx: x es par

Vx: x es impar

8. UD: Personas

Cxy: x es menor que y

Kx: x es nonagenario

Lx: x es un niño

10. UD: Personas

Exy: x es compatriota de y

Ox: x es chino

Tx: x es alemán

E*.

UD: Los números enteros positivos

Axy: x es mayor o igual a y

Fx: x es negativo

Gx: x es positivo

Px: x es par

n: 1

Ejercicio 7.4

A.

2. UD: Animales

Ax: x es una araña

Cx: x tiene ocho patas

4. UD: Personas

Ax: x es futbolista

Bx: x es mortal

6. UD: Los números enteros positivos

Exy: el producto de x por y es impar

Fx: x es par

a: 1

8. UD: Mamíferos

Ax: x vuela

Bx: x es vertebrado

10. UD: Números enteros positivos

Ax: x es par

Cx: x es divisible por 2

Apendice-1.pmd 455 13/07/07, 03:33 p.m.

B.

2. UD: Personas

Ax: x es chileno
Dx: x es inglés
g: Gardel

4. UD: Personas

Ax: x es inmortal
Cx: x es cambodiano

6. UD: Filósofos

Ax: x es un estoicista
Bx: x es un hedonista

8. UD: Ciudades

Cx: x está en una isla

10. UD: Los números enteros positivos

Fxy: x es menor que y

C.

2.

Modelo		Contramodelo	
UD:	Ciudades	UD:	Ciudades
Mx:	x es calurosa	Mx:	x es calurosa
a:	Mumbai	a:	Mumbai
b:	Ho Chi Min	b:	La Paz

4.

Modelo		Contramodelo	
UD:	Plantas	UD:	Plantas
Ix:	x es una conífera	Ix:	x es una conífera
Jx:	x es un cedro	Jx:	x mide más de 10 metros

6.

Modelo		Contramodelo	
UD:	Animales	UD:	Animales
Lx:	x es un oso polar	Lx:	x es un unicornio
Nx:	x vive en el Amazonas	Nx:	x vive en el Amazonas

Apendice-1.pmd 456 13/07/07, 03:33 p.m.

8.

Modelo		Contramodelo	
UD:	Mamíferos	UD:	Mamíferos
P*x*:	*x* es cuadrúpedo	P*x*:	*x* es un miriópodo
R*x*:	*x* es felino	R*x*:	*x* es felino
S*x*:	*x* es carnívoro	S*x*:	*x* es carnívoro

10.

Modelo		Contramodelo	
UD:	Números enteros positivos	UD:	Números enteros positivos
Q*x*:	*x* es negativo	Q*x*:	*x* es par
R*x*:	*x* es primo	R*x*:	*x* es primo

D*.

2. **Prueba**: Supongamos que "$(\forall x)(Ax \supset {\sim}{\sim}Ax)$" no es una tautología, es decir, que la fórmula es falsa bajo alguna valuación $\mathcal{V}$. En tal caso, $\mathcal{V}_a(Aa \supset {\sim}{\sim}Aa) = \mathbf{F}$ bajo alguna $\mathcal{V}_a$. Ahora bien, según las reglas de valuación del condicional, $\mathcal{V}_a(Aa \supset {\sim}{\sim}Aa) = \mathbf{F}$ ssi $\mathcal{V}_a(Aa) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}_a({\sim}{\sim}Aa) = \mathbf{F}$. Pero $\mathcal{V}_a({\sim}{\sim}Aa) = \mathbf{F}$ ssi $\mathcal{V}_a({\sim}Aa) = \mathbf{V}$, y $\mathcal{V}_a({\sim}Aa) = \mathbf{V}$ ssi $\mathcal{V}_a(Aa) = \mathbf{F}$. Como "Aa" no puede ser verdadera y falsa bajo la misma valuación, nuestra suposición inicial es falsa y la fórmula es una tautología en *LC*.

4. **Prueba**: Supongamos que "$(\forall x)Dxb \vee (\exists x){\sim}Dxb$" no es una tautología, es decir, que la fórmula es falsa bajo alguna valuación $\mathcal{V}$. En tal caso, según las reglas de valuación de la disyunción, $\mathcal{V}((\forall x)Dxb) = \mathbf{F}$ y $\mathcal{V}((\exists x){\sim}Dxb) = \mathbf{F}$. Ahora bien, $\mathcal{V}((\exists x){\sim}Dxb) = \mathbf{F}$ ssi $\mathcal{V}_a({\sim}Dab) = \mathbf{F}$ bajo cualquier $\mathcal{V}_a$. Pero $\mathcal{V}_a({\sim}Dab) = \mathbf{F}$ ssi $\mathcal{V}_a(Dab) = \mathbf{V}$. Pero $\mathcal{V}_a(Dab) = \mathbf{V}$ bajo cualquier $\mathcal{V}_a$ ssi $\mathcal{V}((\forall x)Dxb) = \mathbf{V}$, lo cual contradice nuestra suposición inicial. Por lo tanto la fórmula es una tautología en *LC*.

Ejercicio 7.5

A.

2.

UD:	Personas
A*x*:	*x* es invertebrado
B*x*:	*x* es escultor
a:	Henry Moore
b:	Ludwig van Beethoven

$\mathcal{V}((\exists y)(Ay \vee Ba)) = \mathbf{V}$

$\mathcal{V}((\exists y)(Ay \vee Bb)) = \mathbf{F}$

Apendice-1.pmd 457 13/07/07, 03:33 p.m.

4. UD: Animales

Ax: x es un gato

Bx: x es un canario

$\mathcal{V}((\exists z)(Az \ \& \ Bz)) = \mathbf{F}$

$\mathcal{V}((\exists z)Az \ \& \ (\exists z)Bz) = \mathbf{V}$

6. UD: Personas

Ax: x es un adulto

Bx: x es un niño

$\mathcal{V}((\exists x)(Ax \equiv Bx)) = \mathbf{F}$

$\mathcal{V}((\exists x)Ax \equiv (\exists x)Bx) = \mathbf{V}$

8. UD: Los números enteros positivos

Ax: x es impar

Bx: x es mayor que 3

$\mathcal{V}((\forall x)(Ax \supset Bx)) = \mathbf{F}$

$\mathcal{V}((\forall y)((\forall x)Ax \supset By)) = \mathbf{V}$

B*.

2. **Prueba**: Supongamos que $\mathcal{V}(\sim(\exists x)(Fx \ \& \ \sim Gx)) = \mathbf{V}$. En tal caso**,** $\mathcal{V}((\exists x)(Fx \ \& \ \sim Gx)) = \mathbf{F}$. Ahora bien, $\mathcal{V}((\exists x)(Fx \ \& \ \sim Gx)) = \mathbf{F}$ ssi $\mathcal{V}_a(Fa \ \& \ \sim Ga) = \mathbf{F}$ para cualquier $\mathcal{V}_a$. Y $\mathcal{V}_a(Fa \ \& \ \sim Ga) = \mathbf{F}$ ssi $\mathcal{V}_a(Fa) = \mathbf{F}$ o $\mathcal{V}_a(\sim Ga) = \mathbf{F}$. Supongamos que $\mathcal{V}_a(Fa) = \mathbf{F}$; entonces $\mathcal{V}_a(Fa \supset Ga) = \mathbf{V}$. Ahora supongamos que $\mathcal{V}_a(\sim Ga) = \mathbf{F}$; entonces $\mathcal{V}_a(Ga) = \mathbf{V}$ y en consecuencia $\mathcal{V}_a(Fa \supset Ga) = \mathbf{V}$. Como ambas suposiciones conducen al mismo resultado, podemos concluir que $\mathcal{V}_a(Fa \supset Ga) = \mathbf{V}$ para cualquier $\mathcal{V}_a$. Pero en tal caso, $\mathcal{V}((\forall x)(Fx \supset Gx)) = \mathbf{V}$. Por lo tanto, $\mathcal{V}(\sim(\exists x)(Fx \ \& \ \sim Gx)) = \mathcal{V}((\forall x)(Fx \supset Gx))$.

   Ahora supongamos que $\mathcal{V}(\sim(\exists x)(Fx \ \& \ \sim Gx)) = \mathbf{F}$. En tal caso**,** $\mathcal{V}((\exists x)(Fx \ \& \ \sim Gx)) = \mathbf{V}$. Ahora bien, $\mathcal{V}((\exists x)(Fx \ \& \ \sim Gx)) = \mathbf{V}$ ssi $\mathcal{V}_a(Fa \ \& \ \sim Ga) = \mathbf{V}$ para alguna $\mathcal{V}_a$. Y $\mathcal{V}_a(Fa \ \& \ \sim Ga) = \mathbf{V}$ ssi $\mathcal{V}_a(Fa) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}_a(\sim Ga) = \mathbf{V}$. Pero $\mathcal{V}_a(\sim Ga) = \mathbf{V}$ ssi $\mathcal{V}_a(Ga) = \mathbf{F}$. Pero si $\mathcal{V}_a(Fa) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}_a(Ga) = \mathbf{F}$, entonces $\mathcal{V}_a(Fa \supset Ga) = \mathbf{F}$ para alguna $\mathcal{V}_a$. En consecuencia $\mathcal{V}((\forall x)(Fx \supset Gx)) = \mathbf{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{V}(\sim(\exists x)(Fx \ \& \ \sim Gx)) = \mathcal{V}((\forall x)(Fx \supset Gx))$.

4. **Prueba**: Supongamos que $\mathcal{V}((\exists x)Fx \supset Gb) = \mathbf{V}$. En tal caso**,** $\mathcal{V}((\exists x)Fx) = \mathbf{F}$ o $\mathcal{V}(Gb) = \mathbf{V}$. Supongamos que $\mathcal{V}((\exists x)Fx) = \mathbf{F}$. Entonces $\mathcal{V}_a(Fa) = \mathbf{F}$ para cualquier $\mathcal{V}_a$. En tal caso, $\mathcal{V}_a(Fa \supset Gb) = \mathbf{V}$ para cualquier $\mathcal{V}_a$, y en consecuencia $\mathcal{V}((\forall x)(Fx \supset Gb)) = \mathbf{V}$. Ahora supongamos que $\mathcal{V}(Gb) = \mathbf{V}$. Dada la definición de una **b**-variante,

Apendice-1.pmd 458 13/07/07, 03:33 p.m.

$\mathcal{V}$(Gb) = **V** ssi $\mathcal{V}_a$(Gb) = **V** para cualquier $\mathcal{V}_a$. Por lo tanto, $\mathcal{V}_a$(Fa ⊃ Gb) = **V** para cualquier $\mathcal{V}_a$. En tal caso, $\mathcal{V}$((∀*x*)(F*x* ⊃ Gb)) = **V**. Como ambas suposiciones conducen al mismo resultado, $\mathcal{V}$((∀*x*)(F*x* ⊃ Gb)) = **V** y $\mathcal{V}$((∃*x*)F*x* ⊃ Gb) = $\mathcal{V}$((∀*x*)(F*x* ⊃ Gb)).

Ahora supongamos que $\mathcal{V}$((∃*x*)F*x* ⊃ Gb) = **F**. En tal caso**,** $\mathcal{V}$((∃*x*)F*x*) = **V** y $\mathcal{V}$(Gb) = **F**. $\mathcal{V}$((∃*x*)F*x*) = **V** ssi $\mathcal{V}_a$(Fa) = **V** para alguna $\mathcal{V}_a$. Dada la definición de una **b**-variante, $\mathcal{V}$(Gb) = **F** ssi $\mathcal{V}_a$(Gb) = **F** para cualquier $\mathcal{V}_a$. Como $\mathcal{V}_a$(Fa) = **V** y $\mathcal{V}_a$(Gb) = **F** para alguna $\mathcal{V}_a$, entonces $\mathcal{V}_a$(Fa ⊃ Gb) = **F** para alguna $\mathcal{V}_a$. Pero en tal caso, $\mathcal{V}$((∀*x*)(F*x* ⊃ Gb)) = **F** y $\mathcal{V}$((∃*x*)F*x* ⊃ Gb) = $\mathcal{V}$((∀*x*)(F*x* ⊃ Gb)).

Ejercicio 7.6

A.

2. UD: Personas

B*xy*: *x* es más alto que *y*

m: Abraham Lincoln

o: Danny de Vito

4. UD: Personas

M*x*: *x* es una mujer

N*x*: *x* es un hombre

6. UD: Los números enteros positivos

F*xy*: el producto de *x* por *y* es impar

G*xy*: el producto de *x* por *y* es primo

a: 4

b: 3

8. UD: Personas

E*xy*: *x* es padre de *y*

D*x*: *x* es flaco

10. UD: Los números enteros positivos

C*xy*: el producto de *x* por *y* es par

B*x*: *x* es par

B*.

2. **Prueba**: Supongamos que el conjunto es consistente bajo alguna $\mathcal{V}$, es decir que $\mathcal{V}$((∀*x*)(B*x*a & Ba*x*)) = **V** y $\mathcal{V}$((∃*y*)~Ba*y*) = **V**. Si $\mathcal{V}$((∀*x*)(B*x*a & Ba*x*)) = **V**, entonces

Apendice-1.pmd 459 13/07/07, 03:33 p.m.

$\mathcal{V}_b$(Bba & Bab) = **V** para cualquier $\mathcal{V}_b$. Y $\mathcal{V}_b$(Bba & Bab) = **V** ssi $\mathcal{V}_b$(Bba) = **V** y $\mathcal{V}_b$(Bab) = **V**. Ahora bien, $\mathcal{V}_b$(Bab) = **V** ssi $\mathcal{V}_b$(~Bab) = **F**. Como $\mathcal{V}_b$(~Bab) = **F** para cualquier $\mathcal{V}_b$, $\mathcal{V}$(($\exists$*y*)~Ba*y*) = **F**, lo cual contradice nuestra suposición inicial.

4. **Prueba**: Supongamos que el conjunto es consistente bajo alguna $\mathcal{V}$, es decir que $\mathcal{V}$(Ba) = **V**, $\mathcal{V}$(($\exists$*y*)Da*y*) = **V** y $\mathcal{V}$(Ba $\supset$ ($\forall$*y*)~Da*y*) = **V**. Si esta última formula es verdadera, entonces $\mathcal{V}$(Ba) = **F** o $\mathcal{V}$(($\forall$*y*)~Da*y*) = **V.** $\mathcal{V}$(Ba) no puede ser falsa porque hemos supuesto que $\mathcal{V}$(Ba) = **V**, así que $\mathcal{V}$(($\forall$*y*)~Da*y*) debe ser verdadera. En tal caso, $\mathcal{V}_b$(~Dab) = **V** para cualquier $\mathcal{V}_b$. Ahora bien, $\mathcal{V}_b$(~Dab) = **V** ssi $\mathcal{V}_b$(Dab) = **F** para cualquier $\mathcal{V}_b$. Pero en tal caso, $\mathcal{V}$(($\exists$*y*)Da*y*) = **F**, lo cual contradice nuestra suposición inicial.

Ejercicio 7.7

A.

2. UD: Personas

   V*xy*: *x* respeta a *y*

   a: Aristóteles

4. UD: Seres vivos

   M*x*: *x* es humano

   N*x*: *x* es vertebrado

   b: Lassie

6. UD: Los número enteros positivos

   S*x*: *x* es negativo

   c: 2

8. UD: Personas

   A*xy*: *x* es el padre de *y*

   B*xy*: *x* es mayor que *y*

10. UD: Los números enteros positivos

    T*xy*: el producto de *x* por *y* es impar

    A*x*: *x* es par

    c: 2

    d: 4

B*.

2. **Prueba**: Supongamos que el argumento es inválido, es decir, que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa bajo alguna valuación: $\mathcal{V}((\forall x)(Mx \supset Na)) = \mathbf{V}$, $\mathcal{V}((\exists x)Mx) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}(Na) = \mathbf{F}$. Si $\mathcal{V}((\exists x)Mx) = \mathbf{V}$, entonces $\mathcal{V}_b(Mb) = \mathbf{V}$ para alguna $\mathcal{V}_b$. Dada la definición de una **b**-variante, $\mathcal{V}(Na) = \mathbf{F}$ ssi $\mathcal{V}_b(Na) = \mathbf{F}$ para cualquier $\mathcal{V}_b$. Como $\mathcal{V}_b(Mb) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}_b(Na) = \mathbf{F}$ para alguna $\mathcal{V}_b$, $\mathcal{V}_b(Mb \supset Na) = \mathbf{F}$ para alguna $\mathcal{V}_b$. Pero en tal caso, $\mathcal{V}((\forall x)(Mx \supset Na)) = \mathbf{F}$, lo cual contradice nuestra suposición inicial. Por lo tanto, el argumento es válido en *LC*.

4. **Prueba**: Supongamos que el argumento es inválido, es decir, que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa bajo alguna valuación: $\mathcal{V}((\forall y)(\sim Fy \vee (\exists x)Gx)) = \mathbf{V}$, $\mathcal{V}((\exists y)Fy) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}((\exists x)Gx) = \mathbf{F}$. Si $\mathcal{V}((\forall y)(\sim Fy \vee (\exists x)Gx)) = \mathbf{V}$, entonces $\mathcal{V}_a(\sim Fa \vee (\exists x)Gx)) = \mathbf{V}$ para cualquier $\mathcal{V}_a$. De acuerdo con las reglas de valuación de la disyunción, si $\mathcal{V}_a(\sim Fa \vee (\exists x)Gx)) = \mathbf{V}$, entonces (i) $\mathcal{V}_a(\sim Fa) = \mathbf{V}$ para cualquier $\mathcal{V}_a$ o (ii) $\mathcal{V}_a((\exists x)Gx) = \mathbf{V}$ para cualquier $\mathcal{V}_a$. Supongamos que (i) $\mathcal{V}_a(\sim Fa) = \mathbf{V}$ para cualquier $\mathcal{V}_a$. Como $\mathcal{V}_a(\sim Fa) = \mathbf{V}$ ssi $\mathcal{V}_a(Fa) = \mathbf{F}$, entonces $\mathcal{V}_a(Fa) = \mathbf{F}$ para cualquier $\mathcal{V}_a$. Pero en tal caso $\mathcal{V}((\exists y)Fy) = \mathbf{F}$, lo cual contradice nuestra suposición inicial. Ahora supongamos que (ii) $\mathcal{V}_a((\exists x)Gx) = \mathbf{V}$ para cualquier $\mathcal{V}_a$. Dada la definición de una **b**-variante, $\mathcal{V}_a((\exists x)Gx) = \mathbf{V}$ ssi $\mathcal{V}((\exists x)Gx) = \mathbf{V}$. Pero esto contradice nuestra suposición inicial. Como cualquiera de estas dos posibilidades contradice nuestra suposición inicial, el argumento es válido en *LC*.

Ejercicio 7.8

2. UD: Personas

   F*x*: *x* es torero

   G*x*: *x* es modesto

   a: Cassius Clay

   b: Muhammad Ali

4. UD: Personas

   P*xy*: *x* es el padre de *y*

6. UD: Personas

   S*x*: *x* es baterista

   R*x*: *x* es viejo

   T*x*: *x* es miembro de los Rolling Stones

8. UD: Los números enteros positivos
   G*x*: *x* es par
   H*x*: *x* es múltiplo de 3
   m: 5
   n: 17

Ejercicio 7.9

A.

2. ~Ca ⊃ Na
4. ~Aa & Oa
6. Ca ⊃ (Na ⊃ ~Aa)

B.

2. ([(Fc & Pc) ⊃ Dc] & [(Fc & Pb) ⊃ Dc]) &
   ([(Fb & Pc) ⊃ Dc] & [(Fb & Pb) ⊃ Dc])
4. ([Pa & ~(Fa ∨ Fn)] ∨ [Pn & ~(Fa ∨ Fn)]) & [Pn ⊃ (Ga & Gn)]
6. (Da ⊃ [(Ga & Da) ∨ (Gb & Da)]) & (Db ⊃ [(Ga & Db) ∨ (Gb & Db)])

C.

2. [(~Aa ∨ ~Ab) ∨ ~Ac] ∨ [(Ba ∨ Bb) ∨ Bc]
4. [(Ba & Bb) & Bc] ∨ ~[(Ba ∨ Bb) ∨ Bc]

D.

2. [(Fa ∨ Fb) & (~Fa ∨ ~Fb)] ⊃ [~Fa & ~Fb]

[(Fa	∨	Fb)	&	(~ Fa	∨	~ Fb)]	⊃	[~ Fa	&	~ Fb]
V	V	V	F	F V	F	F V	V	F V	F	F V
V	V	F	V	F V	V	V F	F	F V	F	V F
F	V	V	V	V F	V	F V	F	V F	F	F V
F	F	F	F	V F	V	V F	V	V F	V	V F

La expansión semántica tiene un modelo y un contramodelo. Por lo tanto, la fórmula original es semánticamente indeterminada en *LC*.

Apendice-1.pmd 462 13/07/07, 03:33 p.m.

4. (Na & Nb) & (~Na ∨ ~Nb)

(Na	&	Nb)	& ↓	(~	Na	∨	~	Nb)
V	V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V	V	V	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	V	F	V	V	F

La expansión semántica no tiene ningún modelo. Por lo tanto, la fórmula original es una contradicción en *LC*.

Capítulo 8

Ejercicio 8.1

2.

1	(∃*x*)N*x* ⊃ (∀*z*)M*z* ✓		MC
2	(∀*y*)N*y*		MC
3	~(∃*x*)N*x*	(∀*z*)M*z*	1 (⊃)
4		Na	2 (∀)
5		Ma	3 (∀)

El conjunto es semánticamente consistente en *LC* bajo la siguiente valuación:

UD: {1}

a: 1
N*x*: {1}
M*x*: {1}

4.

1	(∀*x*)(M*x* ⊃ N*x*a)		MC
2	(∀*y*)~N*y*a		MC
3	(∃*x*)M*x* ✓		MC
4	Mb		3 (∃)
5	Mb ⊃ Nba ✓		1 (∀)
6	~Nba		2 (∀)
7	~Mb	Nba	5 (⊃)
	×	×	

El conjunto es semánticamente inconsistente en *LC*.

6.

1	$(\forall x)(Mx \supset Nxa)$		MC
2	$(\exists x)Mx$ ✓		MC
3	$(\forall y)Nya$		MC
4	Mb		2 (∃)
5	Nba		3 (∀)
6	Mb ⊃ Nba ✓		1 (∀)
7	~Mb	Nba	6 (⊃)
	×		

El conjunto es semánticamente consistente en *LC* bajo la siguiente valuación:

UD: {1, 2}

a: 1 N*xy*: {<2, 1>}
b: 2 M*x*: {2}

8.

1	$(\forall x)(\forall y)Nxy$		MC
2	$(\exists y)$~$Nya \supset (\forall y)$~Nya ✓		MC
3	~$(\exists y)$~Nya ✓	$(\forall y)$~Nya	2 (⊃)
4	$(\forall y)$~~Nya		3 (~∃)
5	~~Naa ✓		4 (∀)
6	Naa		5 (~~)
7	$(\forall y)Nay$		1 (∀)
8	Naa		7 (∀)

El conjunto es semánticamente consistente en *LC* bajo la siguiente valuación:

UD: {1}

a: 1
N*xy*: {<1, 1>}

Apendice-1.pmd 464 13/07/07, 03:33 p.m.

10.

1	$(\forall y)\mathrm{N}y\mathrm{a} \equiv \sim(\forall y)\mathrm{M}y\mathrm{b}$ ✓		MC
2	$(\exists x)(\mathrm{N}x\mathrm{a}\ \&\ \sim\mathrm{M}x\mathrm{b})$ ✓		MC
3	$\mathrm{Nca}\ \&\ \sim\mathrm{Mcb}$ ✓		2 (∃)
4	Nca		3 (&)
5	~Mcb		3 (&)
6	$(\forall y)\mathrm{N}y\mathrm{a}$	$\sim(\forall y)\mathrm{N}y\mathrm{a}$	1 (≡)
7	$\sim(\forall y)\mathrm{M}y\mathrm{b}$ ✓	$\sim\sim(\forall y)\mathrm{M}y\mathrm{b}$	1 (≡)
8	$(\exists y)\sim\mathrm{M}y\mathrm{b}$ ✓		7 (~∀)
9	~Mdb		8 (∃)
10	Naa		6 (∀)
11	Nba		6 (∀)
12	Nca		6 (∀)
13	Nda		6 (∀)

El conjunto es semánticamente consistente en *LC* bajo la siguiente valuación:

UD: $\{1, 2, 3, 4\}$

a:	1	M*xy*:	$\varnothing$
b:	2	N*xy*:	$\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 4, 1\rangle\}$
c:	3		
d:	4		

Ejercicio 8.2

A.

2.

1	$\sim(\exists x)\mathrm{T}x$ ✓		MC
2	$\sim(\forall x)\sim\mathrm{T}x \vee \sim(\forall x)\mathrm{T}x$ ✓		MC
3	$(\forall x)\sim\mathrm{T}x$		1 (~∃)
4	$\sim(\forall x)\sim\mathrm{T}x$	$\sim(\forall x)\mathrm{T}x$ ✓	2 (∨)
5	×	$(\exists x)\sim\mathrm{T}x$ ✓	4 (~∀)
6		~Ta	5 (∃)
7		~Ta	3 (∀)

El conjunto es semánticamente consistente en *LC*.

Apendice-1.pmd 465 13/07/07, 03:33 p.m.

4.

1	$(\forall x)Hx \supset Ma$		MC
2	$\sim(Ma \vee (\exists y)\sim Hy)$ ✓		MC
3	$(\forall x)Hx$		MC
4	$\sim Ma$		2 ($\sim\vee$)
5	$\sim(\exists y)\sim Hy$ ✓		2 ($\sim\vee$)
6	$\sim(\forall x)Hx$	Ma	1 ($\supset$)
	×	×	

El conjunto es semánticamente inconsistente en *LC*.

6.

1	$\sim[Bb \vee (\forall y)(Cy \ \& \sim(\exists x)(Bx \vee Dx))]$ ✓		MC
2	$(\exists z)\sim Bz$ ✓		MC
3	$\sim Ba$		2 ($\exists$)
4	$\sim Bb$		1 ($\sim\vee$)
5	$\sim(\forall y)(Cy \ \& \sim(\exists x)(Bx \vee Dx))$ ✓		1 ($\sim\vee$)
6	$(\exists y)\sim(Cy \ \& \sim(\exists x)(Bx \vee Dx))$ ✓		5 ($\sim\forall$)
7	$\sim(Cc \ \& \sim(\exists x)(Bx \vee Dx))$ ✓		6 ($\exists$)
8	$\sim Cc$	$\sim\sim(\exists x)(Bx \vee Dx)$	7 ($\sim\&$)

El conjunto es semánticamente consistente en *LC*.

8.

1	$\sim(\forall x)(\forall y)Nyx$ ✓	MC
2	$(\exists x)(\exists y)Nxy$ ✓	MC
3	$(\exists x)\sim(\forall y)Nyx$ ✓	1 ($\sim\forall$)
4	$(\exists y)Nay$ ✓	2 ($\exists$)
5	Nab	4 ($\exists$)
6	$\sim(\forall y)Nyc$ ✓	3 ($\exists$)
7	$(\exists y)\sim Nyc$ ✓	6 ($\sim\forall$)
8	$\sim Ndc$	7 ($\exists$)

El conjunto es semánticamente consistente en *LC*.

10.

1	$(\forall z)Az \vee (\forall z)Bz$ ✓				MC
2	$(\forall z)(Az \vee Bz)$				MC
3	$Aa \vee Ba$ ✓				2 ($\forall$)
4	$(\forall z)Az$		$(\forall z)Bz$		1 ($\vee$)
5	Aa		Ba		4 ($\forall$)
6	Aa	Ba	Aa	Ba	3 ($\vee$)

El conjunto es semánticamente consistente en *LC*.

B.

2.

1	~(∀x)(Dx ∨ ~Dx) ✓	MC
2	(∃x)~(Dx ∨ ~Dx) ✓	1 (~∀)
3	~(Da ∨ ~Da) ✓	2 (∃)
4	~Da	3 (~∨)
5	~~Da	3 (~∨)
	×	

La fórmula es una tautología en *LC*.

4.

1	~((∀x)Dxb ∨ (∃x)~Dxb) ✓	MC
2	~(∀x)Dxb ✓	1 (~∨)
3	~(∃x)~Dxb ✓	1 (~∨)
4	(∃x)~Dxb	2 (~∀)
	×	

La fórmula es una tautología en *LC*.

6.

1	~((∀x)(∀y)(∀z)Nxyz ⊃ (∀x)(∀y)(∀z)Nxzy) ✓	MC
2	(∀x)(∀y)(∀z)Nxyz	1 (~⊃)
3	~(∀x)(∀y)(∀z)Nxzy ✓	1 (~⊃)
4	(∃x)~(∀y)(∀z)Nxzy ✓	3 (~∀)
5	~(∀y)(∀z)Nazy ✓	4 (∃)
6	(∃y)~(∀z)Nazy ✓	5 (~∀)
7	~(∀z)Nazb ✓	6 (∃)
8	(∃z)~Nazb ✓	7 (~∀)
9	~Nacb	8 (∃)
10	(∀y)(∀z)Nayz	2 (∀)
11	(∀z)Nac$z$	10 (∀)
12	Nacb	11 (∀)
	×	

La fórmula es una tautología en *LC*.

Apendice-1.pmd 467 13/07/07, 03:33 p.m.

8.

1	$\sim[(\forall z)(Hz \equiv Lz) \supset ((\forall x)Hx \equiv (\forall x)Lx)]$ ✓					MC
2	$(\forall z)(Hz \equiv Lz)$					1 $(\sim\supset)$
3	$\sim((\forall x)Hx \equiv (\forall x)Lx)$ ✓					1 $(\sim\supset)$
4	$(\forall x)Hx$		$\sim(\forall x)Hx$ ✓			3 $(\sim\equiv)$
5	$\sim(\forall x)Lx$ ✓		$(\forall x)Lx$			3 $(\sim\equiv)$
6	$(\exists x)\sim Lx$ ✓					5 $(\sim\forall)$
7	$\sim La$					6 $(\exists)$
8	Ha					4 $(\forall)$
9			$(\exists x)\sim Hx$ ✓			4 $(\sim\forall)$
10			$\sim Hb$			9 $(\exists)$
11			La			5 $(\forall)$
12	$Ha \equiv La$ ✓		$Ha \equiv La$ ✓			2 $(\forall)$
13	Ha	$\sim Ha$	Ha		$\sim Ha$	12 $(\equiv)$
14	La	$\sim La$	La		$\sim La$	12 $(\equiv)$
15	×	×	Lb		×	5 $(\forall)$
16			$Hb \equiv Lb$ ✓			2 $(\forall)$
17			Hb	$\sim Hb$		16 $(\equiv)$
18			Lb	$\sim Lb$		16 $(\equiv)$
			×	×		

La fórmula es una tautología en *LC*.

Apendice-1.pmd 468 13/07/07, 03:33 p.m.

10.

1	$\sim[(\forall x)(\mathrm{R}x\mathrm{a} \equiv \sim\mathrm{P}x) \supset (\forall x)(\mathrm{P}x \vee \sim(\exists y)\mathrm{R}xy)]$ ✓				MC
2	$(\forall x)(\mathrm{R}x\mathrm{a} \equiv \sim\mathrm{P}x)$				1 $(\sim\supset)$
3	$\sim(\forall x)(\mathrm{P}x \vee \sim(\exists y)\mathrm{R}xy)$ ✓				1 $(\sim\supset)$
4	$(\exists x)\sim(\mathrm{P}x \vee \sim(\exists y)\mathrm{R}xy)$ ✓				3 $(\sim\forall)$
5	$\sim(\mathrm{Pb} \vee \sim(\exists y)\mathrm{Rb}y)$ ✓				4 $(\exists)$
6	$\sim\mathrm{Pb}$				5 $(\sim\vee)$
7	$\sim\sim(\exists y)\mathrm{Rb}y$ ✓				5 $(\sim\vee)$
8	$(\exists y)\mathrm{Rb}y$ ✓				7 $(\sim\sim)$
9	Rbc				8 $(\exists)$
10	$\mathrm{Rba} \equiv \sim\mathrm{Pb}$ ✓				2 $(\forall)$
11	Rba		$\sim$Rba		10 $(\equiv)$
12	$\sim$Pb		$\sim\sim$Pb		10 $(\equiv)$
13	$\mathrm{Raa} \equiv \sim\mathrm{Pa}$ ✓		×		2 $(\forall)$
14	Raa		$\sim$Raa		13 $(\equiv)$
15	$\sim$Pa		$\sim\sim$Pa ✓		13 $(\equiv)$
16	|		Pa		15 $(\sim\sim)$
17	$\mathrm{Rca} \equiv \sim\mathrm{Pc}$ ✓		$\mathrm{Rca} \equiv \sim\mathrm{Pc}$ ✓		2 $(\forall)$
18	Rca	$\sim$Rca	Rca	$\sim$Rca	17 $(\equiv)$
19	$\sim$Pc	$\sim\sim$Pc	$\sim$Pc	$\sim\sim$Pc	17 $(\equiv)$

La fórmula no es una tautología en *LC*. La fórmula es falsa bajo la siguiente valuación:

UD: {1, 2, 3}

a:	1	P*x*:	$\varnothing$
b:	2	R*xy*:	$\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$
c:	3		

Apendice-1.pmd 469 13/07/07, 03:33 p.m.

C.

2.

1	$\sim[(\forall x)(\mathrm{Ba} \supset \mathrm{F}x) \equiv (\mathrm{Ba} \supset (\forall x)\mathrm{F}x)]$ ✓		MC
2	$(\forall x)(\mathrm{Ba} \supset \mathrm{F}x)$	$\sim(\forall x)(\mathrm{Ba} \supset \mathrm{F}x)$ ✓	1 ($\sim\equiv$)
3	$\sim(\mathrm{Ba} \supset (\forall x)\mathrm{F}x)$ ✓	$\mathrm{Ba} \supset (\forall x)\mathrm{F}x$ ✓	1 ($\sim\equiv$)
4	Ba		3 ($\sim\supset$)
5	$\sim(\forall x)\mathrm{F}x$ ✓		3 ($\sim\supset$)
6	$(\exists x)\sim\mathrm{F}x$ ✓		5 ($\sim\forall$)
7	~Fb		6 ($\exists$)
8	$\mathrm{Ba} \supset \mathrm{Fb}$ ✓		2 ($\forall$)
9	~Ba Fb		8 ($\supset$)
10	× ×	$(\exists x)\sim(\mathrm{Ba} \supset \mathrm{F}x)$ ✓	2 ($\sim\forall$)
11		$\sim(\mathrm{Ba} \supset \mathrm{Fb})$ ✓	10 ($\exists$)
12		Ba	11 ($\sim\supset$)
13		~Fb	11 ($\sim\supset$)
14		~Ba $(\forall x)\mathrm{F}x$	3 ($\supset$)
15		× Fb	14 ($\forall$)
		×	

Las fórmulas son semánticamente equivalentes en *LC*.

4.

1	$\sim[(\forall x)(Fx \vee Gx) \equiv ((\forall x)Fx \vee (\forall x)Gx)]$ ✓					MC
2	$(\forall x)(Fx \vee Gx)$			$\sim(\forall x)(Fx \vee Gx)$ ✓		1 (~≡)
3	$\sim((\forall x)Fx \vee (\forall x)Gx)$ ✓			$(\forall x)Fx \vee (\forall x)Gx$ ✓		1 (~≡)
4				$(\exists x)\sim(Fx \vee Gx)$ ✓		2 (~∀)
5				$\sim(Fa \vee Ga)$ ✓		4 (∃)
6				$\sim Fa$		5 (~∨)
7				$\sim Ga$		5 (~∨)
8				$(\forall x)Fx$	$(\forall x)Gx$	3 (∨)
9				Fa	Ga	8 (∀)
10	$\sim(\forall x)Fx$ ✓			×	×	3 (~∨)
11	$\sim(\forall x)Gx$ ✓					3 (~∨)
12	$(\exists x)\sim Fx$ ✓					10 (~∀)
13	$\sim Fa$					12 (∃)
14	$(\exists x)\sim Gx$ ✓					11 (~∀)
15	$\sim Gb$					14 (∃)
16	$Fa \vee Ga$ ✓					2 (∀)
17	Fa	Ga				16 (∨)
18	×	$Fb \vee Gb$ ✓				2 (∀)
19		Fb	Gb			18 (∨)
			×			

Las fórmulas no son semánticamente equivalentes en *LC*. Las fórmulas tienen valores de verdad diferentes bajo la siguiente valuación:

UD: {1, 2}

a: 1
b: 2
F*x*: {2}
G*x*: {1}

Apendice-1.pmd 471 13/07/07, 03:33 p.m.

6.

1	$\sim[(\exists x)(\mathrm{A}x \,\&\, \mathrm{B}x) \equiv ((\exists x)\mathrm{A}x \,\&\, (\exists x)\mathrm{B}x)]$ ✓					MC
2	$(\exists x)(\mathrm{A}x \,\&\, \mathrm{B}x)$ ✓		$\sim(\exists x)(\mathrm{A}x \,\&\, \mathrm{B}x)$ ✓			1 ($\sim\equiv$)
3	$\sim((\exists x)\mathrm{A}x \,\&\, (\exists x)\mathrm{B}x)$ ✓		$(\exists x)\mathrm{A}x \,\&\, (\exists x)\mathrm{B}x$ ✓			1 ($\sim\equiv$)
4	Aa & Ba ✓					2 ($\exists$)
5	Aa					4 (&)
6	Ba					4 (&)
7	$\sim(\exists x)\mathrm{A}x$ ✓	$\sim(\exists x)\mathrm{B}x$ ✓				3 ($\sim$&)
8	$(\forall x)\sim\mathrm{A}x$	$(\forall x)\sim\mathrm{B}x$				7 ($\sim\forall$)
9	~Aa	~Ba				8 ($\forall$)
10	×	×	$(\exists x)\mathrm{A}x$ ✓			3 (&)
11			$(\exists x)\mathrm{B}x$ ✓			3 (&)
12			Aa			10 ($\exists$)
13			Bb			11 ($\exists$)
14			$(\forall x)\sim(\mathrm{A}x \,\&\, \mathrm{B}x)$			2 ($\sim\exists$)
15			~(Aa & Ba) ✓			14 ($\forall$)
16			~Aa	~Ba		15 ($\sim$&)
17			×	~(Ab & Bb) ✓		14 ($\forall$)
18				~Ab	~Bb	17 ($\sim$&)
					×	

Las fórmulas no son semánticamente equivalentes en *LC*. Las fórmulas tienen valores de verdad diferentes bajo la siguiente valuación:

UD: {1, 2}

a: 1
b: 2
A*x*: {1}
B*x*: {2}

8.

1	~[(∀*w*)(T*w* ≡ U*w*) ≡ (Ta ≡ (∀*w*)U*w*)] ✓		MC
2	(∀*w*)(T*w* ≡ U*w*)	~(∀*w*)(T*w* ≡ U*w*) ✓	1 (~≡)
3	~(Ta ≡ (∀*w*)U*w*) ✓	Ta ≡ (∀*w*)U*w* ✓	1 (~≡)
4	Ta ~Ta		3 (~≡)
5	~(∀*w*)U*w* ✓ (∀*w*)U*w*		3 (~≡)
6	(∃*w*)~U*w* ✓		5 (~∀)
7	~Ub		6 (∃)
8	Ua		5 (∀)
9	Ta ≡ Ua ✓ Ta ≡ Ua ✓		2 (∀)
10	Ta ~Ta Ta ~Ta		9 (≡)
11	Ua ~Ua Ua ~Ua		9 (≡)
12	Tb ≡ Ub ✓ × × ×		2 (∀)
13	Tb ~Tb		12 (≡)
14	Ub ~Ub		12 (≡)
15	×	(∃*w*)~(T*w* ≡ U*w*) ✓	2 (~∀)
16		~(Tb ≡ Ub) ✓	15 (∃)
17		Tb ~Tb	16 (~≡)
18		~Ub Ub	16 (~≡)
19		Ta ~Ta Ta ~Ta	3 (≡)
20		(∀*w*)U*w* ~(∀*w*)U*w* ✓ (∀*w*)U*w* ~(∀*w*)U*w* ✓	3 (≡)
21		(∃*w*)~U*w* ✓ (∃*w*)~U*w* ✓	20 (~∀)
22		~Uc ~Uc	21 (∃)
23		Ub Ub	20 (∀)
24		× Ua	20 (∀)

Las fórmulas no son semánticamente equivalentes en *LC*. Las fórmulas tienen valores de verdad diferentes bajo la siguiente valuación:

UD: {1, 2}

a: 1

b: 2

T*x*: {1}

U*x*: {1}

10.

1	$\sim[(\forall w)(\mathrm{T}w \supset (\forall x)\mathrm{U}x) \equiv (\forall w)(\forall x)(\mathrm{T}w \supset \mathrm{U}x)]$ ✓			MC
2	$(\forall w)(\mathrm{T}w \supset (\forall x)\mathrm{U}x)$		$\sim(\forall w)(\mathrm{T}w \supset (\forall x)\mathrm{U}x)$ ✓	1 $(\sim\equiv)$
3	$\sim(\forall w)(\forall x)(\mathrm{T}w \supset \mathrm{U}x)$ ✓		$(\forall w)(\forall x)(\mathrm{T}w \supset \mathrm{U}x)$	1 $(\sim\equiv)$
4	$(\exists w)\sim(\forall x)(\mathrm{T}w \supset \mathrm{U}x)$ ✓			3 $(\sim\forall)$
5	$\sim(\forall x)(\mathrm{Ta} \supset \mathrm{U}x)$ ✓			4 $(\exists)$
6	$(\exists x)\sim(\mathrm{Ta} \supset \mathrm{U}x)$ ✓			5 $(\sim\forall)$
7	$\sim(\mathrm{Ta} \supset \mathrm{Ub})$ ✓			6 $(\exists)$
8	Ta			7 $(\sim\supset)$
9	~Ub			7 $(\sim\supset)$
10	$\mathrm{Ta} \supset (\forall x)\mathrm{U}x$ ✓			2 $(\forall)$
11	~Ta	$(\forall x)\mathrm{U}x$		10 $(\supset)$
12	×	Ub		11 $(\forall)$
13		×	$(\exists w)\sim(\mathrm{T}w \supset (\forall x)\mathrm{U}x)$ ✓	2 $(\sim\forall)$
14			$\sim(\mathrm{Ta} \supset (\forall x)\mathrm{U}x)$ ✓	13 $(\exists)$
15			Ta	14 $(\sim\supset)$
16			$\sim(\forall x)\mathrm{U}x$ ✓	14 $(\sim\supset)$
17			$(\exists x)\sim\mathrm{U}x$ ✓	16 $(\sim\forall)$
18			~Ub	17 $(\exists)$
19			$(\forall x)(\mathrm{Ta} \supset \mathrm{U}x)$	3 $(\forall)$
20			$\mathrm{Ta} \supset \mathrm{Ub}$ ✓	19 $(\forall)$
21			~Ta × Ub ×	20 $(\supset)$

El argumento es semánticamente equivalentes en *LC*.

D.

2.

1	$(\forall x)(\mathrm{C}x \supset \mathrm{D}x)$	MC
2	$\sim((\forall x)\mathrm{C}x \supset (\forall x)\mathrm{D}x)$ ✓	MC
3	$(\forall x)\mathrm{C}x$	2 $(\sim\supset)$
4	$\sim(\forall x)\mathrm{D}x$ ✓	2 $(\sim\supset)$
5	$(\exists x)\sim\mathrm{D}x$ ✓	4 $(\sim\forall)$
6	~Da	5 $(\exists)$
7	Ca	3 $(\forall)$
8	$\mathrm{Ca} \supset \mathrm{Da}$ ✓	1 $(\forall)$
9	~Ca × Da ×	8 $(\supset)$

El argumento es semánticamente válido en *LC*.

Apendice-1.pmd 474 13/07/07, 03:33 p.m.

4.

1	$(\forall x)Ax \;\&\; (\forall y)By$ ✓		MC
2	$\sim(\forall z)(Az \;\&\; Bz)$ ✓		MC
3	$(\forall x)Ax$		1 (&)
4	$(\forall y)By$		1 (&)
5	$(\exists z)\sim(Az \;\&\; Bz)$ ✓		2 (~∀)
6	$\sim(Aa \;\&\; Ba)$ ✓		5 (∃)
7	Aa		3 (∀)
8	Ba		4 (∀)
9	~Aa	~Ba	6 (~&)
	×	×	

El argumento es semánticamente válido en *LC*.

6.

1	$(\forall x)((Ax \vee Bx) \supset (\forall y)(Cy \supset Dy))$			MC
2	$Aa \;\&\; (Cb \;\&\; \sim Db)$ ✓			MC
3	$\sim(\forall x)(Ax \;\&\; \sim Ax)$ ✓			MC
4	$(\exists x)\sim(Ax \;\&\; \sim Ax)$ ✓			3 (~∀)
5	Aa			2 (&)
6	Cb & ~Db ✓			2 (&)
7	Cb			6 (&)
8	~Db			6 (&)
9	$(Aa \vee Ba) \supset (\forall y)(Cy \supset Dy)$ ✓			1 (∀)
10	$\sim(Aa \vee Ba)$ ✓	$(\forall y)(Cy \supset Dy)$		9 (⊃)
11	~Aa			10 (~∨)
12	~Ba			10 (~∨)
13	×	$Cb \supset Db$ ✓		10 (∀)
14		~Cb	Db	13 (⊃)
		×	×	

El argumento es semánticamente válido en *LC*.

Apendice-1.pmd 475 13/07/07, 03:33 p.m.

8.

1	$(\forall x)(\forall y)(\mathrm{A}xy \equiv \mathrm{B}xy)$	MC
2	$(\forall x)(\forall y)\mathrm{B}xy$	MC
3	$\sim(\forall x)(\forall y)\mathrm{A}xy$ ✓	MC
4	$(\exists x)\sim(\forall y)\mathrm{A}xy$ ✓	3 $(\sim\forall)$
5	$\sim(\forall y)\mathrm{Aa}y$ ✓	4 $(\exists)$
6	$(\exists y)\sim\mathrm{Aa}y$ ✓	5 $(\sim\forall)$
7	~Aab	6 $(\exists)$
8	$(\forall y)\mathrm{Ba}y$	2 $(\forall)$
9	Bab	8 $(\forall)$
10	$(\forall y)(\mathrm{Aa}y \equiv \mathrm{Ba}y)$	1 $(\forall)$
11	$\mathrm{Aab} \equiv \mathrm{Bab}$ ✓	10 $(\forall)$
12	Aab ~Aab	11 $(\equiv)$
13	Bab ~Bab	11 $(\equiv)$
	× ×	

El argumento es semánticamente válido en *LC*.

10.

1	$(\forall x)(\mathrm{A}x \supset \mathrm{Ba}x)$	MC
2	$(\forall x)(\mathrm{C}x \supset \sim\mathrm{Ba}x)$	MC
3	Cb	MC
4	$\sim(\exists y)\sim\mathrm{A}y$ ✓	MC
5	$(\forall y)\sim\sim\mathrm{A}y$	4 $(\sim\exists)$
6	$\mathrm{Aa} \supset \mathrm{Baa}$ ✓	1 $(\forall)$
7	$\mathrm{Ab} \supset \mathrm{Bab}$ ✓	1 $(\forall)$
8	$\mathrm{Ca} \supset \sim\mathrm{Baa}$ ✓	2 $(\forall)$
9	$\mathrm{Cb} \supset \sim\mathrm{Bab}$ ✓	2 $(\forall)$
10	~~Aa ✓	5 $(\forall)$
11	~~Ab ✓	5 $(\forall)$
12	Aa	10 (~~)
13	Ab	11 (~~)
14	~Aa × Baa	6 $(\supset)$
15	~Ab × Bab	7 $(\supset)$
16	~Ca ~Baa ×	8 $(\supset)$
17	~Cb × ~Bab ×	9 $(\supset)$

El argumento es semánticamente válido en *LC*.

Apendice-1.pmd 476 13/07/07, 03:33 p.m.

Ejercicio 8.3

2.

1	$(\forall x)(\exists y)(Fx \vee Gy)$		MC
2	$(\exists y)(Fa \vee Gy)$ ✓		1 ($\forall$)
3	$Fa \vee Ga$ ✓	$Fa \vee Gb$	2 (B)
		…	
4	Fa Ga		3 ($\vee$)

El conjunto es semánticamente consistente en *LC* bajo la siguiente valuación:

UD: {1}

a: 1
F*x*: {1}
G*x*: $\varnothing$

4.

1	$(\forall x)(\forall y)(\exists z)[Fx \vee (Gy \& Hz)]$		MC
2	$(\forall y)(\exists z)[Fa \vee (Gy \& Hz)]$		1 ($\forall$)
3	$(\exists z)[Fa \vee (Ga \& Hz)]$ ✓		1 ($\forall$)
4	$Fa \vee (Ga \& Ha)$ ✓	$Fa \vee (Ga \& Hb)$	3 (B)
		…	
5	Fa Ga & Ha		4 ($\vee$)

El conjunto es semánticamente consistente en *LC* bajo la siguiente valuación:

UD: {1}

a: 1
F*x*: {1}
G*x*: $\varnothing$

Apendice-1.pmd 477 13/07/07, 03:33 p.m.

6.

1		$\sim((\exists x)\sim Fx \supset (Fa \supset \sim Fb))$ ✓		MC
2		$(\exists x)\sim Fx$ ✓		1 ($\sim\supset$)
3		$\sim(Fa \supset \sim Fb)$ ✓		1 ($\sim\supset$)
4		Fa		3 ($\sim\supset$)
5		$\sim\sim Fb$ ✓		3 ($\sim\supset$)
6		Fb		5 ($\sim\sim$)
7	~Fa	~Fb	~Fc	2 (B)
	×	×		

El conjunto es semánticamente consistente en *LC* bajo la siguiente valuación:

UD: {1, 2, 3}

a: 1
b: 2
c: 3
F*x*: {1, 2}

8.

1	$\sim(\exists x)Fxx \ \& \ (\forall x)(\exists y)Fxy$ ✓				MC
2	$\sim(\exists x)Fxx$ ✓				1 (&)
3	$(\forall x)(\exists y)Fxy$				1 (&)
4	$(\forall x)\sim Fxx$				2 ($\sim\exists$)
5	~Faa				4 ($\forall$)
6	$(\exists y)Fay$ ✓				3 ($\forall$)
7	Faa		Fab		6 (B)
8	×		~Fbb		4 ($\forall$)
9			$(\exists y)Fby$ ✓		3 ($\forall$)
10		Fba	Fbb	Fbc	9 (B)
			×	...	

El conjunto es semánticamente consistente en *LC* bajo la siguiente valuación:

UD: {1, 2}

a: 1
b: 2
F*xy*: {<1, 2>, <2, 1>}

Apendice-1.pmd 478 13/07/07, 03:33 p.m.

10	1	$(\forall x){\sim}(\exists y)\mathrm{G}xy$				MC
	2	$(\forall x)(\forall y)(\mathrm{F}xy \vee {\sim}\mathrm{G}xy)$				MC
	3	${\sim}(\exists x){\sim}(\exists z)\mathrm{F}xz$ ✓				MC
	4	$(\forall x){\sim}{\sim}(\exists z)\mathrm{F}xz$				3 (~∃)
	5	${\sim}(\exists y)\mathrm{Ga}y$ ✓				1 (∀)
	6	$(\forall y){\sim}\mathrm{Ga}y$				5 (~∃)
	7	~Gaa				6 (∀)
	8	$(\forall y)(\mathrm{Fa}y \vee {\sim}\mathrm{Ga}y)$				2 (∀)
	9	Faa ∨ ~Gaa ✓				8 (∀)
	10	${\sim}{\sim}(\exists z)\mathrm{Fa}z$ ✓				4 (∀)
	11	$(\exists z)\mathrm{Fa}z$ ✓				10 (~~)
	12	Faa		Fab		11 (B)
	13	Faa	~Gaa	Faa	~Gaa	9 (∨)
				…	…	

El conjunto es semánticamente consistente en *LC* bajo la siguiente valuación:

UD: {1}

a: 1
F*xy*: {<1, 1>}
G*xy*: ∅

Ejercicio 8.4

A.

2.	1	~(a = b ≡ b = a) ✓		MC
	2	a = b	~(a = b)	1 (~≡)
	3	~(b = a)	b = a	1 (~≡)
	4	~(a = a)	~(a = a)	2, 3 (=)
		×	×	

El conjunto es semánticamente inconsistente en *LCI*.

Apendice-1.pmd 479 13/07/07, 03:33 p.m.

4.

1	$\sim(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(x = z \mathbin{\&} y = z) \supset x = y]$ ✓	MC
2	$(\exists x)\sim(\forall y)(\forall z)[(x = z \mathbin{\&} y = z) \supset x = y]$ ✓	1 ($\sim\forall$)
3	$\sim(\forall y)(\forall z)[(\mathrm{a} = z \mathbin{\&} y = z) \supset \mathrm{a} = y]$ ✓	2 ($\exists$)
4	$(\exists y)\sim(\forall z)[(\mathrm{a} = z \mathbin{\&} y = z) \supset \mathrm{a} = y]$ ✓	3 ($\sim\forall$)
5	$\sim(\forall z)[(\mathrm{a} = z \mathbin{\&} \mathrm{b} = z) \supset \mathrm{a} = \mathrm{b}]$ ✓	4 ($\exists$)
6	$(\exists z)\sim[(\mathrm{a} = z \mathbin{\&} \mathrm{b} = z) \supset \mathrm{a} = \mathrm{b}]$ ✓	5 ($\sim\forall$)
7	$\sim[(\mathrm{a} = \mathrm{c} \mathbin{\&} \mathrm{b} = \mathrm{c}) \supset \mathrm{a} = \mathrm{b}]$ ✓	6 ($\exists$)
8	$(\mathrm{a} = \mathrm{c} \mathbin{\&} \mathrm{b} = \mathrm{c})$ ✓	7 ($\sim\supset$)
9	$\sim(\mathrm{a} = \mathrm{b})$	7 ($\sim\supset$)
10	$\mathrm{a} = \mathrm{c}$	8 (&)
11	$\mathrm{b} = \mathrm{c}$	8 (&)
12	$\mathrm{a} = \mathrm{b}$	10, 11 (=)
	×	

El conjunto es semánticamente inconsistente en *LCI*.

6.

1	$(\forall x)\mathrm{H}xx$	MC
2	$(\forall x)\ x = \mathrm{a}$	MC
3	$(\exists x)(\exists y)\sim\mathrm{H}xy$ ✓	MC
4	$(\exists y)\sim\mathrm{Hb}y$ ✓	3 ($\exists$)
5	$\sim\mathrm{Hbc}$	4 ($\exists$)
6	Haa	1 ($\forall$)
7	$\mathrm{b} = \mathrm{a}$	2 ($\forall$)
8	$\mathrm{c} = \mathrm{a}$	2 ($\forall$)
9	Hba	6, 7 (=)
10	Hbc	8, 9 (=)
	×	

El conjunto es semánticamente inconsistente en *LCI*.

8.	1		$(\forall x)(\mathrm{G}x\mathrm{b} \supset x = \mathrm{a})$					MC
	2		$(\exists x)\mathrm{G}x\mathrm{b}$ ✓					MC
	3		$\sim(\mathrm{b} = \mathrm{a})$					MC
	4		Gcb					2 ($\exists$)
	5		$\mathrm{Gcb} \supset \mathrm{c} = \mathrm{a}$ ✓					1 ($\forall$)
	6	~Gcb	c = a					5 ($\supset$)
	7	×	$\mathrm{Gab} \supset \mathrm{a} = \mathrm{a}$ ✓					1 ($\forall$)
	8			~Gab	a = a			7 ($\supset$)
	9			~Gcb				6, 8 (=)
	10			×	$\mathrm{Gbb} \supset \mathrm{b} = \mathrm{a}$ ✓			1 ($\forall$)
	11					~Gbb	b = a	7 ($\supset$)
	12					$\sim(\mathrm{b} = \mathrm{c})$	×	2, 6 (=)
	13					Gab		4, 6 (=)
	14					a = c		6, 8 (=)

El conjunto es semánticamente consistente en *LCI* bajo la siguiente valuación:

UD: {1, 2}

G*xy*: {<1, 2>}
a: 1
b: 2
c: 1

Apendice-1.pmd 481 13/07/07, 03:33 p.m.

10.

1	$(\exists x)\mathrm{F}x\mathrm{a}\ \&\ (\exists x)\mathrm{F}x\mathrm{b}$ ✓	MC
2	$\sim(\forall x)(\forall y)((\mathrm{F}x\mathrm{a}\ \&\ \mathrm{F}y\mathrm{b}) \supset \sim(x = y))$ ✓	MC
3	$\sim(\mathrm{a} = \mathrm{b})$	MC
4	$(\exists x)\mathrm{F}x\mathrm{a}$ ✓	1 (&)
5	$(\exists x)\mathrm{F}x\mathrm{b}$ ✓	1 (&)
6	Fca	4 (∃)
7	Fdb	5 (∃)
8	$(\exists x)\sim(\forall y)((\mathrm{F}x\mathrm{a}\ \&\ \mathrm{F}y\mathrm{b}) \supset \sim(x = y))$ ✓	2 (~∀)
9	$\sim(\forall y)((\mathrm{Fea}\ \&\ \mathrm{F}y\mathrm{b}) \supset \sim(\mathrm{e} = y))$ ✓	8 (∃)
10	$(\exists y)\sim((\mathrm{Fea}\ \&\ \mathrm{F}y\mathrm{b}) \supset \sim(\mathrm{e} = y))$ ✓	9 (~∀)
11	$\sim((\mathrm{Fea}\ \&\ \mathrm{Ffb}) \supset \sim(\mathrm{e} = \mathrm{f}))$ ✓	10 (∃)
12	Fea & Ffb ✓	11 (~⊃)
13	~~(e = f) ✓	11 (~⊃)
14	Fea	12 (&)
15	Ffb	12 (&)
16	e = f	13 (~~)
17	Ffa	14, 16 (=)
18	Feb	15, 16 (=)

El conjunto es semánticamente consistente en *LCI* bajo la siguiente valuación:

UD: {1, 2, 3, 4, 5}

a:	1	d:	4
b:	2	e:	5
c:	3	f:	5

F*xy*: {<3, 1>, <4, 2>, <5, 1>, <5, 2>}

B.

2.

1	Fa	MC
2	~Gb	MC
3	~~(a = b) ✓	MC
4	a = b	3 (~~)
5	Fb	1, 4 (=)
6	~Ga	2, 4 (=)

El argumento es semánticamente inválido en *LCI*.

Apendice-1.pmd 482 13/07/07, 03:33 p.m.

4.

1	Fab	MC
2	$\sim(\exists x)(\exists y)\sim(x = y)$ ✓	MC
3	$(\forall x)\sim(\exists y)\sim(x = y)$	2 (~∃)
4	$\sim(\exists y)\sim(\text{a} = y)$ ✓	3 (∀)
5	$(\forall y)\sim\sim(\text{a} = y)$	4 (~∃)
6	$\sim\sim(\text{a} = \text{a})$ ✓	5 (∀)
7	$\text{a} = \text{a}$	6 (~~)

El argumento es semánticamente inválido en *LCI*.

6.

1	$\text{Fa} \,\&\, (\forall x)(\text{F}x \supset x = \text{a})$ ✓			MC
2	$(\exists x)(\text{G}x \,\&\, \text{F}x)$ ✓			MC
3	$\sim\text{Ga}$			MC
4	Fa			1 (&)
5	$(\forall x)(\text{F}x \supset x = \text{a})$			1 (&)
6	$\text{Gb} \,\&\, \text{Fb}$ ✓			2 (∃)
7	Gb			6 (&)
8	Fb			6 (&)
9	$\text{Fa} \supset \text{a} = \text{a}$ ✓			5 (∀)
10	$\sim\text{Fa}$	$\text{a} = \text{a}$		9 (⊃)
11	×	$\text{Fb} \supset \text{b} = \text{a}$ ✓		5 (∀)
12		$\sim\text{Fb}$	$\text{b} = \text{a}$	11 (⊃)
13		×	Ga	7, 12 (=)
			×	

El argumento es semánticamente válido en *LCI*.

Apendice-1.pmd 483 13/07/07, 03:33 p.m.

8.

1	$(\forall x)(\exists y)(Fy \,\&\, Gyx)$		MC
2	$\sim Fa$		MC
3	$\sim(\exists x)(Fx \,\&\, \sim(x = a))$ $\checkmark$		MC
4	$(\forall x)\sim(Fx \,\&\, \sim(x = a))$		3 ($\sim\exists$)
5	$(\exists y)(Fy \,\&\, Gya)$ $\checkmark$		1 ($\forall$)
6	$Fb \,\&\, Gba$ $\checkmark$		5 ($\exists$)
7	Fb		6 (&)
8	Gba		6 (&)
9	$\sim(Fb \,\&\, \sim(b = a))$ $\checkmark$		4 ($\forall$)
10	$\sim Fb$	$\sim\sim(b = a)$ $\checkmark$	9 ($\sim$&)
11	$\times$	$b = a$	10 ($\sim\sim$)
12		Fa	7, 11 (=)
		$\times$	

El argumento es semánticamente válido en *LCI*.

10.

1	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Fxy \lor Gyz) \supset (\exists w)(Hw \,\&\, y = w)]$			MC
2	$(\forall z)(z = z \equiv Gzz)$			MC
3	$\sim(\exists x)Hx$ $\checkmark$			MC
4	$(\forall x)\sim Hx$			3 ($\sim\exists$)
5	$\sim Ha$			4 ($\forall$)
6	$a = a \equiv Gaa$			2 ($\forall$)
7	$(\forall y)(\forall z)[(Fay \lor Gyz) \supset (\exists w)(Hw \,\&\, y = w)$			1 ($\forall$)
8	$(\forall z)[(Faa \lor Gaz) \supset (\exists w)(Hw \,\&\, a = w)$			7 ($\forall$)
9	$(Faa \lor Gaa) \supset (\exists w)(Hw \,\&\, a = w)$ $\checkmark$			8 ($\forall$)
10	$\sim(Faa \lor Gaa)$ $\checkmark$		$(\exists w)(Hw \,\&\, a = w)$ $\checkmark$	9 ($\supset$)
11	$\sim Faa$			10 ($\sim\lor$)
12	$\sim Gaa$			10 ($\sim\lor$)
13	$a = a$	$\sim(a = a)$		6 ($\equiv$)
14	Gaa	$\sim Gaa$		6 ($\equiv$)
15	$\times$	$\times$	$Hb \,\&\, a = b$ $\checkmark$	10 ($\exists$)
16			Hb	15 (&)
17			$a = b$	15 (&)
18			Ha	16, 17 (=)
			$\times$	

El argumento es semánticamente válido en *LCI*.

Apendice-1.pmd 484 13/07/07, 03:33 p.m.

Capítulo 9

Ejercicio 9.1

2. Derive: $Fa \vee Ga$

1	$(\forall x)(\forall y)Gxy$	Suposición
2	$Gab \supset Fa$	Suposición
3	$(\forall y)Gay$	1 $(\forall E)$
4	Gab	3 $(\forall E)$
5	Fa	2, 4 $(\supset E)$
6	$Fa \vee Ga$	5 $(\vee I)$

4. Derive: $(\exists x)(Dx \,\&\, Ex)$

1	Eb	Suposición
2	Db	Suposición
3	$Db \,\&\, Eb$	1, 2 (&I)
4	$(\exists x)(Dx \,\&\, Ex)$	3 $(\exists I)$

6. Derive: $(\forall x)(Ax \,\&\, Cx)$

1	$(\forall y)Ay$	Suposición
2	$(\forall z)Cz$	Suposición
3	Aa	1 $(\forall E)$
4	Ca	2 $(\forall E)$
5	$Aa \,\&\, Ca$	3, 4 (&I)
6	$(\forall x)(Ax \,\&\, Cx)$	5 $(\forall I)$

8. Derive: $(\exists x)Bx$

1	$(\forall x)(Ax \supset Bx)$	Suposición
2	$(\exists x)Ax$	Suposición
3	| Ac	Suposición
4	| $Ac \supset Bc$	1 $(\forall E)$
7	| Bc	3, 4 $(\supset E)$
8	| $(\exists x)Bx$	7 $(\exists I)$
9	$(\exists x)Bx$	2, 3-8 $(\exists E)$

10. Derive: $Fb \supset Gb$

1	$(\forall x)(Fx \supset Hx)$	Suposición
2	$(\forall z)(Hz \equiv Gz)$	Suposición
3	$Fb \supset Hb$	1 (∀E)
4	$Hb \equiv Gb$	2 (∀E)
5	$\quad Fb$	Suposición
6	$\quad Hb$	3, 5 (⊃E)
7	$\quad Gb$	4, 6 (≡E)
8	$Fb \supset Gb$	5-7 (⊃I)

12. Derive: Bc

1	$(\forall x)Cx$	Suposición
2	$(\exists z)Cz \supset (\forall z)Bz$	Suposición
3	Ca	1 (∀E)
4	$(\exists z)Cz$	3 (∃I)
5	$(\forall z)Bz$	2, 4 (⊃E)
6	Bc	5 (∀E)

14. Derive: $(\forall x){\sim}(Fx \vee Gx)$

1	$(\forall z)(\forall y)Hzy$	Suposición
2	$(\forall x)(\forall y)(Hxy \supset {\sim}(Fx \vee Gx))$	Suposición
3	$(\forall y)Hay$	1 (∀E)
4	Hab	3 (∀E)
5	$(\forall y)(Hay \supset {\sim}(Fa \vee Ga))$	2 (∀E)
6	$Hab \supset {\sim}(Fa \vee Ga)$	5 (∀E)
7	${\sim}(Fa \vee Ga)$	4, 6 (⊃E)
8	$(\forall x){\sim}(Fx \vee Gx)$	7 (∀I)

Ejercicio 9.2

2. Derive: $(\exists x)Gx$

1	$(\forall x)(Fx \supset Gx)$	Suposición
2	Fa	Suposición
3	$Fa \supset Ga$	1 (∀E)
4	Ga	2, 3 (⊃E)
5	$(\exists x)Gx$	4 (∃I)

Apendice-2.pmd 486 13/07/07, 03:34 p.m.

4. Derive: $(\exists x)(\exists y)(\exists z)Lxyz$

1	$(\exists x)Lxxx$	Suposición
2	Laaa	Suposición
3	$(\exists z)Laaz$	2 (∃I)
4	$(\exists y)(\exists z)Layz$	3 (∃I)
5	$(\exists x)(\exists y)(\exists z)Lxyz$	4 (∃I)
6	$(\exists x)(\exists y)(\exists z)Lxyz$	1, 2-5 (∃E)

Ejercicio 9.3

2. Derive: ~Da

1	$(\forall x)(Dx \supset Ex)$	Suposición
2	~Ea	Suposición
3	Da	Suposición
4	Da ⊃ Ea	1 (∀E)
5	Ea	3, 4 (⊃E)
6	~Ea	2 (R)
7	~Da	3-6 (~I)

4. Derive: $(\exists x)Mx \equiv Ma$

1	$(\exists x)Mx \supset Ma$	Suposición
2	$(\exists x)Mx$	Suposición
3	Ma	1, 2 (⊃E)
4	Ma	Suposición
5	$(\exists x)Mx$	4 (∃I)
6	$(\exists x)Mx \equiv Ma$	2-5 (≡I)

Ejercicio 9.4

2. Derive: $(\forall y)(Sy \supset {\sim}{\sim}Sy)$

1	Sa	Suposición
2	~Sa	Suposición
3	Sa	1 (R)
4	~Sa	2 (R)
5	~~Sa	2-4 (~I)
6	Sa ⊃ ~~Sa	1-5 (⊃I)
7	$(\forall y)(Sy \supset {\sim}{\sim}Sy)$	6 (∀I)

Apendice-2.pmd 487 13/07/07, 03:34 p.m.

4. Derive: $(\forall x)(Axx \supset (\exists y)By) \equiv ((\exists x)Axx \supset (\exists y)By)$

1	$(\forall x)(Axx \supset (\exists y)By)$	Suposición
2	$(\exists x)Axx$	Suposición
3	Aaa	Suposición
4	$Aaa \supset (\exists y)By$	1 ($\forall$E)
5	$(\exists y)By$	3, 4 ($\supset$E)
6	$(\exists y)By$	2, 3-5 ($\exists$E)
7	$(\exists x)Axx \supset (\exists y)By$	2-6 ($\supset$I)
8	$(\exists x)Axx \supset (\exists y)By$	Suposición
9	Aaa	Suposición
10	$(\exists x)Axx$	9 ($\exists$I)
11	$(\exists y)By$	8, 10 ($\supset$E)
12	$Aaa \supset (\exists y)By$	9-11 ($\supset$I)
13	$(\forall x)(Axx \supset (\exists y)By)$	12 ($\forall$I)
14	$(\forall x)(Axx \supset (\exists y)By) \equiv ((\exists x)Axx \supset (\exists y)By)$	1-13 ($\equiv$I)

Ejercicio 9.5

2. Derive: $(\forall x)Fx \;\&\; (\forall y)Gy$

1	$(\forall x)(\forall y)(Fx \;\&\; Gy)$	Suposición
2	$(\forall y)(Fa \;\&\; Gy)$	1 ($\forall$E)
3	$Fa \;\&\; Ga$	2 ($\forall$E)
4	Fa	3 (&E)
5	Ga	3 (&E)
6	$(\forall x)Fx$	4 ($\forall$I)
7	$(\forall y)Gy$	5 ($\forall$I)
8	$(\forall x)Fx \;\&\; (\forall y)Gy$	6, 7 (&I)

Derive: $(\forall x)(\forall y)(Fx \;\&\; Gy)$

1	$(\forall x)Fx \;\&\; (\forall y)Gy$	Suposición
2	$(\forall x)Fx$	1 (&E)
3	$(\forall y)Gy$	1 (&E)
4	Fa	2 ($\forall$E)
5	Gb	3 ($\forall$E)
6	$Fa \;\&\; Gb$	4, 5 (&I)
7	$(\forall y)(Fa \;\&\; Gy)$	6 ($\forall$I)
8	$(\forall x)(\forall y)(Fx \;\&\; Gy)$	7 ($\forall$I)

Apendice-2.pmd 488 13/07/07, 03:34 p.m.

4. Derive: $(\forall x)(\sim Gx \supset \sim Fx)$

1	$(\forall x)(Fx \supset Gx)$	Suposición
2	$\quad \sim Ga$	Suposición
3	$\quad Fa \supset Ga$	1 ($\forall$E)
4	$\quad\quad Fa$	Suposición
5	$\quad\quad Ga$	3, 4 ($\supset$E)
6	$\quad\quad \sim Ga$	2 (R)
7	$\quad \sim Fa$	4-6 (~I)
8	$\sim Ga \supset \sim Fa$	2-7 ($\supset$I)
9	$(\forall x)(\sim Gx \supset \sim Fx)$	8 ($\forall$I)

Derive: $(\forall x)(Fx \supset Gx)$

1	$(\forall x)(\sim Gx \supset \sim Fx)$	Suposición
2	$\sim Ga \supset \sim Fa$	1 ($\forall$E)
3	$\quad Fa$	Suposición
4	$\quad\quad \sim Ga$	Suposición
5	$\quad\quad \sim Fa$	2, 4 ($\supset$E)
6	$\quad\quad Fa$	3 (R)
7	$\quad Ga$	4-6 (~E)
8	$Fa \supset Ga$	3-7 ($\supset$I)
9	$(\forall x)(Fx \supset Gx)$	8 ($\forall$I)

Ejercicio 9.6

2.

1	$(\forall y)(Dy \equiv \sim Dy)$	Suposición
2	$Da \equiv \sim Da$	1 ($\forall$E)
3	$\quad Da$	Suposición
4	$\quad \sim Da$	2, 3 ($\equiv$E)
5	$\quad Da$	3 (R)
6	$\sim Da$	3-5 (~I)
7	Da	2, 6 ($\equiv$E)

4.

1	$\sim(\forall y)(\exists x)Nxy$	Suposición
2	$(\exists x)(\forall y)Nxy$	Suposición
3	$\quad (\forall y)Nay$	Suposición
4	$\quad Nab$	3 ($\forall$E)
5	$\quad (\exists x)Nxb$	4 ($\exists$I)
6	$\quad (\forall y)(\exists x)Nxy$	5 ($\forall$I)
7	$(\forall y)(\exists x)Nxy$	2, 3-6 ($\exists$E)
8	$\sim(\forall y)(\exists x)Nxy$	1 (R)

Apendice-2.pmd 489 13/07/07, 03:34 p.m.

Ejercicio 9.7

A.

2. Derive: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Axyz \supset Azyx)$

1	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)Axyz$	Suposición
2	$Aabc$	Suposición
3	$(\forall y)(\forall z)Acyz$	1 ($\forall$E)
4	$(\forall z)Acbz$	3 ($\forall$E)
5	$Acba$	4 ($\forall$E)
6	$Aabc \supset Acba$	2-5 ($\supset$I)
7	$(\forall z)(Aabz \supset Azba)$	6 ($\forall$I)
8	$(\forall y)(\forall z)(Aayz \supset Azya)$	7 ($\forall$I)
9	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Axyz \supset Azyx)$	8 ($\forall$I)

4. Derive: $\sim(\forall x)Cx$

1	$(\forall y)[(\exists x)\sim(Bx \,\&\, Aax) \,\&\, Dy]$	Suposición
2	$\sim(\forall x)(Bx \,\&\, Aax) \equiv \sim(\forall x)Cx$	Suposición
3	$(\exists x)\sim(Bx \,\&\, Aax) \,\&\, Db$	1 ($\forall$E)
4	$(\exists x)\sim(Bx \,\&\, Aax)$	3 (&E)
5	$\sim(Bb \,\&\, Aab)$	Suposición
6	$(\forall x)(Bx \,\&\, Aax)$	Suposición
7	$Bb \,\&\, Aab$	6 ($\forall$E)
8	$\sim(Bb \,\&\, Aab)$	5 (R)
9	$\sim(\forall x)(Bx \,\&\, Aax)$	6-8 (~I)
10	$\sim(\forall x)(Bx \,\&\, Aax)$	4, 5-9 ($\exists$E)
11	$\sim(\forall x)Cx$	2, 10 ($\equiv$E)

B.

2. Derive: $\sim(\forall x)(Tx \supset \sim Ux)$

1	$(\exists x)\sim(\exists y)(Sxy \,\&\, \sim Ry)$	Suposición
2	$(\exists x)\sim(\exists y)(Sxy \,\&\, \sim Ry) \supset (\exists x)(Tx \,\&\, Ux)$	Suposición
3	$(\exists x)(Tx \,\&\, Ux)$	1, 2 ($\supset$E)
4	$Ta \,\&\, Ua$	Suposición
5	$(\forall x)(Tx \supset \sim Ux)$	Suposición
6	$Ta \supset \sim Ua$	5 ($\forall$E)
7	Ta	4 (&E)
8	$\sim Ua$	6, 7 ($\supset$E)
9	Ua	4 (&E)
10	$\sim(\forall x)(Tx \supset \sim Ux)$	5-9 (~I)
11	$\sim(\forall x)(Tx \supset \sim Ux)$	3, 4-10 ($\exists$E)

Apendice-2.pmd 490 13/07/07, 03:34 p.m.

4. Derive: $(\exists y)(Sy \,\&\, Uy)$

1	$(\exists x)(\exists y)[Sx \,\&\, (Ry \,\&\, Txy)]$	Suposición
2	$(\forall x)[(Sx \,\&\, Ux) \equiv (\exists y)(Ry \,\&\, Txy)]$	Suposición
3	$(Sa \,\&\, Ua) \equiv (\exists y)(Ry \,\&\, Tay)$	2 ($\forall$E)
4	$(\exists y)[Sa \,\&\, (Ry \,\&\, Tay)]$	Suposición
5	$Sa \,\&\, (Rb \,\&\, Tab)$	Suposición
6	$Rb \,\&\, Tab$	5 (&E)
7	$(\exists y)(Ry \,\&\, Tay)$	6 ($\exists$I)
8	$Sa \,\&\, Ua$	3,7 ($\equiv$E)
9	$(\exists y)(Sy \,\&\, Uy)$	8 ($\exists$I)
10	$(\exists y)(Sy \,\&\, Uy)$	4, 5-9 ($\exists$E)
11	$(\exists y)(Sy \,\&\, Uy)$	1, 4-10 ($\exists$E)

C.

2. Derive: $\sim(\exists x)\sim Ax \equiv (\forall x)Ax$

1	$\sim(\exists x)\sim Ax$	Suposición
2	$\sim Aa$	Suposición
3	$(\exists x)\sim Ax$	2 ($\exists$I)
4	$\sim(\exists x)\sim Ax$	1 (R)
5	Aa	2-4 (~E)
6	$(\forall x)Ax$	1-6 ($\forall$I)
7	$(\forall x)Ax$	Suposición
8	$(\exists x)\sim Ax$	Suposición
9	$\sim Aa$	Suposición
10	$\sim(\sim Bc \,\&\, Bc)$	Suposición
11	Aa	7 ($\forall$E)
12	$\sim Aa$	9 (R)
13	$\sim Bc \,\&\, Bc$	10-12 (~E)
14	$\sim Bc \,\&\, Bc$	8, 9-13 ($\exists$E)
15	$\sim Bc$	14 (&E)
16	Bc	14 (&E)
17	$\sim(\exists x)\sim Ax$	8-16 (~I)
18	$\sim(\exists x)\sim Ax \equiv (\forall x)Ax$	1-17 ($\equiv$I)

4. Derive: ((∀*x*)A*x* ∨ Ba) ≡ (∀*x*)(A*x* ∨ Ba)

```
1  │ │(∀x)Ax ∨ Ba                    Suposición
   │ ├──────────────
2  │ │ │(∀x)Ax                       Suposición
   │ │ ├──────────
3  │ │ │Ab                           2 (∀E)
4  │ │ │Ab ∨ Ba                      3 (∨I)
5  │ │ │Ba                           Suposición
   │ │ ├──────────
6  │ │ │Ab ∨ Ba                      5 (∨I)
7  │ │Ab ∨ Ba                        1, 2-6 (∨E)
8  │ │(∀x)(Ax ∨ Ba)                  7 (∀I)
9  │ │(∀x)(Ax ∨ Ba)                  Suposición
   │ ├──────────────
10 │ │ │~((∀x)Ax ∨ Ba)               Suposición
   │ │ ├──────────
11 │ │ │Ab ∨ Ba                      9 (∀E)
12 │ │ │ │Ab                         Suposición
   │ │ │ ├────────
13 │ │ │ │Ab                         12 (R)
14 │ │ │ │Ba                         Suposición
   │ │ │ ├────────
15 │ │ │ │ │~Ab                      Suposición
   │ │ │ │ ├──────
16 │ │ │ │ │(∀x)Ax ∨ Ba              14 (∨I)
17 │ │ │ │ │~((∀x)Ax ∨ Ba)           10 (R)
18 │ │ │ │Ab                         15-17 (~E)
19 │ │ │Ab                           11, 12-18 (∨E)
20 │ │ │(∀x)Ax                       19 (∀I)
21 │ │ │(∀x)Ax ∨ Ba                  20 (∨I)
22 │ │ │~((∀x)Ax ∨ Ba)               10 (R)
23 │ │(∀x)Ax ∨ Ba                    10-22 (~E)
24 │(∀x)(Ax ∨ Ba) ≡ ((∀x)Ax ∨ Ba)    1-23 (≡I)
```

D.

2. Derive: (∀*x*)(F*x* ∨ F*x*)

```
1 │(∀x)Fx                Suposición
  ├──────────
2 │Fa                    1 (∀E)
3 │Fa ∨ Fa               2 (∨I)
4 │(∀x)(Fx ∨ Fx)         3 (∀I)
```

Derive: (∀*x*)F*x*

```
1 │(∀x)(Fx ∨ Fx)         Suposición
  ├──────────
2 │Fa ∨ Fa               1 (∀E)
3 │ │Fa                  Suposición
  │ ├───
4 │ │Fa                  3 (R)
5 │ │Fa                  Suposición
  │ ├───
6 │ │Fa                  5 (R)
7 │Fa                    2, 3-6 (∨E)
8 │(∀x)Fx                7 (∀I)
```


Apendice-2.pmd 492 13/07/07, 03:34 p.m.

4. Derive: $(\exists x)Fx \supset [(\exists y)Gy \supset (\forall z)Hz]$

1	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Fx \,\&\, Gy) \supset Hz]$	Suposición
2	$(\exists x)Fx$	Suposición
3	$(\exists y)Gy$	Suposición
4	Fa	Suposición
5	Gb	Suposición
6	$(\forall y)(\forall z)[(Fa \,\&\, Gy) \supset Hz]$	1 ($\forall$E)
7	$(\forall z)[(Fa \,\&\, Gb) \supset Hz]$	6 ($\forall$E)
8	$(Fa \,\&\, Gb) \supset Hc$	7 ($\forall$E)
9	Fa & Gb	4, 5 (&E)
10	Hc	8, 9 ($\supset$E)
11	$(\forall z)Hz$	10 ($\forall$I)
12	$(\forall z)Hz$	3, 5-11 ($\exists$E)
13	$(\forall z)Hz$	2, 4-12 ($\exists$E)
14	$(\exists y)Gy \supset (\forall z)Hz$	3-13 ($\supset$I)
15	$(\exists x)Fx \supset [(\exists y)Gy \supset (\forall z)Hz]$	2-14 ($\supset$I)

Derive: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Fx \,\&\, Gy) \supset Hz]$

1	$(\exists x)Fx \supset [(\exists y)Gy \supset (\forall z)Hz]$	Suposición
2	Fa & Gb	Suposición
3	Fa	2 (&E)
4	$(\exists x)Fx$	3 ($\exists$I)
5	$(\exists y)Gy \supset (\forall z)Hz$	1, 4 ($\supset$E)
6	Gb	2 (&E)
7	$(\exists y)Gy$	6 ($\exists$I)
8	$(\forall z)Hz$	5, 7 ($\supset$E)
9	Hc	8 ($\forall$E)
10	$(Fa \,\&\, Gb) \supset Hc$	2-9 ($\supset$I)
11	$(\forall z)[(Fa \,\&\, Gb) \supset Hz]$	10 ($\forall$I)
12	$(\forall y)(\forall z)[(Fa \,\&\, Gy) \supset Hz]$	11 ($\forall$I)
13	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Fx \,\&\, Gy) \supset Hz]$	12 ($\forall$I)

Apendice-2.pmd 493 29/08/07, 02:33 p.m.

E.

2.

1	$(\forall x)(\sim Nx \vee Mx)$	Suposición
2	$(\forall y)(My \supset Ly)$	Suposición
3	$(\exists z)(Nz \ \& \sim Lz)$	Suposición
4	$Na \ \& \sim La$	Suposición
5	$\sim Na \vee Ma$	1 (∀E)
6	$\sim Na$	Suposición
7	$\sim Ma$	Suposición
8	Na	4 (&E)
9	$\sim Na$	6 (R)
10	Ma	7-9 (~E)
11	Ma	Suposición
12	Ma	11 (R)
13	Ma	5, 6-12 (∨E)
14	$(\exists z)(Nz \ \& \sim Lz)$	Suposición
15	$Ma \supset La$	2 (∀E)
16	La	13, 15 (⊃E)
17	$\sim La$	4 (&E)
18	$\sim(\exists z)(Nz \ \& \sim Lz)$	14-17 (~I)
19	$\sim(\exists z)(Nz \ \& \sim Lz)$	3, 4-18 (∃E)
20	$(\exists z)(Nz \ \& \sim Lz)$	3 (R)

4.

1	$(\forall w)Nw$	Suposición
2	$(\exists x)(\exists y)[(Ox \ \& \sim Oy) \ \& \sim Mxy]$	Suposición
3	$(\forall x)(\forall y)[(Ox \ \& \ Ny) \supset Mxy]$	Suposición
4	$(\exists y)[(Oa \ \& \sim Oy) \ \& \sim May]$	Suposición
5	$(Oa \ \& \sim Ob) \ \& \sim Mab$	Suposición
6	$(\forall y)[(Oa \ \& \ Ny) \supset May]$	3 (∀E)
7	$(Oa \ \& \ Nb) \supset Mab$	6 (∀E)
8	Nc	Suposición
9	Nb	Suposición
10	$Oa \ \& \sim Ob$	5 (&E)
11	Oa	10 (&E)
12	$Oa \ \& \ Nb$	9, 11 (&I)
13	Mab	7, 12 (⊃E)
14	$\sim Mab$	5 (&E)
15	$\sim Nb$	9-14 (~I)
16	Nb	1 (∀E)
17	$\sim Nc$	8-16 (~I)
18	$\sim Nc$	4, 5-17 (∃E)
19	$\sim Nc$	2, 4-18 (∃E)
20	Nc	1 (∀E)

Apendice-2.pmd 494 13/07/07, 03:34 p.m.

Ejercicio 9.8

A.

2. Derive: Fb

1	~(∃*x*)(~F*x* & G*xx*)	Suposición
2	Gbb	Suposición
3	(∀*x*)~(~F*x* & G*xx*)	1 (IC)
4	~(~Fb & Gbb)	3 (∀E)
5	~~Fb ∨ ~Gbb	4 (DeM)
6	~~Gbb	2 (DN)
7	~~Fb	5, 6 (SD)
8	Fb	7 (DN)

4. Derive: (∃*x*)~F*x*

1	~(∃*x*)(F*x* & ~G*x*)	Suposición
2	~(∀*x*)(~H*x* ∨ G*x*)	Suposición
3	(∀*x*)~(F*x* & ~G*x*)	1 (IC)
4	(∃*x*)~(~H*x* ∨ G*x*)	2 (IC)
5	~(~Ha ∨ Ga)	Suposición
6	~(Fa & ~Ga)	3 (∀E)
7	~~Ha & ~Ga	5 (DeM)
8	Ha & ~Ga	7 (DN)
9	~Fa ∨ ~~Ga	6 (DeM)
10	~Fa ∨ Ga	9 (DN)
11	~Ga	8 (&E)
12	~Fa	10, 11 (SD)
13	(∃*x*)~F*x*	12 (∃I)
14	(∃*x*)~F*x*	4, 5-13 (∃E)

B.

2. Derive: (∀*x*)C*x*

1	(∃*x*)~A*x* ⊃ (∀*y*)~B*y*	Suposición
2	(∃*x*)~A*x* ⊃ (∃*y*)B*y*	Suposición
3	(∀*x*)(A*x* ⊃ C*x*)	Suposición
4	Aa ⊃ Ca	3 (∀E)
5	~Aa	Suposición
6	(∃*x*)~A*x*	5 (∃I)
7	(∀*y*)~B*y*	1, 6 (⊃E)
8	~(∃*y*)B*y*	7 (IC)
9	(∃*y*)B*y*	2, 6 (⊃E)
10	Aa	5-9 (~E)
11	Ca	4, 10 (⊃E)
12	(∀*x*)C*x*	11 (∀I)

Apendice-2.pmd 495 13/07/07, 03:34 p.m.

4. Derive: $(\forall x)(Cx \supset \sim Bx)$

1	$(\exists x)[\sim Dxa \,\&\, (\forall y)(Cy \supset \sim Axy)]$	Suposición
2	$(\forall z)[\sim(\forall y)(By \supset Azy) \supset Dza]$	Suposición
3	$\sim Dba \,\&\, (\forall y)(Cy \supset \sim Aby)$	Suposición
4	$\sim(\forall y)(By \supset Aby) \supset Dba$	2 (∀E)
5	$\sim Dba$	3 (&E)
6	$\sim\sim(\forall y)(By \supset Aby)$	4, 5 (MT)
7	$(\forall y)(By \supset Aby)$	6 (DN)
8	$Bc \supset Abc$	7 (∀E)
9	$(\forall y)(Cy \supset \sim Aby)$	3 (&E)
10	$Cc \supset \sim Abc$	9 (∀E)
11	$\sim Abc \supset \sim Bc$	8 (Trans)
12	$Cc \supset \sim Bc$	10, 11 (SH)
13	$(\forall x)(Cx \supset \sim Bx)$	12 (∀I)
14	$(\forall x)(Cx \supset \sim Bx)$	1, 3-13 (∃E)

C.

2. Derive: $[(\forall x)((Fx \,\&\, Gx) \supset Hx) \,\&\, \sim(\forall x)(Fx \supset Hx)] \supset \sim(\forall x)Gx$

1	$(\forall x)((Fx \,\&\, Gx) \supset Hx) \,\&\, \sim(\forall x)(Fx \supset Hx)$	Suposición
2	$\sim(\forall x)(Fx \supset Hx)$	1 (&E)
3	$(\exists x)\sim(Fx \supset Hx)$	2 (IC)
4	$\sim(Fa \supset Ha)$	Suposición
5	$\sim(\sim Fa \vee Ha)$	4 (Impl)
6	$\sim\sim Fa \,\&\, \sim Ha$	5 (DeM)
7	$Fa \,\&\, \sim Ha$	6 (DN)
8	$(\forall x)((Fx \,\&\, Gx) \supset Hx)$	1 (&E)
9	$(Fa \,\&\, Ga) \supset Ha$	8 (∀E)
10	$\sim Ha$	6 (&E)
11	$\sim(Fa \,\&\, Ga)$	9, 10 (MT)
12	$\sim Fa \vee \sim Ga$	11 (DeM)
13	Fa	7 (&E)
14	$\sim\sim Fa$	13 (DN)
15	$\sim Ga$	12, 14 (SD)
16	$(\exists x)\sim Gx$	15 (∃I)
17	$\sim(\forall x)Gx$	16 (IC)
18	$\sim(\forall x)Gx$	3, 4-17 (∃E)
19	$[(\forall x)((Fx \,\&\, Gx) \supset Hx) \,\&\, \sim(\forall x)(Fx \supset Hx)] \supset \sim(\forall x)Gx$	1-18 (⊃I)

Apendice-2.pmd 496 13/07/07, 03:34 p.m.

4. Derive: $((\forall x)Fx \lor (\forall y)Gy) \supset (\forall z)(Fz \lor Gz)$

1	$\sim(\forall z)(Fz \lor Gz)$	Suposición
2	$(\exists z)\sim(Fz \lor Gz)$	1 (IC)
3	$\sim(Fa \lor Ga)$	Suposición
4	$\sim Fa\ \&\ \sim Ga$	3 (DeM)
5	$\sim Fa$	4 (&E)
6	$(\exists x)\sim Fx$	5 ($\exists$I)
7	$\sim(\forall x)Fx$	6 (IC)
8	$\sim Ga$	4 (&E)
9	$(\exists x)\sim Gx$	8 ($\exists$I)
10	$\sim(\forall x)Gx$	9 (IC)
11	$\sim(\forall x)Fx\ \&\ \sim(\forall x)Gx$	7, 10 (&I)
12	$\sim((\forall x)Fx \lor (\forall x)Gx)$	11 (DeM)
13	$\sim((\forall x)Fx \lor (\forall x)Gx)$	2, 3-12 ($\exists$E)
14	$\sim(\forall z)(Fz \lor Gz) \supset \sim((\forall x)Fx \lor (\forall x)Gx)$	1-13 ($\supset$I)
15	$((\forall x)Fx \lor (\forall y)Gy) \supset (\forall z)(Fz \lor Gz)$	14 (Trans)

Ejercicio 9.9

A.

2. Derive: $\sim(\forall x)Nxx$

1	$a = b$	Suposición
2	$\sim Nab$	Suposición
3	$\sim Naa$	1, 2 (=E)
4	$(\exists x)\sim Nxx$	3 ($\exists$I)
5	$\sim(\forall x)Nxx$	4 (IC)

4. Derive: $(\exists x)Gx \supset Gb$

1	$(\forall x)(x = a \lor x = b)$	Suposición
2	$\sim Ga$	Suposición
3	$(\exists x)Gx$	Suposición
4	Gc	Suposición
5	$c = a \lor c = b$	1 ($\forall$E)
6	$c = a$	Suposición
7	$\sim Gb$	Suposición
8	$\sim Gc$	2, 6 (=E)
9	Gc	4 (R)
10	Gb	7-9 ($\sim$E)
11	$c = b$	Suposición
12	Gb	4, 11 (=E)
13	Gb	5, 6-12 ($\lor$E)
14	Gb	3, 4-13 ($\exists$E)
15	$(\exists x)Gx \supset Gb$	3-14 ($\supset$I)

Apendice-2.pmd 497 13/07/07, 04:56 p.m.

B.

2. Derive: $(\exists x)(\mathrm{D}x \mathbin{\&} (\exists y)[(\mathrm{A}y \mathbin{\&} \mathrm{B}y) \mathbin{\&} \mathrm{C}xy])$

1	$(\exists x)[(\mathrm{A}x \mathbin{\&} \mathrm{B}x) \mathbin{\&} \mathrm{Cb}x]$	Suposición
2	$\mathrm{a} = \mathrm{b}$	Suposición
3	Da	Suposición
4	$(\mathrm{Ac} \mathbin{\&} \mathrm{Bc}) \mathbin{\&} \mathrm{Cbc}$	Suposición
5	$(\mathrm{Ac} \mathbin{\&} \mathrm{Bc}) \mathbin{\&} \mathrm{Cac}$	2, 4 (=E)
6	$(\exists y)[(\mathrm{A}y \mathbin{\&} \mathrm{B}y) \mathbin{\&} \mathrm{Ca}y]$	5 (∃I)
7	$(\exists y)[(\mathrm{A}y \mathbin{\&} \mathrm{B}y) \mathbin{\&} \mathrm{Ca}y]$	1, 4-6 (∃E)
8	$\mathrm{Da} \mathbin{\&} (\exists y)[(\mathrm{A}y \mathbin{\&} \mathrm{B}y) \mathbin{\&} \mathrm{Ca}y]$	3, 7 (&I)
9	$(\exists x)(\mathrm{D}x \mathbin{\&} (\exists y)[(\mathrm{A}y \mathbin{\&} \mathrm{B}y) \mathbin{\&} \mathrm{C}xy])$	8 (∃I)

4. Derive: Aba & Aab

1	$(\forall x)(\mathrm{Aa}x \equiv \mathrm{A}x\mathrm{a})$	Suposición
2	$(\exists z)[(\mathrm{B}z\mathrm{c} \mathbin{\&} (\forall y)(\mathrm{B}y\mathrm{c} \supset z = y)) \mathbin{\&} \mathrm{A}z\mathrm{a}]$	Suposición
3	Bbc	Suposición
4	$(\mathrm{Bnc} \mathbin{\&} (\forall y)(\mathrm{B}y\mathrm{c} \supset \mathrm{n} = y)) \mathbin{\&} \mathrm{Ana}$	Suposición
5	$\mathrm{Bnc} \mathbin{\&} (\forall y)(\mathrm{B}y\mathrm{c} \supset \mathrm{n} = y)$	4 (&E)
6	$(\forall y)(\mathrm{B}y\mathrm{c} \supset \mathrm{n} = y)$	5 (&E)
7	$\mathrm{Bbc} \supset \mathrm{n} = \mathrm{b}$	6 (∀E)
8	$\mathrm{n} = \mathrm{b}$	3, 7 (⊃E)
9	Ana	4 (&E)
10	Aba	8, 9 (=E)
11	$\mathrm{Aab} \equiv \mathrm{Aba}$	1 (∀E)
12	Aab	10, 11 (≡E)
13	$\mathrm{Aba} \mathbin{\&} \mathrm{Aab}$	10, 12 (&I)
14	$\mathrm{Aba} \mathbin{\&} \mathrm{Aab}$	2, 4-13 (∃E)

C.

2. Derive: $(\exists x)\ x = \mathrm{a}$

1	$\sim(\exists x)\ x = \mathrm{a}$	Suposición
2	$(\forall x)\sim(x = \mathrm{a})$	1 (IC)
3	$\sim(\mathrm{a} = \mathrm{a})$	2 (∀E)
4	$\mathrm{a} = \mathrm{a}$	(=I)
5	$(\exists x)\ x = \mathrm{a}$	1-4 (~E)

Apendice-2.pmd 498 13/07/07, 03:34 p.m.

4. Derive: $(\forall x)(\forall y)(x = y \supset y = x)$

1	$\sim(a = b \supset b = a)$	Suposición
2	$\sim(\sim(a = b) \vee b = a)$	1 (Impl)
3	$\sim\sim(a = b)\ \&\ \sim(b = a)$	2 (DeM)
4	$a = b\ \&\ \sim(b = a)$	3 (DN)
5	$a = b$	4 (&E)
6	$b = b$	5, 5 (=E)
7	$b = a$	5, 6 (=E)
8	$\sim(b = a)$	4 (&E)
9	$a = b \supset b = a$	1-8 (~E)
10	$(\forall y)(a = y \supset y = a)$	9 (∀I)
11	$(\forall x)(\forall y)(x = y \supset y = x)$	10 (∀I)

Capítulo 10

Ejercicio 10.1

2. $\Box\sim D$

4. $\sim\Diamond\sim D$

6. $D\ \&\ \Diamond\sim D$

8. $\Box D \vee \sim\Diamond D$

10. **H**D

12. **P**D

14. ~**K**pD & **B**pD

16. ~**B**f~D

18. $\Box\Diamond D$

20. $\Box\Box D$

Capítulo 11

Nota: Los siguientes árboles sólo contienen los pasos estrictamente necesarios para obtener una respuesta a la pregunta.

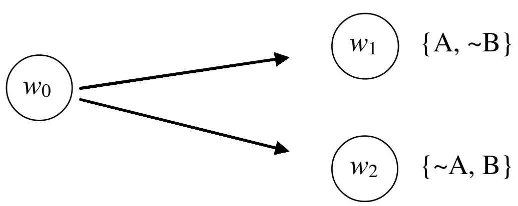
Ejercicio 11.1

A.

2.

1	◊A, 0 ✓		MC
2	◊B, 0 ✓		MC
3	~◊(A & B), 0 ✓		MC
4	□~(A & B), 0		3 (D)
5	0*R*1		1 (◊)
6	A, 1		1 (◊)
7	~(A & B), 1✓		4, 5 (□)
8	~A, 1	~B, 1	7 (~&)
9	×	0*R*2	2 (◊)
10		B, 2	2 (◊)
11		~(A & B), 2 ✓	4, 9 (□)
12		~A, 2 ~B, 2 ×	11 (~&)

El argumento es semánticamente inválido en el sistema K. Bajo la siguiente valuación, las premisas son verdaderas y la conclusión falsa:



$\mathcal{V}(\Diamond A, w_0) = \mathbf{V}$, $\mathcal{V}(\Diamond B, w_0) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}(\Diamond(A \,\&\, B), w_0) = \mathbf{F}$

4.

1	$\Box$A, 0		MC
2	$\Box$B, 0		MC
3	~$\Box$(A & B), 0 ✓		MC
4	◊~(A & B), 0 ✓		3 (D)
5	0*R*1		4 (◊)
6	~(A & B), 1 ✓		4 (◊)
7	A, 1		1, 5 ($\Box$)
8	B, 1		2, 5 ($\Box$)
9	~A, 1	~B, 1	6 (~&)
	×	×	

El argumento es semánticamente inválido en el sistema K.

B.

2.

1	~($\Box$G ≡ ~◊~G), 0✓		MC
2	$\Box$G, 0	~$\Box$G, 0 ✓	1 (~≡)
3	~~◊~G, 0 ✓	~◊~G, 0 ✓	1 (~≡)
4	◊~G, 0 ✓		3 (~~)
5	0*R*1		4 (◊)
6	~G, 1		4 (◊)
7	G, 1		2, 5 ($\Box$)
8	×	$\Box$~~G, 0	3 (D)
9		◊~G, 0 ✓	2 (D)
10		0*R*1	9 (◊)
11		~G, 1	9 (◊)
12		~~G, 1	8, 10 ($\Box$)
		×	

La fórmula es una tautología en el sistema K.

Apendice-2.pmd 501 13/07/07, 03:34 p.m.

4.

1	$\sim(\sim\Box\sim B \equiv \Diamond B)$ ✓		MC
2	$\sim\Box\sim B, 0$ ✓	$\sim\sim\Box\sim B, 0$ ✓	1 $(\sim\equiv)$
3	$\sim\Diamond B, 0$ ✓	$\Diamond B, 0$ ✓	1 $(\sim\equiv)$
4	$\Diamond\sim\sim B, 0$ ✓		2 (D)
5	$\Box\sim B, 0$		3 (D)
6	$0R1$		4 $(\Diamond)$
7	$\sim\sim B, 1$		4 $(\Diamond)$
8	$\sim B, 1$		5, 6 $(\Box)$
9	×	$\Box\sim B, 0$	2 $(\sim\sim)$
10		$0R1$	3 $(\Diamond)$
11		$B, 1$	3 $(\Diamond)$
12		$\sim B, 1$	9, 10 $(\Box)$
		×	

La fórmula es una tautología en el sistema K.

6.

1	$\sim[\Diamond(A \vee B) \supset (\Diamond A \vee \Diamond B)], 0$ ✓		MC
2	$\Diamond(A \vee B), 0$ ✓		1 $(\sim\supset)$
3	$\sim(\Diamond A \vee \Diamond B), 0$ ✓		1 $(\sim\supset)$
4	$\sim\Diamond A, 0$ ✓		3 $(\sim\vee)$
5	$\sim\Diamond B, 0$ ✓		3 $(\sim\vee)$
6	$\Box\sim A, 0$		4 (D)
7	$\Box\sim B, 0$		5 (D)
8	$0R1$		2 $(\Diamond)$
9	$A \vee B, 1$ ✓		2 $(\Diamond)$
10	$A, 1$	$B, 1$	9 $(\vee)$
11	$\sim A, 1$		6, 8 $(\Box)$
12	×	$\sim B, 1$	7, 8 $(\Box)$
		×	

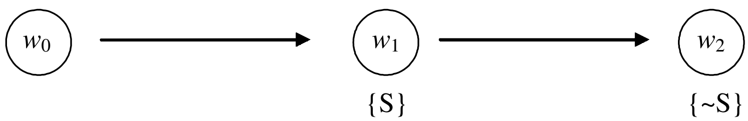
La fórmula es una tautología en el sistema K.

Apendice-2.pmd 502 13/07/07, 05:00 p.m.

8.

1	$\sim(\Box S \supset \Box\Box S), 0$ ✓	MC
2	$\Box S, 0$	1 ($\sim\supset$)
3	$\sim\Box\Box S, 0$ ✓	1 ($\sim\supset$)
4	$\Diamond\sim\Box S, 0$ ✓	3 (D)
5	$0R1$	4 ($\Diamond$)
6	$\sim\Box S, 1$ ✓	4 ($\Diamond$)
7	$\Diamond\sim S, 1$ ✓	6 (D)
8	$S, 1$	2, 5 ($\Box$)
9	$1R2$	7 ($\Diamond$)
10	$\sim S, 2$	7 ($\Diamond$)

La fórmula no es una tautología en el sistema K. La fórmula es falsa bajo la siguiente valuación:

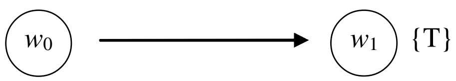


$\mathcal{V}(\Box S, w_0) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}(\Box\Box S, w_0) = \mathbf{F}$

10.

1	$\sim(\Diamond T \supset \Diamond\Diamond T), 0$ ✓	MC
2	$\Diamond T, 0$ ✓	1 ($\sim\supset$)
3	$\sim\Diamond\Diamond T, 0$ ✓	1 ($\sim\supset$)
4	$\Box\sim\Diamond T, 0$	3 (D)
5	$0R1$	2 ($\Diamond$)
6	$T, 1$	2 ($\Diamond$)
7	$\sim\Diamond T, 1$ ✓	4, 5 ($\Box$)
8	$\Box\sim T, 1$	7 (D)

La fórmula no es una tautología en el sistema K. La fórmula es falsa bajo la siguiente valuación:



$\mathcal{V}(\Diamond T, w_0) = \mathbf{V}$ y $\mathcal{V}(\Diamond\Diamond T, w_0) = \mathbf{F}$

Apendice-2.pmd 503 13/07/07, 03:34 p.m.

12.

1	~[(A ⇒ B) ⊃ (~B ⇒ ~A)], 0 ✓		MC
2	(A ⇒ B), 0 ✓		1 (~⊃)
3	~(~B ⇒ ~A), 0 ✓		1 (~⊃)
4	□(A ⊃ B), 0		2 (⇒)
5	~□(~B ⊃ ~A), 0 ✓		3 (~⇒)
6	◊~(~B ⊃ ~A), 0 ✓		5 (D)
7	0*R*1		6 (◊)
8	~(~B ⊃ ~A), 1 ✓		6 (◊)
9	~B, 1		8 (~⊃)
10	~~A, 1		8 (~⊃)
11	A ⊃ B, 1 ✓		4, 7 (□)
12	~A, 1	B, 1	11 (⊃)
	×	×	

La fórmula es una tautología en el sistema K.

Ejercicio 11.2

A.

2.

1	~◊~B, 0 ✓	MC
2	~B, 0	MC
3	□~~B, 0	1 (D)
4	0*R*0	1 (R)
5	~~B, 0 ✓	3, 4 (□)
	×	

El argumento es semánticamente válido en el sistema T.

4.

1	~◊E, 0 ✓	MC
2	~~E, 0	MC
3	□~E, 0	1 (D)
4	0*R*0	1 (R)
5	~E, 0	3, 4 (□)

El argumento es semánticamente válido en el sistema T.

Apendice-2.pmd 504 13/07/07, 03:34 p.m.

B.

2.

1	F ⊃ G, 0 ✓	MC
2	~□~□(F & ~G), 0 ✓	MC
3	◊~~□(F & ~G), 0 ✓	2 (D)
4	0*R*1	3 (◊)
5	~~□(F & ~G), 1 ✓	3 (◊)
6	□(F & ~G), 1	5 (~~)
7	1*R*0	4 (S)
8	F & ~G, 0 ✓	6, 7 (□)
9	F, 0	8 (&)
10	~G, 0	8 (&)

11	~F, 0	G, 0	1 (⊃)
	×	×	

El argumento es semánticamente válido en el sistema KB.

4.

1	◊(G ∨ H), 0 ✓	MC
2	~◊◊(G ∨ H), 0 ✓	MC
3	□~◊(G ∨ H), 0	2 (D)
4	0*R*1	1 (◊)
5	G ∨ H, 1 ✓	1 (◊)
6	~◊(G ∨ H), 1 ✓	3, 4 (□)
7	□~(G ∨ H), 1	6 (D)

8	G, 1	H, 1	5 (∨)
9	1*R*0	1*R*0	4 (S)
10	~(G ∨ H), 0 ✓	~(G ∨ H), 0 ✓	7, 9 (□)
11	~G, 0	~G, 0	10 (~∨)
12	~H, 0	~H, 0	10 (~∨)

El argumento es semánticamente inválido en el sistema KB. Bajo la siguiente valuación, la premisa es verdadera y la conclusión falsa:

{~G, ~H} w_0 ⟷ w_1 {G, H}

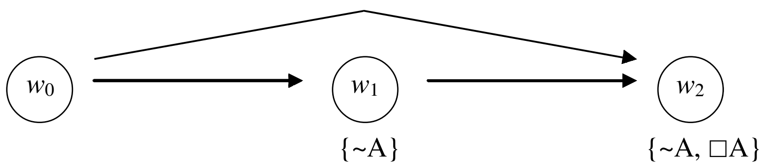
$\mathcal{V}$(◊(G ∨ H), w_0) = **V** y $\mathcal{V}$(◊◊(G ∨ H), w_0) = **F**

C.

2.

1	◊◊□A, 0 ✓	MC
2	~◊A, 0 ✓	MC
3	□~A, 0	2 (D)
4	0*R*1	1 (◊)
5	◊□A, 1 ✓	1 (◊)
6	~A, 1	3, 4 (□)
7	1*R*2	5 (◊)
8	□A, 2	5 (◊)
9	0*R*2	4, 7 (T)
10	~A, 2	3, 9 (□)

El argumento es semánticamente inválido en el sistema K4. Bajo la siguiente valuación, la premisa es verdadera y la conclusión falsa:



$\mathcal{V}$(◊◊□A, w_0) = **V** y $\mathcal{V}$(◊A, w_0) = **F**

4.

1	~◊(A & ~B), 0 ✓		MC
2	~(◊□A ⊃ ◊□B), 0 ✓		MC
3	□~(A & ~B), 0		1 (D)
4	◊□A, 0 ✓		2 (~⊃)
5	~◊□B, 0 ✓		2 (~⊃)
6	□~□B, 0		5 (D)
7	0*R*1		4 (◊)
8	□A, 1		4 (◊)
9	~□B, 1 ✓		6, 7 (□)
10	◊~B, 1 ✓		9 (D)
11	1*R*2		10 (◊)
12	~B, 2		10 (◊)
13	A, 2		8, 11 (□)
14	0*R*2		7, 11 (T)
15	~(A & ~B), 2 ✓		3, 14 (□)
16	~A, 2	~~B, 2	15 (~&)
	×	×	

El argumento es semánticamente válido en el sistema K4.

Apendice-2.pmd 506 13/07/07, 03:34 p.m.

D.

2.

1	K, 0	MC
2	~◊(K ∨ ~K), 0 ✓	MC
3	□~(K ∨ ~K), 0	2 (D)
4	0*R*1	1 (E)
5	~(K ∨ ~K), 1 ✓	3, 4 (□)
6	~K, 1	5 (~∨)
7	~~K, 1	5 (~∨)
	×	

El argumento es semánticamente válido en el sistema D.

4.

1	~◊(M & ~N), 0 ✓		MC
2	~◊(M ⊃ N), 0 ✓		MC
3	□~(M & ~N), 0		1 (D)
4	□~(M ⊃ N), 0		2 (D)
5	0*R*1		1 (E)
6	~(M & ~N), 1 ✓		3, 5 (□)
7	~(M ⊃ N), 1 ✓		4, 5 (□)
8	M, 1		7 (~⊃)
9	~N, 1		7 (~⊃)
10	~M, 1	~~N, 1	6 (~&)
	×	×	

El argumento es semánticamente válido en el sistema D.

Ejercicio 11.3

A.

2.

1	◊~◊A, 0 ✓	MC
2	~~A, 0	MC
3	0*R*1	1 (◊)
4	~◊A, 1 ✓	1 (◊)
5	□~A, 1	4 (D)
6	1*R*0	3 (S)
7	~A, 0	5, 6 (□)
	×	

El argumento es semánticamente válido en el sistema B.

Apendice-2.pmd 507 13/07/07, 03:34 p.m.

4.

1	◊~◊◊□B, 0 ✓	MC
2	~~◊□B, 0 ✓	MC
3	◊□B, 0 ✓	2 (~~)
4	0*R*1	1 (◊)
5	~◊◊□B, 1 ✓	1 (◊)
6	□~◊□B, 1	5 (D)
7	1*R*0	4 (S)
8	~◊□B, 0 ✓	6, 7 (□)
9	□~□B, 0	8 (D)
10	0*R*2	3 (◊)
11	□B, 2	3 (◊)
12	~□B, 2	9, 10 (□)
	×	

El argumento es semánticamente válido en el sistema B.

B.

2.

1	◊~□K, 0 ✓	MC
2	~◊~K, 0 ✓	MC
3	□~~K, 0	2 (D)
4	0*R*1	1 (◊)
5	~□K, 1 ✓	1 (◊)
6	◊~K, 1 ✓	5 (D)
7	1*R*2	6 (◊)
8	~K, 2	6 (◊)
9	0*R*2	4, 7 (T)
10	~~K, 2	3, 9 (□)
	×	

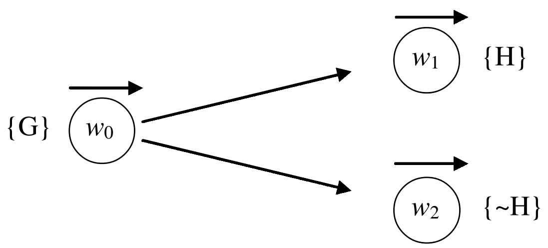
El argumento es semánticamente válido en el sistema S4.

Apendice-2.pmd 508 13/07/07, 03:34 p.m.

4.

1	$\Diamond\Box{\sim}H, 0$ ✓		MC
2	$\Diamond G \supset \Diamond H, 0$ ✓		MC
3	${\sim}{\sim}G, 0$ ✓		MC
4	$G, 0$		3 (~~)
5	$0R0$		1 (R)
6	${\sim}\Diamond G, 0$ ✓	$\Diamond H, 0$ ✓	2 (⊃)
7	$\Box{\sim}G, 0$		6 (D)
8	${\sim}G, 0$		5, 7 (□)
9	×	$0R1$	6 (◊)
10		$H, 1$	6 (◊)
11		$0R2$	1 (◊)
12		$\Box{\sim}H, 2$	1 (◊)
13		$2R2$	11 (R)
14		${\sim}H, 2$	12, 13 (□)

El argumento es semánticamente inválido en el sistema S4. Bajo la siguiente valuación, las premisas son verdaderas y la conclusión falsa:



$\mathscr{V}(\Diamond\Box{\sim}H, w_0) = \mathbf{V}$, $\mathscr{V}(\Diamond G \supset \Diamond H, w_0) = \mathbf{V}$ y $\mathscr{V}({\sim}G, w_0) = \mathbf{F}$

C.

2.

1	$\Diamond\Box\Diamond\Box T, 0$ ✓	MC
2	${\sim}T, 0$	MC
3	$0R1$	1 (◊)
4	$\Box\Diamond\Box T, 1$	1 (◊)
5	$1R1$	3 (R)
6	$\Diamond\Box T, 1$ ✓	4, 5 (□)
7	$1R2$	6 (◊)
8	$\Box T, 2$	6 (◊)
9	$0R2$	3, 7 (T)
10	$2R0$	9 (S)
11	$T, 0$	8, 10 (□)
	×	

El argumento es semánticamente válido en el sistema S5.

4.

1	□□◊◊S, 0	MC
2	~◊S, 0 ✓	MC
3	□~S, 0	2 (D)
4	0*R*0	1 (R)
5	□◊◊S, 0	1, 4 (□)
6	◊◊S, 0 ✓	4, 5 (□)
7	0*R*1	6 (◊)
8	◊S, 1 ✓	6 (◊)
9	1*R*2	8 (◊)
10	S, 2	8 (◊)
11	0*R*2	7, 9 (T)
12	~S, 2	3, 11 (□)
	×	

El argumento es semánticamente válido en el sistema S5.

6.

1	□~Q ⇒ □□~R, 0 ✓		MC
2	◊R, 0 ✓		MC
3	~◊Q, 0 ✓		MC
4	□~Q, 0		3 (D)
5	□(□~Q ⊃ □□~R), 0		1 (⇒)
6	0*R*0		1 (R)
7	□~Q ⊃ □□~R, 0 ✓		5, 6 (□)
8	~□~Q, 0	□□~R, 0	7 (⊃)
9	×	□~R, 0	6, 8 (□)
10		0*R*1	2 (◊)
11		R, 1	2 (◊)
12		~R, 1	9, 10 (□)
		×	

El argumento es semánticamente válido en el sistema S5.

Apendice-2.pmd 510 13/07/07, 03:34 p.m.

8.	1	$\Diamond\Box N \Rightarrow \Diamond\Diamond P, 0$ ✓		MC
	2	$\sim\Diamond P, 0$ ✓		MC
	3	$\sim\sim\Box N, 0$ ✓		MC
	4	$\Box N, 0$		3 (~~)
	5	$\Box\sim P, 0$		2 (D)
	6	$\Box(\Diamond\Box N \supset \Diamond\Diamond P), 0$		1 ($\Rightarrow$)
	7	$0R0$		1 (R)
	8	$\Diamond\Box N \supset \Diamond\Diamond P, 0$ ✓		6, 7 ($\Box$)
	9	$\sim\Diamond\Box N, 0$ ✓	$\Diamond\Diamond P, 0$ ✓	8 ($\supset$)
	10	$\Box\sim\Box N, 0$		9 (D)
	11	$\sim\Box N, 0$		7, 10 ($\Box$)
	12	×	$0R1$	9 ($\Diamond$)
	13		$\Diamond P, 1$ ✓	9 ($\Diamond$)
	14		$1R2$	13 ($\Diamond$)
	15		$P, 2$	13 ($\Diamond$)
	16		$0R2$	12, 14 (T)
	17		$\sim P, 2$	5, 16 ($\Box$)
			×	

El argumento es semánticamente válido en el sistema S5.

Apendice-2.pmd 511 13/07/07, 03:34 p.m.

10.

1	□□E ⇒ □□F, 0 ✓		MC
2	◊~F, 0 ✓		MC
3	~~□E, 0 ✓		MC
4	□E, 0		3 (~~)
5	□(□□E ⊃ □□F), 0		1 (⇒)
6	0*R*0		1 (R)
7	□□E ⊃ □□F, 0 ✓		5, 6 (□)
8	0*R*1		2 (◊)
9	~F, 1		2 (◊)
10	~□□E, 0 ✓	□□F, 0	7 (⊃)
11	◊~□E, 0 ✓		10 (D)
12	0*R*2		11 (◊)
13	~□E, 2 ✓		11 (◊)
14	◊~E, 2 ✓		13 (D)
15	2*R*3		14 (◊)
16	~E, 3		14 (◊)
17	0*R*3		12, 15 (T)
18	E, 3		4, 17 (□)
19	×	□F, 0	6, 10 (□)
20		F, 1	8, 19 (□)

El argumento es semánticamente válido en el sistema S5.

12.

1	◊□~H, 0 ✓		MC
2	◊C ⇒ ◊H, 0 ✓		MC
3	~~C, 0 ✓		MC
4	C, 0		3 (~~)
5	0*R*1		1 (◊)
6	□~H, 1		1 (◊)
7	□ (◊C ⊃ ◊H), 0		2 (⇒)
8	0*R*0		1 (R)
9	◊C ⊃ ◊H, 0 ✓		7, 8 (□)
10	~◊C, 0 ✓	◊H, 0 ✓	9 (⊃)
11	□~C, 0		10 (D)
12	~C, 0		8, 11 (□)
13	×	0*R*2	10 (◊)
14		H, 2	10 (◊)
15		1*R*0	5 (S)
16		1*R*2	13, 15 (T)
17		~H, 2	6, 16 (□)
		×	

El argumento es semánticamente válido en el sistema S5.

Apendice-2.pmd 512 13/07/07, 05:03 p.m.

14	1	◊◊T ⇒ □◊P, 0 ✓		MC
	2	~~◊(◊T & ~◊P), 0 ✓		MC
	3	◊(◊T & ~◊P), 0 ✓		2 (~~)
	4	□(◊◊T ⊃ □◊P), 0		1 (⇒)
	5	0*R*0		1 (R)
	6	◊◊T ⊃ □◊P, 0 ✓		4, 5 (□)
	7	0*R*1		3 (◊)
	8	◊T & ~◊P, 1 ✓		3 (◊)
	9	◊T, 1 ✓		8 (&)
	10	~◊P, 1 ✓		8 (&)
	11	1*R*2		9 (◊)
	12	T, 2		9 (◊)
	13	~◊◊T, 0 ✓	□◊P, 0	6 (⊃)
	14	□~◊T, 0		13 (D)
	15	~◊T, 0 ✓		5, 14 (□)
	16	□~T, 0		15 (D)
	17	0*R*2		7, 11 (T)
	18	~T, 2		16, 17 (□)
	19	×	□~P, 1	10 (D)
	20		◊P, 1 ✓	7, 13 (□)
	21		1*R*3	20 (◊)
	22		P, 3	20 (◊)
	23		~P, 3	19, 21 (□)
			×	

El argumento es semánticamente válido en el sistema S5.

Apendice-2.pmd 513 13/07/07, 03:34 p.m.

16.	1	$\sim\Diamond(A \,\&\, \sim B), 0$ ✓	MC
	2	$\sim(\Diamond\Box A \Rightarrow \Diamond\Box B), 0$ ✓	MC
	3	$\Box\sim(A \,\&\, \sim B), 0$	1 (D)
	4	$\sim\Box(\Diamond\Box A \supset \Diamond\Box B), 0$ ✓	2 ($\sim\Rightarrow$)
	5	$\Diamond\sim(\Diamond\Box A \supset \Diamond\Box B), 0$ ✓	4 (D)
	6	$0R1$	5 ($\Diamond$)
	7	$\sim(\Diamond\Box A \supset \Diamond\Box B), 1$ ✓	5 ($\Diamond$)
	8	$\Diamond\Box A, 1$ ✓	7 ($\sim\supset$)
	9	$\sim\Diamond\Box B, 1$ ✓	7 ($\sim\supset$)
	10	$\Box\sim\Box B, 1$	9 (D)
	11	$1R2$	8 ($\Diamond$)
	12	$\Box A, 2$	8 ($\Diamond$)
	13	$\sim\Box B, 2$ ✓	10, 11 ($\Box$)
	14	$\Diamond\sim B, 2$ ✓	13 (D)
	15	$2R3$	14 ($\Diamond$)
	16	$\sim B, 3$	14 ($\Diamond$)
	17	$A, 3$	12, 15 ($\Box$)
	18	$0R2$	6, 11 (T)
	19	$0R3$	15, 18 (T)
	20	$\sim(A \,\&\, \sim B), 3$ ✓	3, 19 ($\Box$)
	21	$\sim A, 3$ $\sim\sim B, 3$ ✓	20 ($\sim\&$)
		× ×	

El argumento es semánticamente válido en el sistema S5.

Capítulo 12

Ejercicio 12.1

A.

2 Derive: $\Box[(A \,\&\, B) \supset (B \vee C)]$

1	$A \,\&\, B$	Suposición
2	B	1 (&E)
3	$B \vee C$	2 ($\vee$I)
4	$(A \,\&\, B) \supset (B \vee C)$	1-3 ($\supset$I)
5	$\Box[(A \,\&\, B) \supset (B \vee C)]$	4 ($\Box$I)

Apendice-2.pmd 514 13/07/07, 03:34 p.m.

4. Derive: $(\Box{\sim}B \,\&\, T) \supset {\sim}\Diamond B$

1	$\Box{\sim}B \,\&\, T$	Suposición
2	$\Box{\sim}B$	1 (&E)
3	${\sim}\Diamond B$	2 (D)
4	$(\Box{\sim}B \,\&\, T) \supset {\sim}\Diamond B$	1-3 (⊃I)

6. Derive: $(\Box C \vee \Box D) \supset (C \vee D)$

1	$\Box C \vee \Box D$	Suposición
2	$\Box(C \vee D)$	1 (IMD)
3	$C \vee D$	2 (□E)
4	$(\Box C \vee \Box D) \supset (C \vee D)$	1-3 (⊃I)

8. Derive: $[(\Box S \vee \Box P) \,\&\, \Diamond{\sim}S] \supset \Diamond{\sim}P$

1	$(\Box S \vee \Box P) \,\&\, \Diamond{\sim}S$	Suposición
2	$\Diamond{\sim}S$	1 (&E)
3	${\sim}\Box S$	2 (D)
4	$\Box S \vee \Box P$	1 (&E)
5	${\sim}\Box P$	3, 4 (SD)
6	$\Diamond{\sim}P$	5 (D)
7	$[(\Box S \vee \Box P) \,\&\, \Diamond{\sim}S] \supset \Diamond{\sim}P$	1-6 (⊃I)

10. Derive: ${\sim}(\Box(E \supset H) \,\&\, {\sim}\Box{\sim}E) \vee \Diamond H$

1	$\Box(E \supset H) \,\&\, {\sim}\Box{\sim}E$	Suposición
2	$\Box(E \supset H)$	1 (&E)
3	$E \Rightarrow H$	2 (IE)
4	$\Diamond E \Rightarrow \Diamond H$	3 (OIE)
5	${\sim}\Box{\sim}E$	1 (&E)
6	$\Diamond E$	5 (D)
7	$\Diamond H$	4, 6 (⇒E)
8	$(\Box(E \supset H) \,\&\, {\sim}\Box{\sim}E) \supset \Diamond H$	1-7 (⊃I)
9	${\sim}(\Box(E \supset H) \,\&\, {\sim}\Box{\sim}E) \vee \Diamond H$	8 (Impl)

B.

2. Derive: $\Box{\sim}K$

1	$\Diamond(H \,\&\, J)$	Suposición
2	$\Diamond K \Rightarrow {\sim}\Diamond J$	Suposición
3	$\Diamond H \,\&\, \Diamond J$	1 (IMD)
4	$\Diamond J$	3 (&E)
5	${\sim}{\sim}\Diamond J$	4 (DN)
6	${\sim}\Diamond K$	2, 5 (⇒E)
7	$\Box{\sim}K$	6 (D)

4. Derive: $O \supset P$

1	$\Box(N \equiv O)$	Suposición
2	$N \Rightarrow P$	Suposición
3	$N \equiv O$	1 ($\Box$E)
4	$\Box(N \supset P)$	2 (IE)
5	$(N \supset O) \& (O \supset N)$	3 (Equiv)
6	$O \supset N$	5 (&E)
7	$N \supset P$	4 ($\Box$E)
8	$O \supset P$	6, 7 (SH)

6. Derive: $\Box U$

1	$S \Rightarrow (T \& U)$	Suposición
2	$\Box S$	Suposición
3	$\Box S \Rightarrow \Box(T \& U)$	1 (OIE)
4	$\Box(T \& U)$	2, 3 ($\Rightarrow$E)
5	$\Box T \& \Box U$	4 (EMD)
6	$\Box U$	5 (&E)

8. Derive: $\Diamond(Z \vee V)$

1	$\Diamond(W \vee X)$	Suposición
2	$\Diamond W \Rightarrow \Diamond Z$	Suposición
3	$\Diamond X \Rightarrow \Diamond V$	Suposición
4	$\Diamond W \vee \Diamond X$	1 (EMD)
5	$\quad \Diamond W$	Suposición
6	$\quad \Diamond Z$	2, 5 ($\Rightarrow$E)
7	$\quad \Diamond Z \vee \Diamond V$	6 ($\vee$I)
8	$\quad \Diamond X$	Suposición
9	$\quad \Diamond V$	3, 8 ($\Rightarrow$E)
10	$\quad \Diamond Z \vee \Diamond V$	9 ($\vee$I)
11	$\Diamond Z \vee \Diamond V$	4, 5-10 ($\vee$E)
12	$\Diamond(Z \vee V)$	11 (EMD)

10. Derive: $\Diamond S \& \Diamond T$

1	$\Box[\sim R \vee (S \& T)]$	Suposición
2	$\Diamond R$	Suposición
3	$\Box[R \supset (S \& T)]$	1 (Impl)
4	$R \Rightarrow (S \& T)$	3 (IE)
5	$\Diamond R \Rightarrow \Diamond(S \& T)$	4 (OIE)
6	$\Diamond(S \& T)$	2, 5 ($\Rightarrow$E)
7	$\Diamond S \& \Diamond T$	6 (IMD)

Apendice-2.pmd 516 13/07/07, 03:34 p.m.

12. Derive: $\Diamond\sim W$

1	$\sim\Diamond(S \vee T)$	Suposición
2	$(U \Rightarrow W) \supset \Diamond S$	Suposición
3	$\sim(\Diamond S \vee \Diamond T)$	1 (EMD)
4	$\sim\Diamond S \;\&\; \sim\Diamond T$	3 (DeM)
5	$\sim\Diamond S$	4 (&E)
6	$\sim(U \Rightarrow W)$	2, 5 (MT)
7	$\sim\Box(U \supset W)$	6 (IE)
8	$\sim\Box(\sim U \vee W)$	7 (Impl)
9	$\Diamond\sim(\sim U \vee W)$	8 (D)
10	$\Diamond(\sim\sim U \;\&\; \sim W)$	9 (DeM)
11	$\Diamond\sim\sim U \;\&\; \Diamond\sim W$	10 IMD
12	$\Diamond\sim W$	11 (&E)

14. Derive: $\Diamond\sim C$

1	$\Box(A \;\&\; B) \vee \Box(\sim A \;\&\; \sim B)$	Suposición
2	$[(A \Rightarrow B) \;\&\; (B \Rightarrow A)] \supset \sim\Diamond C$	Suposición
3	$\Box[(A \;\&\; B) \vee (\sim A \;\&\; \sim B)]$	1 (IMD)
4	$\Box(A \equiv B)$	3 (Equiv)
5	$[\Box(A \supset B) \;\&\; \Box(B \supset A)] \supset \sim\Diamond C$	2 (IE)
6	$\Box[(A \supset B) \;\&\; (B \supset A)] \supset \sim\Diamond C$	5 (EMD)
7	$\Box(A \equiv B) \supset \sim\Diamond C$	6 (Equiv)
8	$\sim\Diamond C$	4, 7 ($\supset$E)
9	$\Box\sim C$	8 (D)
10	$\sim C$	9 ($\Box$E)
11	$\Diamond\sim C$	10 ($\Diamond$I)

Apendice-2.pmd 517 13/07/07, 03:34 p.m.

16. Derive: ◊E & ~H

1	□[B & (E ∨ ~G)]	Suposición
2	(□K ∨ ◊H) ⊃ ~□B	Suposición
3	◊G	Suposición
4	□B & □(E ∨ ~G)	1 (EMD)
5	□B	4 (&E)
6	~~□B	5 (DN)
7	~(□K ∨ ◊H)	2, 6 (MT)
8	~□K & ~◊H	7 (DeM)
9	~◊H	8 (&E)
10	□~H	9 (D)
11	~H	10 (□E)
12	□(E ∨ ~G)	4 (&E)
13	□(~G ∨ E)	12 (Conm)
14	□(G ⊃ E)	13 (Impl)
15	G ⇒ E	14 (IE)
16	◊G ⇒ ◊E	15 (OIE)
17	◊E	3, 16 (⇒E)
18	◊E & ~H	11, 17 (&I)

18. Derive: ~P

1	◊[(L ∨ M) & (L ∨ Q)]	Suposición
2	◊P ⇒ ~◊Q	Suposición
3	□~L	Suposición
4	◊(L ∨ M) & ◊(L ∨ Q)	1 (IMD)
5	◊(L ∨ Q)	4 (&E)
6	◊L ∨ ◊Q	5 (EMD)
7	~◊L	3 (D)
8	◊Q	6, 7 (SD)
9	~~◊Q	8 (DN)
10	~◊P	2, 9 (⇒E)
11	□~P	10 (D)
12	~P	11 (□E)

Apendice-2.pmd 518 13/07/07, 03:34 p.m.

Ejercicio 12.2

A.

2. Derive: $\Box{\sim}\Diamond J$

1	${\sim}\Diamond J$	Suposición
2	${\sim}\Diamond\Diamond J$	1 (S4)
3	$\Box{\sim}\Diamond J$	2 (D)

4. Derive: $\Diamond P \vee \Diamond Q$

1	$\Diamond\Diamond(P \vee Q)$	Suposición
2	$\Diamond(P \vee Q)$	1 (S4)
3	$\Diamond P \vee \Diamond Q$	2 (EMD)

6. Derive: $\Diamond S$

1	$\Box\Box\Diamond\Diamond S$	Suposición
2	$\Box\Diamond\Diamond S$	1 (S4)
3	$\Box\Diamond S$	2 (S4)
4	$\Diamond S$	3 ($\Box$E)

8. Derive: ${\sim}\Box E$

1	$\Box\Box E \Rightarrow \Box\Box F$	Suposición
2	$\Diamond{\sim}F$	Suposición
3	$\Box E \Rightarrow \Box\Box F$	1 (S4)
4	$\Box E \Rightarrow \Box F$	3 (S4)
5	${\sim}\Box F$	2 (D)
6	${\sim}\Box E$	4, 5 ($\Rightarrow$E)

10. Derive: $\Diamond Q$

1	$\Box{\sim}Q \Rightarrow \Box\Box{\sim}R$	Suposición
2	$\Diamond R$	Suposición
3	$\Box{\sim}Q \Rightarrow \Box{\sim}R$	1 (S4)
4	${\sim}\Box{\sim}R$	2 (D)
5	${\sim}\Box{\sim}Q$	3, 4 ($\Rightarrow$E)
6	$\Diamond Q$	5 (D)

B.

2. Derive: $\Diamond L$

1	$\Box\Diamond\Box\Diamond L$	Suposición
2	$\Diamond\Box\Diamond L$	1 ($\Box$E)
3	$\Box\Diamond L$	2 (S5)
4	$\Diamond L$	3 ($\Box$E)

Apendice-2.pmd 519 13/07/07, 03:34 p.m.

4. Derive: $\sim\Box N$

1	$\Diamond\Box N \Rightarrow \Diamond\Diamond P$	Suposición
2	$\sim\Diamond P$	Suposición
3	$\sim\Diamond\Diamond P$	2 (S4)
4	$\sim\Diamond\Box N$	1, 3 ($\Rightarrow$E)
5	$\sim\Box N$	4 (S5)

6. Derive: A

1	$\Diamond\Box\Diamond\Box A$	Suposición
2	$\Box\Diamond\Box A$	1 (S5)
3	$\Diamond\Box A$	2 ($\Box$E)
4	$\Box A$	3 (S5)
5	A	4 ($\Box$E)

8. Derive: $\sim C$

1	$\Diamond\Box\sim H$	Suposición
2	$\Diamond C \Rightarrow \Diamond H$	Suposición
3	$\Box\sim H$	1 (S5)
4	$\sim\Diamond H$	3 (D)
5	$\sim\Diamond C$	2, 4 ($\Rightarrow$E)
6	$\Box\sim C$	5 (D)
7	$\sim C$	6 ($\Box$E)

10. Derive: $\Diamond\Diamond(\sim\Box A \vee \Box B)$

1	$\Box\Box A \Rightarrow \Diamond\Box B$	Suposición
2	$\Box A \Rightarrow \Diamond\Box B$	1 (S4)
3	$\Box A \Rightarrow \Box B$	2 (S5)
4	$\Box(\Box A \supset \Box B)$	3 (IE)
5	$\Box A \supset \Box B$	4 ($\Box$E)
6	$\Diamond(\Box A \supset \Box B)$	5 ($\Diamond$I)
7	$\Diamond\Diamond(\Box A \supset \Box B)$	6 (S4)
8	$\Diamond\Diamond(\sim\Box A \vee \Box B)$	7 (Impl)

Apendice-2.pmd 520 13/07/07, 03:34 p.m.

12. Derive: N

1	$\Diamond{\sim}N \Rightarrow {\sim}N$	Suposición
2	$\Diamond N$	Suposición
3	${\sim}\Box{\sim}N$	2 (D)
4	$\Box\Diamond{\sim}N \Rightarrow \Box{\sim}N$	1 (OIE)
5	${\sim}\Box\Diamond{\sim}N$	3, 4 ($\Rightarrow$E)
6	${\sim}\Box{\sim}\Box N$	5 (D)
7	$\Diamond\Box N$	6 (D)
8	$\Box N$	7 (S5)
9	N	8 ($\Box$E)

Apendice-2.pmd 521 13/07/07, 03:34 p.m.

Bibliografía

Bergmann, M., Moor, J. & Nelson J. (1998). *The Logic Book*. Tercera edición. New York, McGraw Hill.

Bernays, Paul & Schönfinkel, Moses (1928). "Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik", *Mathematische Annalen* 99: 342-372.

Beth, Evert W. (1959). *The Foundations of Mathematics*. Amsterdam, North Holland.

Boh, Ivan (1993). *Epistemic Logic in the Middle Ages*. Londres, Routledge.

BonJour, Laurence & Sosa, Ernest (2003). *Epistemic Justification: Internalism vs. Externalism, Foundations vs. Virtues*. Oxford: Blackwell.

Boolos, George (1984). "Trees and Finite Satisfiability: Proof of a Conjecture of Burgess", *Notre Dame Journal of Formal Logic* 25: 193-197.

Bressan, Aldo (1972). *A General Interpreted Modal Calculus*. New Haven: Yale University Press.

Carnap, Rudolph (1947). *Meaning and Necessity*. Chicago, University of Chicago Press.

Carroll, Lewis (1977). *Symbolic Logic*. New York, C. N. Potter.

Church, Alonzo (1936). "A Note on the *Entscheidungsproblem*", *Journal of Symbolic Logic* 1: 40-41, 101-102.

Church, Alonzo (1951). "A Formulation of the Logic of Sense and Denotation". En Henle, P. (ed.), *Structure, Method, and Meaning*. New York, The Liberal Arts Press.

Church, Alonzo (1956). *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton, Princeton University Press.

Church, Alonzo (1973). "Outline of a Revised Formulation of the Logic of Sense and Denotation (Part I)". *Noûs 7*: 24–33.

Church, Alonzo (1974). "Outline of a Revised Formulation of the Logic of Sense and Denotation (Part II)". *Noûs 8*: 135–156.

Fitch, Frederic Brenton (1952). *Symbolic Logic: An Introduction*. New York, Ronald.

Fitting, Melvin & Mendelsohn, Richard (1998). *First Order Modal Logic*. Dordrecht, Kluwer.

bibliografia.pmd 523 20/06/07, 11:56 a.m.

Frege, Gottlob (1892). "Über Sinn und Bedeutung". *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* 100: 25-50.

Gentzen, Gerhard (1934/1935). "Untersuchungen über das logische Schliessen", *Mathematische Zeitschrift* 39: 176-210, 405-431.

Gödel, Kurt (1929). *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls.* Tesis Doctoral, Universidad de Vienna.

Gödel, Kurt (1930). "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionen-kalküls", *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37: 349-360. Traducido al inglés en van Heijenoort (1967).

Gödel, Kurt (1931). "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme, I", *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38: 173-198. Traducido al inglés en van Heijenoort (1967).

Gödel, Kurt (1933). "Eine Interpretation des intuitionistichen Aussagenkalküls", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* 4: 39-40.

Grice, Paul & Strawson, Peter F. (1957). "In Defence of a Dogma", *Philosophical Review* 65: 141-58.

Haack, Susan (1982). *Filosofía de las lógicas*. Madrid, Cátedra.

Hempel, Carl Gustav (1965/1979). *La explicación científica*. *Estudios sobre la filosofía de la ciencia*. Barcelona, Paidós.

Hilbert, David y Ackermann, Wilhelm (1928). *Grundzüge der theoretischen Logik*. Berlin, Springer Verlag.

Hintikka, Jaakko (1962). *Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions*. Ithaca: Cornell University Press.

Hughes, G. E. & Cresswell, M. J. (1968). *An Introduction to Modal Logic*. London, Methuen.

Hume, David (1739/1988). *Tratado de la naturaleza humana*. Madrid, Tecnos.

Jacquette, Dale (2001). *Symbolic Logic*. Belmont, Wadsworth.

Jackson, Frank (1991). *Conditionals*. New York, Oxford University Press.

Jaŝkowski, Stanislaw (1934). "On the Rules of Suppositions in Formal Logic", *Studia Logica* 1: 5-32.

Jeffrey, Richard (1991). *Formal Logic. Its Scope and Limits*. 3ª edición. Nueva York, McGraw-Hill.

Kant, Immanuel (1781/1984). *Crítica de la razón pura*. Madrid, Alfaguara.

Kneale, William & Kneale, Martha (1962). *The Development of Logic*. Oxford, Clarendon Press.

Knuuttila, Simo (1993). *Modal Logic in the Middle Ages*. London: Routledge.

Kornblith, Hilary (ed.) (2001). *Epistemology: Internalism and Externalism*. Oxford, Blackwell.

bibliografia.pmd 524 20/06/07, 11:56 a.m.

Kripke, Saul (1959). "A Completeness Theorem in Modal Logic", *Journal of Symbolic Logic* 24: 1–14.

Kripke, Saul (1963a). "Semantical Considerations on Modal Logic", *Acta Philosophica Fennica* 16: 83-94.

Kripke, Saul (1963b). "Semantical Analysis of Modal Logic I: Normal Modal Propositional Calculi", *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 9: 67–96.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1710/1962). *Essais de théodicée sur la bonté de Dieu, la liberté de l'homme et l'origine du mal*. Paris, Aubier.

Lewis, C. I. (1912). "Implication and the Algebra of Logic", *Mind* 21: 522-521.

Lewis, C. I. (1913). "Interesting Theorems in Symbolic Logic", *Journal of Philosophy* 10: 239-242.

Lewis, C. I. (1914a). "A New Algebra of Strict Implication", *Mind* 23: 240-247.

Lewis, C. I. (1914b). "The Matrix Algebra for Implication", *Journal of Philosophy* 11: 589-600.

Lewis, C. I. & Langford, C. H. (1932). *Symbolic Logic*. New York, Dover.

Lewis, David (1978). "Truth in Fiction", *American Philosophical Quarterly* 15: 37-46.

Löwenheim, Leopold (1915). "Über Möglichkeiten im Relativkalkül", *Mathematische Annalen* 76: 447-470. Traducido al inglés en van Heijenoort (1967).

Mill, John Stuart (1843). *A System of Logic*. London, J. W. Parker.

Müller, Eugen (ed.) (1909). *Abriss der Algebra der Logik von E. Schröder*. Leipzig, Teubner.

Montague, Richard (1960). "On the Nature of Certain Philosophical Entities", *The Monist* 53: 159–194.

Montague, Richard (1970). "Pragmatics and Intensional Logic". *Synthese 22*: 68–94.

Nicod, Jean (1917). "A Reduction in the Number of the Primitive Propositions of Logic", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 19: 32-41.

Nolt, John (1997). *Logics*. Belmont, Wadsworth.

Peirce, Charles Sanders (1880/1989). "A Boolean Algebra with One Constant". En *Writings of Charles Sanders Peirce. A Chronological Edition, Volume 4*. Bloomington, Indiana University Press.

Peña, Lorenzo (1993). *Introducción a las lógicas no clásicas*. México, UNAM.

Post, Emil (1921). "Introduction to a General Theory of Elementary Propositions", *American Journal of Mathematics* 43: 163-185. En van Heijenoort (1967).

Priest, Graham (2001). *An Introduction to Non-Classical Logic*. New York, Cambridge University Press.

Prior, Arthur N. (1957). *Time and Modality*. Oxford, Clarendon Press.

Prior, Arthur N. (1967). *Past, Present, and Future*. Oxford, Clarendon Press.

bibliografia.pmd 525 20/06/07, 11:56 a.m.

Prior, Arthur N. (1969). *Papers on Time and Tense*. Oxford, Clarendon Press.

Putnam, Hilary (1971). *Philosophy of Logic*. New York, Harper Torchbooks.

Putnam, Hilary (1968/1976). "The Logic of Quantum Mechanics". En *Mathematics, Matter and Method. Philosophical Papers, Volume 1*. New York, Cambridge University Press.

Quine, Willard V. (1953/1984). "Dos dogmas del empirismo". En *Desde un punto de vista lógico*. Barcelona, Orbis.

Quine, Willard V. (1969/1973). *Filosofía de la lógica*. Madrid, Alianza Editorial.

Russell, Bertrand (1905), "On Denoting", *Mind* 14: 479-493.

Sheffer, Henry M. (1913). "A Set of Five Independent Postulates for Boolean Algebras, with Application to Logical Constants", *Transactions of the American Mathematical Society* 14: 481-488.

Simpson, Thomas Moro (ed.) (1973). *Semántica filosófica*. Buenos Aires, Siglo XXI.

Skolem, Thoralf (1920). "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen", *Videnskapsselskapets Skrifter* 1: 1-36. Traducido al inglés en van Heijenoort (1967).

Skolem, Thoralf (1923). "Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre". En *Matematikerkongressen i Helsingfors den 4-7 juli 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redogörelse*, Helsinki. Akademiska Bokhandeln. Traducido al inglés en van Heijenoort (1967).

Skolem, Thoralf (1928). "Über die mathematische Logik", *Norsk Matematisk Tidsskrift* 10: 125-142. Traducido al inglés en van Heijenoort (1967).

Smullyan, Raymond M. (1968). *First-Order Logic*. New York, Dover.

Stoll, Robert S. (1961). *Set Theory and Logic*. San Francisco, W. H. Freeman.

Strawson, Peter F. (1950). "On Referring", *Mind* 59: 320-344.

Turing, Alan (1936). "On Computable Numbers, with an Application to the *Entscheidungsproblem*", *Proceedings of the London Mathematical Society* 42: 230-265.

Valdés Villanueva, Luis M. (ed.) (1991). *La búsqueda del significado*. Madrid, Tecnos.

van Heijenoort, Jean (ed.) (1967). *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge, Harvard University Press.

von Wright, G. H. (1951a). "Deontic Logic", *Mind* 60: 1-15.

von Wright, G. H. (1951b). *An Essay on Modal Logic*. Amsterdam, North-Holland.

von Wright, G. H. (1982). *Wittgenstein*. Oxford, Basil Blackwell.

Whitehead, Alfred North & Russell, Bertrand (1910-1913). *Principia Mathematica*. Cambridge, Cambridge University Press.

Wittgenstein, Ludwig (1921/1973). *Tractatus Logico-Philosophicus*. Madrid, Alianza Editorial.

bibliografia.pmd 526 20/06/07, 11:56 a.m.